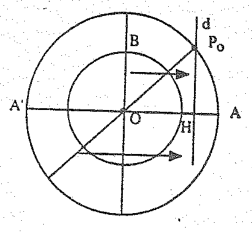
a) $d \perp AA'$ **hali:** Teorem 4'ten yararlanacağız.



Şekil 11

1. d doğrusunun asal çemberi kestiği noktalardan biri P_0 olsun.
2. Elipsin merkezi O ise OP_0 doğrusu çizilir.
3. OP_0 doğrusu yedek çemberi Q ve Q' de kessin.
4. Q ve Q' den OB ye dik doğrular çizilir.
5. Bu doğrular d yi, aranılan P ve P' noktalarında keser.

b) $d \perp BB'$ **hali:** Teorem 4'ten, benzer yol uygulanır.

Genel Hal

1. d doğrusu üzerinde P ve Q gibi iki nokta alınır.
2. Bu iki noktanın ilgin P_0, Q_0 karşılıkları bulunur.
3. P_0Q_0 doğrusunun asal çemberle olan R_0, S_0 arakesitleri elde edilir.
4. Bunların R, S ilginleri aranılan noktalar olur.

Üçe, Dokuza ve Onbire Bölünebilme

Ali Nesin *

Bir tamsayının üçe yada dokuza tam olarak bölünüp bölünmediğini anlamak için çok bilinen bir yöntem vardır: Sayının rakamları toplanır. Eğer bu toplam üçe (dokuza) bölünüyorsa, sayı da üçe (dokuza) bölünüyordur. örneğin, 2571 üçe bölünür, çünkü $2+5+7+1$, yani 15, üçe bölünür. öte yandan 2571 dokuza bölünmez, çünkü 15 dokuza bölünmez. Bu yöntemle, bir sayı üçe (yada dokuza) bölündüğünde kalan da bulunabilir. örneğin 1993 üçe bölündüğünde kalan 1'dir, çünkü $1+9+9+3$, yani 22, üçe bölündüğünde kalan 1'dir. Aynı yöntemle, 1993 dokuza bölündüğünde kalanın 4 olduğu anlaşılır.

Onbire bölünebilme yöntemi de – yukarıdaki yöntemler kadar olmasa bile – oldukça iyi bilinir. Bir tamsayının onbire tam bölünüp bölünmediğini anlamak için 1) Tamsayının birinci, üçüncü,beşinci... rakamları toplanır, 2) Sonra ikinci, dördüncü, altıncı... rakamları toplanır, 3) Bu iki toplamdan küçüğü büyüğünden çıkarılır, 4) Eğer çıkarma sonucu bulunan sayı onbire bölünüyorsa, tamsayımız da onbire bölünüyor demektir. örneğin, 2753087 onbire bölünmez çünkü $2+5+0+7=14$ dür, $7+3+8=18$ dir, ve aralarındaki fark 4'dür. öte yandan, 2678430964 onbire bölünür. Bu yöntemle kalan da bulunabilir, ama biraz dikkatli olmak gerekir, yazının sonunda umarım okur kalanın nasıl bulunabileceğini kendi kendine çıkaracaktır. ışte bu yazının amacı yukarıdaki yöntemlerin neden başarılı olduklarını okura anlatmaktır.

"Bundan böyle yedi sıfıra eşittir," dersem, şaşırabilir, saçma bulabilirsiniz, "yedi, sıfıra eşit değil ki," deyip karşı çıkabilirsiniz. Haklısınız, yedi sıfıra eşit değildir. Daha doğrusu her zaman eşit değildir. Ama bazan, yedi sıfıra eşittir. Bir örnekle bu savımı savunayım: Diyelim bugün günlerden Pazar, ve size şöyle bir soru soruldu: 145 gün sonra günlerden ne olacak? Her yedi gün sonra günler yinelendiğinden, 140 gün sonra gene Pazar olacak, dolayısıyla 145 gün sonra günlerden Cuma olacak. Bu sorunun yanıtını bulmak için

