34. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYATI SORULARINININ ÇÖZÜMLERİ

Mefharet Alpseymen Kocatepe *

34. UMO soru ve yanıtlarını sunuyoruz. Parantez içindeki ülke isimleri o soruyu soran ülkeyi göstermektedir.

(İrlanda) Soru 1. $n > 1$ bir tamsayı ve $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ olsun. $f(x)$ in, herbirinin derecesi en az 1 olan ve tüm katsayıları tamsayılar olan iki polinomun çarpımı şeklinde yazılamayacağını gösteriniz.

Çözüm 1. İddianın doğru olmadığını varsayalım, yani $g(x)$ ve $h(x)$ herbirinin derecesi en az 1 olan ve tüm katsayıları tamsayılar olan iki polinom olmak üzere

$$f(x) = g(x)h(x)$$

olsun. Katsayıları karşılaştırarak ve 3 ün bir asal sayı olduğunu gözönüne alarak $g(x)$ içindeki sabit terimin ∓1 veya ∓3 olduğu görülür. Genelliği bozmadan ∓1 olduğunu varsayalım (o zaman $h(x)$ in sabit terimi ∓3 olur.) Yani

$$g(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0 \quad (a_0 = \mp1)$$

$k = 1$ ise $g(x) = x + a_0$ ve $g(-a_0) = 0$ olduğundan $f(-a_0) = 0$ olur. Fakat $f(\mp1) \neq 0$ olduğu açıktır. Buradan da $k \geq 2$ olduğu çıkar (aynı şekilde $f(\mp3) \neq 0$ olduğundan $h(x)$ in derecesinin de en az 2 olduğu görülür.) Cebirin Temel Teoremi katsayıları karmaşık sayılar olan herhangi bir polinomun karmaşık sayılar içinde derecesi kadar kökü olduğunu söyler. Tamsayılar kümesi karmaşık sayılar kümesinin bir alt kümesi olduğuna göre bu teoremi $g(x)$ polinomuna uygulayarak $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ karmaşık sayılar olmak üzere

$$g(x) = (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_k)$$

şeklinde yazalım.

$$1 = |a_0| = |g(0)| = |\alpha_1 \cdots \alpha_k|.$$

Öte yandan $i = 1, \ldots, k$ için

$$g(\alpha_i) = 0 \Rightarrow f(\alpha_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i^{n-1}(\alpha_i + 5) = -3$$

olur. Son eşitliği $i = 1, \ldots, k$ için taraf tarafa çarpıp mutlak değer alalım.

$$\begin{aligned} 3^k &= \left|\prod_{i=1}^{k} \alpha_i^{n-1}(\alpha_i + 5)\right| \\ &= |\alpha_1 \cdot \alpha_k|^{n-1} \left|\prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_i + 5)\right| \\ &= |(-5 - \alpha_1)\cdots(-5 - \alpha_k)| = |g(-5)|. \end{aligned}$$

Yani $|g(-5)| = 3^k$. Öte yandan $f(-5) = 3$ ve mutlak değer alarak

$$3 = |f(-5)| = |g(-5)||h(-5)| = 3^k|h(-5)|.$$

$|h(-5)|$ in tamsayı ve $k \geq 2$ olduğunu hatırlarsak $3 = 3^k|h(-5)|$ olamayacağı açıktır.

Çözüm 2. Yine yukarıdaki çözümde olduğu gibi

$$f(x) = g(x)h(x)$$

olduğunu varasayalım. Her ikisinin de derecesinin birden büyük ve sabit terimlerin ∓3 ve ∓1 olması gerektiğini yukarıdaki gibi gösterelim. Bu kez katsayılar yine tamsayılar ve $k \geq 2$ ve $m \geq 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g(x) &= a_kx^k + \cdots + a_1x + a_0, \quad a_0 = \mp3 \\ h(x) &= b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0, \quad b_0 = \mp1 \end{aligned}$$

olsun. $n = k + m \geq 4$ olduğunu ve $f(x)$ polinomunda $x^{n-2}, \ldots, x$ terimlerinin katsayılarının 0 olduğunu gözleyelim. Ayrıca $k = n - m \leq n - 2$ olduğundan $f(x)$ içindeki x^k nin katsayısı da 0 olacaktır. $f(x) = g(x)h(x)$ ifadesinde her iki taraftaki $x, x^2, \ldots, x^k$ terimlerinin katsayılarını eşitleyerek ve $b_0 = \mp1$ değerini gözönüne alalım. (p ve q iki tamsayı olmak üzere $p|q$ gösterimi q sayısının p ile tam olarak bölünebileceğini belirtir.)

