Simetrik Grup S_4 ve bazı Grup özellikleri

Mahmut Kuzucuoğlu,* & Şule Durdaş†

Bu yazımızda gruplar teorisinde sık sık karşılaşılan grup teorik bazı özelliklerin simetrik grup, S_4 üzerinde sağlanıp sağlanmadığını inceleyeceğiz. Cebirsel yapılarda genellikle tanımlar arkasından yardımcı teoremler ve teoremler verilir. Bu teoremlerin anlamlarını pekiştirmek için teoremin ifadesine uygun bir örnek bulmak, veya bilinen örneklerden hangileri için teoremin sonucu doğrudur hangileri için doğru değildir, doğru olmayanlarda neden doğru değildir, eksik olan özellik nedir, sonuç doğru ise teoremin kanıtındaki adımları birer birer takip ederek neler yapıldığının incelenmesi, neden sonuç ilişkilerinin kavranması bize teoremi anlamamız konusunda oldukça yardımcı olur. Fakat matematikçiler her zaman bu kadar şanslı değildirler. Örneğin bir teoremin ifadesinde yer alan özellikleri sağlayan bir grubun var olup olmadığını ortaya çıkarmak hiç de kolay değildir, bu türden henüz cevaplanmamış problemler vardır.

Biz işin kolayını seçip, simetrik grup üzerinde bazı özellikleri inceleyelim. $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ n elemanlı bir küme olsun, S den S ye giden bire bir ve örten fonksiyonlara permutasyon denir. Bir küme üzerindeki permutasyonlar, fonksiyonların birleşimi işlemine göre bir grup yapısı oluştururlar, bu gruba simetrik grup denir ve kümedeki eleman sayısı n ye bağlı olarak S_n ile gösterilir. Biz $n = 4$ durumunu inceleyeceğiz. Simetrik grupların altgruplarına permutasyon grupları denir.

S kümesi üzerindeki bir permutasyon α ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \alpha(4) \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir. α bire bir ve örten fonksiyon olduğundan $i \neq j$ için $\alpha(i) \neq \alpha(j)$ dir. $\alpha(1)$ için 4 seçenek, $\alpha(2)$ için 3 seçenek ve $\alpha(3)$ için 2 seçenek ve son olarak $\alpha(4)$ için tek seçenek vardır. Öyleyse S_4 grubunun $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! = 24$ elemanı vardır. Bir gruptaki elemanların saysına grubun mertebesi denir.

Permutasyonların çeşitli gösterimleri vardır, biz burada her permutasyonu ayrık döngülerin çarpımı biçiminde yazacağız ve onları aşağıdaki örnekte olduğu gibi çarpacağız.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(34)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (123)$$

ise

$$\alpha o \beta = (12)(34)(123) = (243)$$

Tanım: G grubunda her $g \in G$ için $xg = gx$ özelliği sağlayan x lerin kümesine grubun merkezi denir ve $Z(G)$ ile gösterilir. Yukarda örnek grubumuz S_4 de $Z(S_4) = 1$ olduğunu kolayca görebilirsiniz.

$$\alpha = (a_{11}a_{12} \cdots a_{1k1})$$
$$(a_{21}a_{22} \cdots a_{2k2}) \cdots (a_{m1}a_{m2} \cdots a_{mkm})$$

ayrık permutasyonu verilmiş olsun. $(a_{11} \cdots a_{1k1})$ döngüsünde k_1 e döngünün uzunluğu adı verilir. Her permutasyon bu şekilde ayrık döngülerin çarpımı biçiminde yazılabilir. Döngünün uzunluğu iki olanlara özel bir isim transpoziyon adı verilir. Permusatyon gruplarının incelendiği her yerde şu önermeyi görürüz: Her permutasyon transpozisyonların çarpımı olarak yazılabilir. Transposizyonların sayısı tek (çift) ise permutasyona tek (çift) permutasyon denir. Şimdi bunları örneğimizde görelim.