* California Üniversitesi öğretim üyesi

yediyi sıfır yaptık (aşağıdaki hesapta, ancak yedi sıfıra eşitlendiğinde geçerli olan eşitlikleri $=_7$ olarak gösterdim):

$$145 = 140 + 5 = (7 \times 20) + 5 =_7 (0 \times 20) + 5 = 5.$$

Demek ki günleri hesaplamak için kullanılan aritmetikte yedi sıfıra eşitlenebiliyor. Yine de dikkatli olmak gerekiyor. Günleri hesaplamakta bile olsa her yedi sıfıra eşit değildir. Bir örnekle bu noktaya açıklık getireyim: Diyelim bugün günlerden Pazar ve 256 gün sonraki günü hesaplamak istiyoruz. $256 = (7 \times 36) + 4$ olduğundan 256 gün sonra günlerden Perşembe olur. Peki aşağıdaki hesaba ne dersiniz?

$$256 = 2^8 = 2^{7+1} =_7 2^{0+1} = 2.$$

Bu kez değişik bir yanıt bulduk. Bir yerde bir yanlış yaptık, ama nerde? ıkinci hesabımız yanlış. çünkü ikinci hesabımızda tepede bulunan 8 günleri değil ikileri saymakta kullanılıyor: 2^8 demekle 2 sayısının kendisiyle sekiz kez çarpılacağı söyleniyor. Yani buradaki sekizin görevi başka. Ama günleri hesaplamak için toplama ve çarpmalardaki yedileri hiç çekinmeden sıfır yapabiliriz.

Kimi zaman da ikiyi sıfıra eşitlemek işimize gelebilir. Örneğin, masanın üstünde duran bir paranın tura yüzü gözüküyorsa, ve bu parayı 145 kez çevirirsek, üste yazı yüzü gelir. Neden? Çünkü, her iki kez çevirdiğimizde, yine tura gözükecek, sanki parayı hiç çevirmemişiz gibi...

Kimi zaman 24'ü sıfıra eşitlemekte yarar vardır. Kimi zamansa 12'yi, 60'ı... Okur örnek bulmakta zorluk çekmeyecektir.

Diyelim, bu paragrafta 6'nın sıfır olduğuna karar verdik. Bunun sonuçlarını irdelemeye çalışalım. Eğer $6 =_6 0$ ise, o zaman

$$7 = 6 + 1 =_6 0 + 1 = 1$$

dir. Bunun gibi $8 =_6 2$, $9 =_6 3$ dür. Peki -4 kaçtır? Hesaplayalım:

$$-4 = 0 - 4 =_6 6 - 4 = 2.$$

Demek -4 , 2 'ye eşitmiş. şimdi de -124 'ü hesaplayalım:

$$\begin{aligned} -124 &= -120 - 4 = -(20 \times 6) - 4 \\ &=_6 -(20 \times 0) - 4 \\ &= 0 - 4 =_6 6 - 4 = 2. \end{aligned}$$

Demek -124 de 2'ye eşit. Kolayca anlaşılacağı gibi 6 sıfıra eşit olunca, her tamsayı $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin sayılarından birine eşittir. "ıyi, güzel, ama ne işe yarar?" diyebilirsiniz. Kimi zaman 6 'yı sıfırlamak yararlıdır gerçekten. örneğin, bir tamsayı altıya bölündüğünde kalanı hesaplamak istediğimiz zaman hiç cekinmeden 6 sayısını sıfırlayabiliriz; çünkü 6 sayısı altıya bölündüğünde kalan sıfırdır. örneğin $(17 \times 26) + 25$ altıya bölündüğünde kalanı bulmak istiyorsak, şöyle bir hesap yapabiliriz:

$$(17 \times 26) + 25 =_6 (5 \times 2) + 1 = 11 =_6 5,$$

ve bu sayı altıya bölündüğünde kalanın 5 olduğunu anlarız.

Yukarıda yazdıklarımızın matematiksel kanıtı oldukça kolaydır. Yavaş yavaş kanıtlayalım. önce tanımdan başlayalım. n sıfır olmayan bir doğal sayı olsun. Bundan böyle eğer a ve b tamsayılarsa, $a =_n b$ terimi, " $a - b$ sayısı n 'ye tam bölünür" anlamına, yada başka bir deyişle, "eğer n sıfırsa, a sayısı b sayısına eşittir" anlamına gelecek. Eğer a ve b doğal sayılarsa, " $a =_n b$ " aynı zamanda, " a ve b sayıları n 'ye bölündüğünde kalanları eşittir" anlamına gelir. örneğin,

$$1 =_6 7 =_6 13 =_6 -5$$

dir. Birinci tanımımızı kullanarak bu $=_n$ kavramı üzerine kolay birkaç olgu kanıtlayalım:

Aşağıdaki n sıfırdan büyük herhangi bir sabit doğal sayı, ve a, b, x ve y sayıları tamsayılar.