$$0 = a_1b_0 + a_0b_1$$

* Bilkent, Matematik Bölümü öğretim üyesi

ve

$$3|a_0 \Rightarrow 3|a_1b_0 \Rightarrow 3|a_1$$
$$0 = a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2$$

ve

$$3|a_0,\ 3|a_1 \Rightarrow 3|a_2b_0 \Rightarrow 3|a_2 \cdots$$
$$0 = a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + \cdots + a_0b_k$$

ve

$$3|a_0,\ 3|a_1,\ 3|a_{k-1} \Rightarrow 3|a_kb_0 \Rightarrow 3|a_k$$

Oysa $1 = a_kb_m$ ve her iki sayı da tamsayı olduğundan $a_k = \mp 1$ çıkar ve bu sayı da 3 ile bölünemez.

(İngiltere) Soru 2. Dar açılı bir ABC üçgeni içindeki bir D noktası

$$\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90° \text{ ve } AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

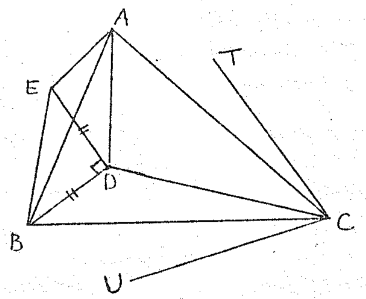
koşullarını sağlamaktadır.

a) $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$ oranının değerini bulunuz.

b) ACD ve BCD üçgenlerinin çevrel çemberlerine C noktasında çizilen teğetlerin dik olduklarını kanıtlayınız.

Çözüm.

a) $DE \perp BD$ ve $DE = BD$ olacak şekilde E noktasını alalım (Şekil 1.)



$\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ ve

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{DE}{CB}$$

olduğundan ADE ve ACB üçgenleri benzer üçgenlerdir. Buradan

$$\begin{aligned}\widehat{CAD} &= \widehat{CAB} - \widehat{DAB} = \widehat{DAE} - \widehat{DAB} \\ &= \widehat{BAE} \text{ ve } \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}\end{aligned}$$

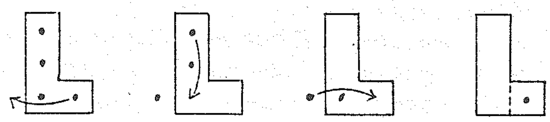
ve CAD ve BAE üçgenlerinin benzer olduğu çıkar. DEB üçgeninin ikizkenar dik üçgen olduğunu da kullanarak

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE} = \frac{CD}{\sqrt{2}BD} \Rightarrow \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CD}{BD} = \sqrt{2}.$$

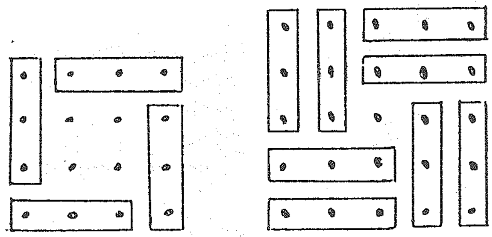
b) ACD ve BCD üçgenlerinin çevrel çemberlerine C noktasında çizilen teğetler CU ve CT ışınları olsun. Teğet-kiriş açı aynı yayı gören çevre açıya eşit olduğundan $\widehat{UCD} = \widehat{DAC}$ ve $\widehat{TCD} = \widehat{DBC}$ olur (Şekil 1) ve $\widehat{DAC} + \widehat{DBC} = 90°$ olduğunu göstermek yeterlidir. (Büyük$\widehat{EDB}$) $= 270°$ ve $\widehat{EDA} = \widehat{ACB}$ olduğundan (büyük$\widehat{ADB}$) $+ \widehat{ACB} = 270°$. $ADBC$ dörtgeninin iç açıları toplamı $360°$ olduğundan $\widehat{DAC} + \widehat{DBC} = 360° - 270° = 90°$.

(Finlandiya) Soru 3. Sonsuz bir satranç tahtası üzerinde aşağıdaki oyun oynanıyor. Başlangıç durumunda, n^2 tane taş her karede bir taş olmak üzere birbirine bitişik karelerden oluşan $n \times n$ büyüklüğündeki bir blokta bulunmaktadırlar. Oyundaki bir hamle, dolu bir komşu kare üzerinden yatay veya düşey doğrultuda geçerek hemen ardındaki boş kareye atlamaktır. Üzerinden atlanan taş tahtadan kaldırılmaktadır. Hangi n değerleri için oyunun tahta üzerinde yalnızca bir taş kalacak şekilde sonuçlanacağını bulunuz.