Çift permutasyonlar bir grup oluştururlar bu gruba Alterne grup A_4 denir. (Tek permutasyonların kümesi grup yapısı oluşturmaz neden?)

$$A_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123),$$
$$(134), (234), (241), (243), (314), (132), (214)\}.$$

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi
† ODTÜ Matematik Bölümü öğrencisi

S_4 de çift permutasyonlar
(1)
(12)(34)
(13)(24)
(14)(23)
(123) = (13)(12)
(134) = (14)(13)
(234) = (24)(23)
(241) = (21)(24)
(243) = (23)(24)
(314) = (34)(31)
(132) = (12)(13)
(214) = (24)(21)

S_4 de tek permutasyonlar
(12)
(13)
(23)
(14)
(34)
(24)
(1234) = (14)(13)(12)
(1243) = (13)(14)(12)
(1342) = (12)(14)(13)
(1432) = (12)(13)(14)
(1324) = (14)(12)(13)
(1423) = (13)(12)(14)

Her permutasyon ya tek yada çift olacağı için burada S_4 içindeki bütün elemanları görmüş olduk.

Tanım: G grubunda α, β elemanları için $\gamma^{-1}\alpha\gamma = \beta$ eşitliğini sağlayan bir γ elemanı varsa α ve β ya eşlenik denir. Bunu $\alpha \sim \beta$ ile gösterelim.

Şimdi "$\sim$" bağıntısının G üzerinde denklik bağıntısı olduğunu yani

i) Yansıma ($\alpha \sim \alpha$)

ii) Simetri ($\alpha \sim \beta$ ise $\beta \sim \alpha$)

iii) Geçişme ($\alpha \sim \beta$ ve $\beta \sim \gamma$ ise $\alpha \sim \gamma$)

özelliklerinin bağıntımız tarafından sağlandığını görürüz.

Bir küme üzerinde denklik bağıntısı varsa küme içinde denklik sınıfları vardır α elemanını içeren denklik sınıfı

$$[\alpha] = \{\gamma^{-1}\alpha\gamma \mid \gamma \in G\}$$

ile gösterilir.
Şimdi S_4 içindeki "$\sim$" denklik sınıflarını yazalım bunlara eşlenik sınıflarıda denir.

$$\begin{aligned}
[(1)] &= \{(1)\} \\
[(12)] &= \{(12),(13),(23),(24),(14),(34)\} \\
[(12)(34)] &= \{(12)(34),(14)(23),(13)(24)\} \\
[(1234)] &= \{(1342),(1234),(1324),(1432), \\
&\quad (1423),(1243)\} \\
[(123)] &= \{(123),(134),(234),(124),(243), \\
&\quad (143),(132),(142)\}
\end{aligned}$$

Bu yazımızda iki teorem Lagrange Teoremi ve Cauchy Teoremi kullanacağız. Bu teoremler gruplar teorisinde temel iki teorem olduğu için bunların kanıtlarınıda vereceğiz.

Şimdi sonlu gruplar için Lagrange Teoremini verelim.

Teorem: (Lagrange) G sonlu bir grup ve H de G nin altgrubu olsun. H nin mertebesi G nin mertebesini böler.

Kanıt: G kümesi üzerinde bir bağıntı "$\sim$" tanımlayalım $x \sim y$ ancak ve ancak öyle bir $h \in H$ vardır ki $x = yh$ dir. Bu bir denklik bağıntısıdır, yani yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlar. x'i içeren denklik sınıfına sol kalan sınıf denir ve xH ile gösterilir ve $xH = \{xh \mid h \in H\}$.

Lagrange Teoremini kanıtlamak için her denklik sınıfında H nin mertebesi kadar eleman olduğunu gözlemek yeterlidir. Bunu bir kalan sınıftan xH den yH e bire bir ve örten bir fonksiyon yani $xh \to yh$ götüren fonksiyonla gösteririz. Dolayısıyla H nin mertebesi G nin mertebesini böler ve bölüm sol kalan sınıflarının sayısına eşittir.

Burada sol kalan sınıflarını tanımladığımız gibi sağ kalan sınıflarınıda tanımlayarak yukarıdaki kanıt tekrar yapılabilir. Bu sonuçtan sol kalan sınıfların sayısının sağ kalan sınıfların sayısına eşit olduğunu görebiliriz. Bu sayıya H nin G içindeki indeksi denir.

Tanım: G grup ve H altgrup olsun. H nin her sol kalan sınıfı aH, sağ kalan sınıfı Ha ya eşit ise, H ye normal altgrup denir.