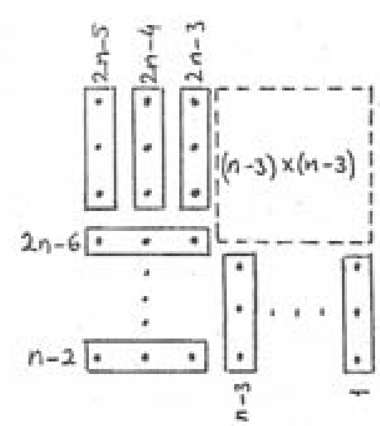
Çözüm. $n = 1$ için açıkça ve $n = 2$ için kolayca yapılabileceği görülür. $n \geq 3$ olsun.



Bu da uzun kenar boyunca sınıra bitişik olan 4 taşlı L-şeklindeki bir parçada 3 taştan olan uzun kenarın çıkarılabileceğini gösterir.



Böylece $n = 4$ hali $n = 2$ ye ve $n = 5$ hali $n = 1$ e dönüşür ve her iki durumda da oyun istenilen şekilde sonuçlanabilir.



Yukarıdaki şekildeki sayılar üçlü grupların tahtadan kaldırılma sırasını göstermektedir. $n \geq 6$ ise yukarıda görüldüğü gibi $n \times n$ hali $(n-3) \times (n-3)$ haline dönüşebilir ve bu dönüşüm tekrarlanarak 2×2 veya 1×1 durumuna indirgenirse, yani

$$n \equiv 2 \text{ veya } n \equiv 1 \pmod 3$$

durumunda oyun istenilen biçimde sonuçlanabilir.

Bu noktada bir uyarıda bulunmak istiyorum. Bazı arkadaşlarımız aşağıdaki şekilde düşünebilirler:
$n = 3$ için olmayacağı da deneyerek görülebilir (sonlu sayıda oyun vardır.) $n \equiv 0 \pmod 3$ durumunda yukarıdaki indirgeme yöntemiyle 3×3 durumuna dönüştürülebilir. $n = 3$ için olamayacağına göre $n \equiv 0 \pmod 3$ durumunda da olmaz.
Yukarıda önerilen yol yalnızca indirgeme yöntemiyle çözülemeyeceğini gösterir, başka bir yöntemle yapılıp yapılamayacağı hakkında hiçbir şey söylemez.

Aslında $n \equiv 0 \pmod 3$ yani $n = 3p$ durumunda oyun istenen şekilde sonuçlanamaz ve şimdi de bunu kanıtlayalım. Satranç tahtasını aşağıdaki şekilde olduğu gibi periyodik olarak eğik doğrular boyunca üç ayrı renge boyayalım ($\bullet, *$ ve $\circ$ renkleri.)

$$\begin{array}{cccccc}
\bullet & * & \circ & \bullet & * & \circ \\
\circ & \bullet & * & \circ & \bullet & * \\
* & \circ & \bullet & * & \circ & \bullet \\
\bullet & * & \circ & \bullet & * & \circ \\
\circ & \bullet & * & \circ & \bullet & * \\
* & \circ & \bullet & * & \circ & \bullet
\end{array}$$

Herhangi bir hamleden sonra farklı renkler üzerinde kaç taş bulunduğuna bakalım. $T_j(\bullet), T_j(*)$ ve $T_j(\circ)$, j-inci hamleden sonra $\bullet, *$ ve $\circ$ renkleri üzerindeki toplam taş sayısını göstersin. Başlangıç durumunda taşlar $n \times n$ büyüklüğünde bir kare üstündeyken, her satırda üç renkten aynı sayıda taş olduğu için (çünkü $n = 3p$),

$$T_0(\bullet) = T_0(*) = T_0(\circ).$$

Buradan da bu üç T_0 sayısının ya üçünün birden tek veya üçünün birden çift olduğu çıkar. Herhangi bir hamle ardarda gelen üç eğik doğru üzerindeki taş sayısını şöyle değiştirir: bitişik iki doğru üzerindeki taş sayısı birer azalır, üçüncü doğru üstündeki bir artar. Buradan da $T_j(\bullet), T_j(*), T_j(\circ)$ sayılarından ikisi için $T_j = T_{j-1} - 1$, birisi için de $T_j = T_{j-1} + 1$ olduğu görülür. Bu değişim sonucu herhangi bir hamle sonunda, yine ya $T_j(\bullet), T_j(*), T_j(\circ)$'nin üçü birden tek olur, ya da üçü birden çift olur. Oyunun istenilen şekilde sonuçlanması için $T_{n^2-1}(\bullet), T_{n^2-1}(*)$ ve $T_{n^2-1}(\circ)$ sayılarından ikisinin sıfır birisinin de bir olması gerekir. Bu da az önceki tek-çift gözlemimizle çelişkili olduğundan $n = 3p$ durumunda oyun bitmez.

(Makedonya) Soru 4. Düzlemde verilen P, Q, R gibi üç nokta için, $m(PQR)$, PQR üçgeninin yüksekliklerinin minimumu olarak tanımlanıyor. (P, Q, R nin doğrusal olması durumunda $m(PQR) = 0$)

A, B, C düzlemde verilmiş noktalar olsun. Düzlemdeki herhangi bir X noktası için

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. Bir ABC üçgeninde kenar uzunluklarını a, b, c (A açısı karşısındaki kenar a vs) ve yükseklikleri de h_A, h_B, h_C ile gösterelim. Önce aşağıdakileri gözleyelim:
(a) En küçük yükseklik en uzun kenara indirilen yüksekliktir ve bu yükseklik üçgenin içindedir.
(b) Bir ABC üçgeninin içinde alınan herhangi bir X noktası için

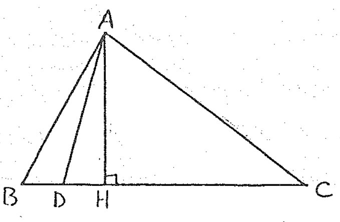
$$\begin{aligned} AX &\leq \max\{a,b,c\}, \quad BX \leq \max\{a,b,c\}, \\ CX &\leq \max\{a,b,c\} \end{aligned}$$

(Bunun kanıtı için A, B, C noktalari merkez olmak üzere üç tane $\max\{a,b,c\}$ yarıçaplı çember çizeriz. ABC üçgeni bu üç dairenin içinde kalır. Buradan da yukarıdaki eşitsizlikler çıkar.)
(c) Bir ABC üçgeninin BC kenarı üzerinde bir D noktası alındığında $m(ABD) \leq m(ABC)$ olur. Bunun kanıtını üç durumda inceleyeceğiz. Her durumda H ile en uzun kenara indirilen

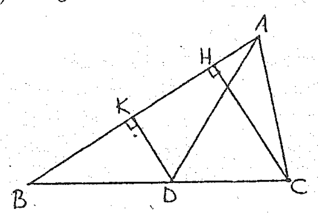
yüksekliğin ayağını gösterelim.

(i) (Şekil 2) $\max\{a,b,c\} = a \Rightarrow m(ABC) = h_A = AH$.
Bu durumda AH, ABD üçgeninin de bir yüksekliği olduğundan

$$m(ABD) \leq h_A = m(ABC).$$



(ii) (Şekil 3) $\max\{a,b,c\} = c \Rightarrow m(ABC) = h_C = CH$.

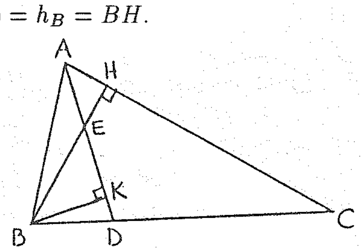


$BD \leq c$ ve yukarıdaki (b) den $AD \leq \max\{a,b,c\} = c$ olduğundan ABD üçgeninde de en uzun kenar c olur ve $m(ABD)$, D noktasından AB kenarına inilen DK yüksekliği olur. KBD ve HBC üçgenleri benzer olduğundan

$$\frac{DK}{CH} = \frac{BD}{BC} \leq 1 \Rightarrow DK \leq CH,$$

yani $m(ABD) \leq m(ABC)$.

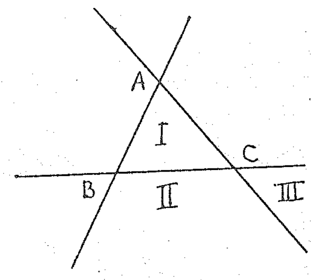
(iii) (Şekil 4) $\max\{a,b,c\} = b \Rightarrow m(ABC) = h_B = BH$.