Şimdi örneğimize dönüp

$$V = \{1,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$$

grubunun S_4 içinde normal altgrup olduğunu gösterelim.

V nin S_4 içinde kalan sınıfları şöyledir.

$$\begin{aligned}
V1 &= \{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\} \\
&= 1V \\
V(12) &= \{(12),(34),(1423),(1324)\}
\end{aligned}$$

$$V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

$$Z_2 \times Z_2 = \{(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)\}$$

$Z_2 \times Z_2$ üzerinde işlem bileşenlerine göre toplama yani $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ burada toplama Z_2 deki toplama $f : V \rightarrow Z_2 \times Z_2$ tanımlanan bir fonksiyon olsun

$$\begin{aligned} f(1) &= (0,0) \\ f((12)(34)) &= (1,0) \\ f((13)(24) &= (1,1) \\ f((14)(23)) &= (0,1) \end{aligned}$$

f istenen fonksiyondur ve V ile $Z_2 \times Z_2$ eşyapılıdır.

S_4 ün mertebesi 6 olan altgrupları

Bunlar S kümesinde bir noktayı sabit bırakan fonksiyonların kümesidir ve şunlardır:

$$\begin{aligned} H_0 &= \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\} \\ H_1 &= \{(1), (42), (41), (21), (421), (412)\} \\ H_2 &= \{(1), (24), (43), (23), (234), (432)\} \\ H_3 &= \{(1), (13), (14), (34), (134), (143)\} \end{aligned}$$

Şimdi H_2 grubunu alalım $\frac{|S_4|}{|H2|} = \frac{24}{6} = 4$ (sağ) sol kalan sınıflarının sayısı.

Bunlar

$$\begin{aligned} H_2(1) &= \{(1), (42), (41), (21), \\ &\quad (421), (412)\} \\ H_2(13) &= \{(13), (13)(24), (134), (132), \\ &\quad (1342), (1324)\} \\ H_2(123) &= \{(123), (1423), (1234), (23), \\ &\quad (234), (14)(23)\} \\ H_2(12)(34) &= \{(12)(34), (3214), (3124), (34), \\ &\quad (324), (314)\} \\ (13)H_2 &= \{(13), (13)(42), (143), (123), \\ &\quad (4231), (4312)\} \end{aligned}$$

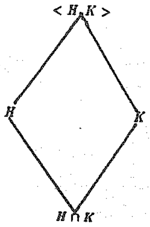
$H_2(13) \neq (13)H_2$ olduğunu gözlemleyiniz. H_2 nin (13)'ü içeren sağ ve sol kalan sınıfları eşit değil dolayısıyla H_2 grubu S_4 içinde normal alt grup değildir.

S_4 ün mertebesi 8 olan altgrupları

$$\begin{aligned} S_8^1 &= \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (12), \\ &\quad (34), (1423), (1324)\} \\ S_8^2 &= \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23), \\ &\quad (13), (24), (1234), (1432)\} \\ S_8^3 &= \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23), \\ &\quad (23), (14), (1342), (1243)\} \end{aligned}$$

dir.

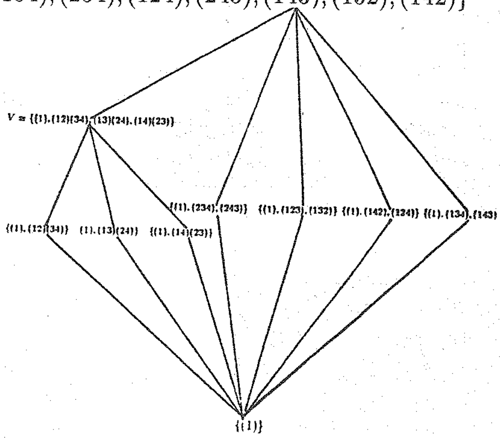
Gruplar teorisinde bir G grubunun altgruplarının birbirleri ile olan altgrupluk ilişkilerini bazen bir diagramla görmek bazı ilişkileri görmemiz için çok yardımcı olur. Hasse diagramı bunlardan birisidir ve aşağıdaki grup yukardaki grubun altgrubu ise bunlar bir doğru ile birleştirilir. Bunu bir örnekle görelim.