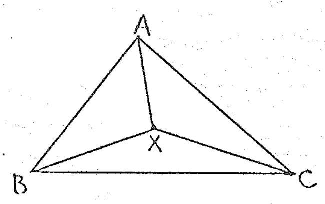
BH ve AD doğrularının kesiştiği noktaya E diyelim. BH ve AD doğru parçaları ABC üçgeninin içinde olduğundan E noktası da ABC üçgeni içindedir. Bu da E noktasının B ile H arasında olmasını gerektirir. BK, ABD üçgeninin B noktasından AD kenarına inilen yüksekliği olsun.
$BK \leq BE$ (BKE dik üçgeninde kenar $\leq$ hipotenüs)
$BE \leq BH$ (E noktası B ile H arasında) olduğundan

$$m(ABD) \leq BK \leq BE \leq BH = m(ABC).$$

Artık çözüme geçebiliriz. ABC üçgeni ve X noktası verildiğinde X in konumu için üç durum vardır: I bölgesi, II bölgesi, III bölgesi (Şekil 5).



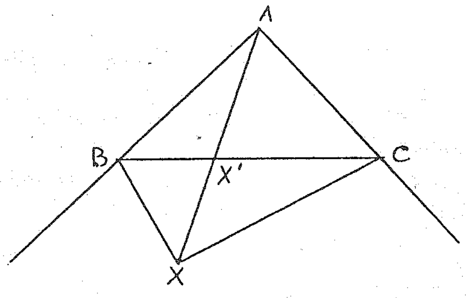
(1) $X \in$ I (Şekil 6) Bir PQR üçgeninin alanını $s(PQR)$ ile gösterelim.



r,u,t ile sırasıyla ABX, AXC, XBC üçgenlerinin en uzun kenarlarını ve h_r, h_u, h_t ile bunlara karşılık gelen yükseklikleri gösterelim. $k = \max\{a,b,c\}$ olsun. Yukarıdaki (a) ve (b) den $h_r = m(ABX)$, $r \leq k$ vs.

$$\begin{aligned} km(ABC) &= 2s(ABC) = 2s(ABX) \\ &\quad +2s(AXC) + 2s(XBC) \\ &= rh_r + uh_u + th_t \\ &\leq kh_r + kh_u + kh_t \\ &= k(h_r + h_u + h_t) \\ \Rightarrow m(ABC) &\leq h_r + h_u + h_t. \end{aligned}$$

(2) $X \in$ II (Şekil 7) X', AX ve BC doğru parçalarının kesiştiği nokta olsun.



$X' \in$ I olduğu için (1) den

$$m(ABC) \leq m(ABX') + m(AX'C) + \underbrace{m(X'BC)}_{0}.$$

Ayrıca (c) den

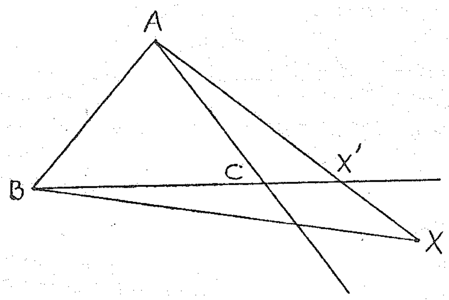
$$m(ABX') \leq m(ABX) \text{ ve } m(AX'C) \leq m(AXC)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} m(ABC) &\leq m(ABX) + m(AXC) \\ &\leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC) \end{aligned}$$

bulunur.

(3) $X \in$ III (Şekil 8) X', AX ve BC doğrularının kesiştiği nokta olsun.



Yukarıdaki (c) den $m(ABC) \leq m(ABX')$ ve $m(ABX') \leq m(ABX)$ olur. Buradan da

$$\begin{aligned} m(ABC) &\leq m(ABX) \leq m(ABX) \\ &\quad + m(AXC) + m(XBX) \end{aligned}$$

çıkar.

(Almanya) Soru 5. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ olsun. $f(1) = 2$, ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$f(f(n)) = f(n) + n$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(n) < f(n+1)$$

koşullarını sağlayan bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun var olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm 1. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ olsun. $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ yani $\dfrac{1}{\alpha} = \alpha - 1$ olduğunu gözleyelim. Herhangi bir reel sayı x için $[x]$, x in tam değerini göstersin, yani x den küçük veya x e eşit en büyük tamsayı olsun. Her x için, $[x] \leq x < [x]+1$ ve x tamsayı değilse $[x] < x < [x] + 1$ olduğu açıktır.

$$f(n) = [\alpha n + \frac{1}{2}]$$

olarak tanımlayalım. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ve $f(1) = 2$ olduğu açıktır. $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(n+1) + \frac{1}{2} - \left(\alpha n + \frac{1}{2}\right) = \alpha > 1$$

olduğu için $\alpha n + \frac{1}{2}$ ile $\alpha(n+1) + \frac{1}{2}$ arasında en az bir tamsayı vardır. Buradan da $f(n) < f(n+1)$ çıkar. Şimdi de diğer koşula bakalım. $f(n) = m$ olsun. $\alpha n + \frac{1}{2}$ tamsayı olamayacağından, buradan

$$m < \alpha n + \frac{1}{2} < m + 1 \Rightarrow \frac{m - \frac{1}{2}}{\alpha} < n < \frac{m + \frac{1}{2}}{\alpha}.$$

$\dfrac{1}{\alpha} = \alpha - 1$ yazarak yukarıdaki eşitsizlik

$$(\alpha - 1)\left(m - \frac{1}{2}\right) < n < (\alpha - 1)\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

şeklini alır. Şimdi de $\alpha < 2$ olduğunu kullanarak

$$(\alpha - 1)m - \frac{1}{2} < (\alpha - 1)\left(m - \frac{1}{2}\right)$$

ve

$$(\alpha - 1)\left(m + \frac{1}{2}\right) < (\alpha - 1)m + \frac{1}{2}$$

bulunur. Bir önceki eşitsizlikle birlikte

$$(\alpha - 1)m - \frac{1}{2} < n < (\alpha - 1)m + \frac{1}{2}$$

bulunur. Bu son eşitsizliği yeniden düzenleyerek

$$m+n<\alpha m+\frac{1}{2}<m+n+1 \Rightarrow f(m)=m+n$$

çıkar.

Çözüm 2. Fonksiyon değerlerinin ilk birkaç tanesini yazdığımızda

$$f(1)=2,\quad f(2)=3,\quad f(3)=5,$$

$$f(5)=8,\quad f(8)=13,\quad f(13)=21,\ldots$$

başlangıç değerleri $f(1)$ ve $f(2)$ olan bir Fibonacci dizisi olduğunu görürüz ($f(f(n)) = f(n)+n$ koşulu bu anlama gelmektedir.) Yukarıda görünmeyen değerler için (örneğin 4,6) $f(n)$ değerini tanımlayabilmek için bir yol bulmamız gerekir. Dikkat ederseniz soruda fonksiyonun ifadesini bulmamız istenmiyor, yalnızca böyle bir fonksiyonun var olup olmadığı soruluyor. Bu nedenle fonksiyonu tam olarak yazamasak bile fonksiyonu iyi tanımlayan bir algoritma bulursak (veya böyle bir fonksiyon olmadığını kanıtlarsak) soruyu yanıtlamıs oluruz. İlk adım $f(4)$ ü tanımlamak olacaktır. $f(4)$ tanımlandığı zaman fonksiyonun değer kümesi içinde başlangıç değerleri $f(4)$ ve $f(f(4)) = f(4)+4$ olan yeni bir Fibonacci dizisi oluşacaktır. $f(4)$ ün fonksiyonun kesin artan olması sağlanacak şekilde tanımlanması gerekir. $f(3)<f(4)<f(5)$ olması gerektiğinden $f(4) = 6$ veya $f(4) = 7$ olmalıdır. $f(4) = 6$ olarak tanımlayalım ve başlangıç değerleri 6 ve $f(6) = 10$ olan Fibonacci dizisini kuralım.

Tümevarım adımı. Daha önce tanımlanmıs sonlu sayıda dizinin bileşimini alalım. f nin tanımlanmadığı en küçük sayı x olsun ve x ten önceki en son ve x den sonraki ilk tanımlı değerler $f(a)$ ve $f(b)$ olsun, $f(a)<x<f(b)$. Bu durumda $f(f(a))$ ile $f(f(b))$ arasında daha önceden tanımlı hiçbir f değeri yoktur ve $f(f(b))-f(f(a)) = f(b)-f(a)+b-a > f(b)-f(a)$ olduğundan $f(f(a))$ ile $f(f(b))$ arasında $f(x)$ değeri için yer vardır. $f(x) = f(f(a))+1$ olarak tanımlayalım (böylece $f(f(a)) < f(x) < f(f(b))$ olur) ve yeni Fibonacci dizimizi kuralım. $f(u)$ ve $f(v)$ daha önce tanımlanmış değerler, $f(y)$ son adımda tanımlanmış bir değer ve $f(u)<f(y)<f(v)$ olsun. f şimdiye kadar kesin artan olarak tanımlanmış olduğu için $u<y<v$ olur. Son eşitsizlikleri taraf tarafa toplayarak

$$f(u)+u<f(y)+y<f(v)+v \Rightarrow$$
$$f(f(u))<f(f(y))<f(f(v))$$

olur. Bu da f nin kesin artan olduğunu gösterir.