Burada $\langle H, K\rangle, H$ ve K grupları tarafından üretilen grubu gösterir. Dolayısıyla $H \cap K$ hem H nın hemde K nın altgrubudur. H ve K da $\langle H, K\rangle$ nın altgrubudur.

Şimdi A_4 ün Hasse diagramını görelim:

$$A_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), \\ (134), (234), (124), (243), (143), (132), (142)\}$$



RINGEL'İN EŞALAN DÜZLEMSEL KÜBİK GRAF PROBLEMİ ÜZERİNE*

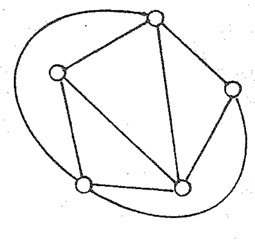
İbrahim Cahit Arkut †

Euler (1707-1782) 1936 yılında zamanının çözümü bilinmeyen Königsberg Köprüsü problemini çözerek yalnız topolojinin değil, aynı zamanda bugünkü anlamda graf teorisinin de babası sayılmaya hak kazandı [1]. Fakat graf teorisi bu yüzyılın ilk yarısında 1930'da Kuratowski [2] düzlemsel grafları karakterize eden ünlü teoremi kanıtlayıncaya kadar matematikçiler arasında daha çok topolojinin bir uzantısı olarak ele alındı. Fakat son 60 yıl içerisinde graf teorisi ve uygulamaları üzerine yoğun çalışmalar yapılmakta ve bu gelişim artan hızlarda devam etmektedir. Bu yazımızın amacı graf teorisinin ne etraflı gelişmelerinden ne de, ne olduğu hakkında özet vermek olacaktır. Amaç özellikle matematiğin diğer dallarında uğraşan Türk matematikçilerine ve matematiğe ilgi duyan herkese graf teorisinde, yeni ve anlaşılması kolay, fakat çözümünün var olduğu iddia edilen bir graf teorisi problemi ile davetiye sunmak olacaktır. Bu davetiye çıkarılırken graf teorisinin geometri ile ilişkili olan Gerhard Ringel'in bir problemini özellikle seçtiğimizi burada belirtmek istiyoruz [6].

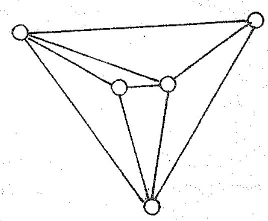
Düzlemsel grafların bazı geometrik şekillerle ilişkisini ortaya koyan ve birbirlerinden bağımsız Wagner (1936) [3], Fary (1948) [4] ve Stein (1951) [5] tarafından kanıtlanan şu teoremi verelim:

Teorem (Wagner, 1936). Her düzlemsel graf düzlemde kirişleri doğru parçaları şeklinde çizilebilir.

Yukarıdaki teoreme örnek olarak, Şekil 1'deki graf Şekil 2'de eğrisel kirişler yerine doğru parçaları kullanılarak tekrar çizilmiştir.



Şekil 1



Şekil 2

1990 yılında Wagner'in 80. yıldönümü onuruna Bodendiek tarafından toplanan graf teorisi çalışmaları içerisinde tanınmış graf teorici Gerhard Ringel'in şu problemine rastlıyoruz.

Ringel Eşalanlı düzlemsel Grafları: Doğal olarak düzleme çizilen her düzlemsel graf birbirleri ile değişik komşuluk ilişkileri içerisinde kapalı çevrimler (graf teorisi deyimi ile yüzler veya bölgeler) oluştururlar. Örneğin Şekil 1 ve 2'deki düzlemsel graflar 5 tane iç yüz ve bir tane de tüm grafı çepeçevre çevreleyen dış yüzden oluşmaktadır. Burada düzlemsel graf çiziminde bu yüzlerin alanları üzerine hiç bir sınırlama getirilmemiştir. Ringel verilen bir düzlemsel grafın dış yüzü hariç tüm iç yüzlerinin birbirlerine eş alanlı olarak çizilip çizilemeyeceğini incelemiş

*Düzlemsel grafların geometrik özelliklerini ele alan bu yazıdaki tanımları hatırlamak için Matematik Dünyası, Cilt 3, Sayı 1 ve Sayı 2'de yayınlanan "Graf Teorisi I" ve "Graf Teorisi II" başlıklı yazılara bakılabilir.

†Doğu Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü öğretim üyesi