Çözüm 3. $g(1) = 1$ olarak tanımlayalım, $f(1) = 1+g(1)$ olur. Her $n<N$ için $f(n)$ nin tanımlandığını varsayalım.

$$g(N) = \max\{n : n<N \text{ ve } f(n)\le N\}$$

ve

$$f(N) = N+g(N)$$

olarak tanımlayalım. $g(N-1)\le g(N)$ olduğundan $f(N-1)<f(N)$ bulunur. $f(N)>N$ olduğunu da gözleyelim. Şimdi de her $k\in\mathbb{N}$ için $g(f(k)) = k$ olduğunu gösterelim. $f(k) = N$ olsun. $N = f(k) > k$ ve f kesin artan olduğu için $g(N)$ tanımındaki maksimum $n = k$ değerinde alınır, yani $g(N) = k$ bulunur. Son olarak $f(N) = N+g(N)$ eşitliğinde, N yerine $f(N)$ konursa

$$f(f(N)) = f(N)+g(f(N)) = f(N)+N.$$

(Hollanda) Soru 6. $n>1$ bir tamsayı olsun. Bir çember üzerine n tane lamba $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ yerleştirilmiştir. Her lamba AÇIK ya da KAPALIdır. $S_0, S_1, \ldots, S_i, \ldots$ işlemler dizisi uygulanmaktadır. İşlem S_j yalnızca L_j'nin durumunu (diğer tüm lambaların durumunu koruyarak) şu şekilde etkiler:

Eğer L_{j-1} AÇIK ise, S_j, L_j'nin durumunu AÇIKtan KAPALIya ya da KAPALIdan AÇIKa çevirir. Eğer L_{j-1} KAPALI ise, S_j, L_j'nin durumunu değiştirmez.

Lambalar n moduna göre şöyle sıralanmıştır:

$$L_{-1} = L_{n-1},\quad L_0 = L_n,\quad L_1 = L_{n+1},\ \text{vs.}$$

Başlangıçta bütün lambalar AÇIK durumdadır.

Aşağıdakileri gösteriniz.

a) Öyle bir pozitif tamsayı $M(n)$ vardır ki, $M(n)$ işlemden sonra tüm lambalar tekrar AÇIK duruma gelmektedir.

b) Eğer n, 2^k şeklindeyse, tüm lambalar n^2-1 işlemden sonra AÇIK duruma gelmektedir.

c) Eğer n, 2^k+1 şeklindeyse, tüm lambalar n^2-n+1 işlemden sonra AÇIK duruma gelmektedir.

Çözüm.

a) $j = 0,1,2,\ldots$ için, $\mathcal{L}_j = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, [j])$, lambaların S_{j-1} işlemi uygulandıktan sonraki durumlarını belirtsin ($\mathcal{L}_0$, lambaların S_{-1} işleminden sonraki durumu, yani başlangıç durumudur.) Burada $[j] = j \bmod n$ ve $a_i =$AÇIK veya KAPALI olarak tanımlıdır. Önce tüm işlemlerin tersi olduğunu gözleyelim. Yani $\mathcal{L}_{j+1}$ den $\mathcal{L}_j$ yi bulabiliriz (bu da S_j işleminin tersi olduğunu gösterir.) Ayrıca değişik $\mathcal{L}_j$ lerin sayısı $n2^n$ olduğu için Çekmece Prensibi, $k \neq j$ olmak üzere $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}_j$ olacak şekilde k, j sayılarının bulunabileceğini söyler. k, $0 \leq j < k$ ve $\mathcal{L}_j = \mathcal{L}_k$ özelliğini gösteren en küçük tamsayı olsun. $j \neq 0$ ise ters işlem uygulayarak, $\mathcal{L}_{j-1} = \mathcal{L}_{k-1}$ çıkar, bu da k nin en küçük tamsayı olmasıyla çelişir. Buradan $j = 0$ çıkar, bu da tüm lambaların $k-1$ işlemden sonra açık olduğunu gösterir.

Sorunun **b)** ve **c)** bölümlerinde herhangi bir lambanın AÇIK konumunu 0, KAPALI konumunu 1 ile göstereceğiz ve $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ cismi içinde (yani mod 2 ye göre) çalışacağız. Herhangi bir anda tüm lambaların durumunu

$$\mathrm{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}), \quad (v_i \in \mathbb{Z}_2)$$

vektörü ile gösterelim. Burada v_i, L_i nin durumunu göstermektedir. Örneğin

başlangıç durumu:	$(1, 1, \ldots, 1)$
S_0 dan sonraki durum:	$(0, 1, \ldots, 1)$

$\mathbf{V} = \mathbb{Z}_2^n$, yani yukarıdaki gibi tanımlanan tüm $\mathbf{v}$ vektörlerinin kümesi olsun. $\mathbf{V}$ kümesi $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Biz herhangi bir S_j işlemini $\mathbf{V}$ vektör uzayı üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir A_j doğrusal dönüşümü ile temsil edebiliriz.

$$A_0(v_0, v_1, \ldots v_{n-1}) = (v_0 + v_{n-1}, v_1, \ldots, v_{n-1}),$$

$$A_i(v_0, \ldots, v_i, \ldots, v_{n-1})$$

$$= (v_0, \ldots, v_{i-1}, \underbrace{v_{i-1} + v_i}_{i\text{-inci koord.}}, \ldots, v_{n-1}),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$A_i(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) =$$
$$= A_{i-n}(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}), i \geq n.$$

Bir de $P : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$,

$$P(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_0)$$

olarak tanımlayalım. P doğrusal dönüşümünün tersi olduğu ve tersinin $P^{-1} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$,

$$P^{-1}(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) = (v_{n-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{n-2})$$

şeklinde olduğu açıktır. Her $j \geq 0$ için,

$$A_j = P^{-j} A_0 P^j$$

olduğu da kolayca görülür. Burada $P^0 = I$ =(birim dönüşüm), $P^j = \underbrace{P \circ \ldots \circ P}_{j \text{ tane}}$ ve $P^{-j} = (P^{-1})^j = (P^j)^{-1}$ dir. Buradan da

$$A_{j-1} \ldots A_1 A_0 = P^{-j} (P A_0)^j$$

olur.

$\mathrm{e} = (1, 1, \ldots, 1)$ olsun (lambaların başlangıç durumu.) Sorunun **b)** ve **c)** bölümlerinde n nin özel değerleri için $A_{j-1} \ldots A_1 A_0(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$ özelliğini sağlayan j değerini bulmamız isteniyor. Saymaya sıfırıncı işlemle başladığımız için, j-inci işlem S_{j-1} dir. (Sorunun **a)** bölümünde her n için böyle bir $j = M(n)$ bulunabileceğini göstermiştik.) Yukarıdaki gözlemlerimizden bu eşitlik $(PA_0)^j(\mathrm{e}) = P^j(\mathrm{e})$ eşitliğine eşdeğerdir. $P(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$ olduğu için de bu eşitlik $(PA_0)^j(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$ ye eşdeğerdir.

PA_0 doğrusal dönüşümünü $\mathbf{V} = \mathbb{Z}_2$ vektör uzayının standart tabanına göre temsil eden matris

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Standart taban $\mathrm{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathrm{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathrm{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ dir.)

$(PA_0)^j(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$ olduğunu göstermek $B^j \mathrm{e} = \mathrm{e}$ olduğunu göstermeye eşdeğerdir. Son formülde B matrisi kendisiyle j kere çarpıldıktan sonra e sütun vektörüyle çarpılmaktadır. Yani son formüldeki e vektörü $(1, 1, \ldots, 1)$ vektörünün sütun halinde yazılmış şeklidir. Şimdi mod 2 ye göre çalıştığımızı tekrar anımsayalım, yani $-1 \equiv 1$, $2 \equiv 0$ vs gibi özdeşlikleri kullanacağız. Bir $n \times n$ büyüklüğündeki M matrisinin karakteristik polinomu $p(x) = \det(M - xI)$ polinomu olarak tanımlanır ve Cayley-Hamilton teoremi her $n \times n$ matrisinin karakteristik denklemini sağladığını söyler, yani $p(M) = 0$ olur. Bizim B matrisinin karakteristik polinomu $x^n + x^{n-1} + 1$ polinomudur, ve Cayley-Hamilton teoremine göre $B^n + B^{n-1} + I = 0$ olur. Buraya kadar söylediklerimiz her n için geçerlidir.