Olgu 1. $a =_n a$.

Kanıt: $a - a$, yani 0, elbette n 'ye bölünür.

Olgu 2. *Eğer $a =_n b$ ise $b =_n a$ dir.*

Kanıt: Eğer $a - b$ sayısı n 'ye bölünüyorsa, $b - a$ sayısı da n 'ye bölünür.

Olgu 3. *Eğer $a =_n b$ ve $b =_n c$ ise $a =_n c$ dir.*

Kanıt: Eğer $a - b$ ve $b - c$ sayıları n 'ye bölünüyorsa, $a - c$ sayısı da n 'ye bölünür, çünkü $a - c = (a - b) + (b - c)$ dir.

Olgu 4. *Eğer $a =_n x$ ve $b =_n y$ ise $a + b =_n x + y$ dir.*

Kanıt: Eğer $a - x$ ve $b - y$ sayıları n 'ye bölünüyorsa, $(a + b) - (x + y)$ sayısı da n 'ye

bölünür, çünkü $(a+b)-(x+y)=(a-x)+(b-y)$ dir.

Olgu 5. *Eğer $a =_n x$ ve $b =_n y$ ise $ab =_n xy$ dir.*

Kanıt: $ab - xy = a(b-y) + y(a-x)$ olduğundan, ve $a-x$ ve $b-y$ sayıları n 'ye bölündüğünden, $ab-xy$ sayısı da n 'ye bölünür.

Olgu 6. *Eğer $a =_n x$ ise ve $m > 0$ bir tamsayı ise $a^m =_n x^m$ dir.*

Kanıt: Olgu 5 kullanılarak bu olgu kolaylıkla tümevarım yöntemiyle kanıtlanır. Kanıtlayalım. Eğer $m = 1$ ise sorun yok: olgumuzun varsayımına göre $a =_n x$. şimdi bu olgunun m sayısı için geçerli olduğunu varsayalım (tümevarım varsayımı) ve $m+1$ sayısı için kanıtlayalım. Yani tümevarım varsayımımıza göre $a^m =_n x^m$ eşitliğini biliyoruz, ve $a^{m+1} =_n x^{m+1}$ eşitliğini kanıtlamaya çalışacağız. şimdi $a^m =_n x^m$ (tümevarım varsayımı) ve $x =_n a$ (olgumuzun varsayımı) "eşitliklerinden", Olgu 5'i kullanarak,

$$a^{m+1} = a^m a =_n x^m x = x^{m+1}$$

"eşitliğini" buluruz. Olgumuz kanıtlanmıştır.

Alıştırma 1. 17^{25} *sayısı sekize bölündüğünde kaç kalır?*

Yanıt: $17^{25} =_8 1^{25} = 1$ olduğundan kalan birdir.

Alıştırma 2. 17^{25} *sayısı dokuza bölündüğünde kaç kalır?*

Yanıt: $17^{25} =_9 (-1)^{25} = -1 =_9 8$ olduğundan, yanıt sekizdir.

Alıştırma 3. 17^{25} *sayısı yediye bölündüğünde kaç kalır?*

Yanıt: Bu kez çözüm biraz daha zor. önce $17 =_7 3$ olduğundan, $17^{25} =_7 3^{25}$ eşitliğini bulalım. Demek 3^{25} 'i hesaplamalıyız. Sonra

$$3^3 = 27 =_7 -1$$

eşitliğinden

$$3^6 = (3^3)^2 =_7 (-1)^2 = 1$$

eşitliğini çıkaralım. Demek ki

$$3^{25} = 3^{(6\times4)+1} = (3^6)^4 \times 3 =_4 1^4 \times 3 = 3$$

dir, ve dolayısıyla yanıt üçtür.

Alıştırma 4. *m herhangi bir doğal sayı olsun. 10^m üçe yada dokuza bölündüğünde kaç kalır?*

Yanıt: $10 =_3 1$ ve $10 =_9 1$ olduğundan, 10^m sayısı üçe yada dokuza bölündüğünde bir kalır.

şimdi bir sayının üçe ve dokuza bölünebilme yönteminin neden başarılı olduğunu anlayabiliriz.

Herhangi bir sayı alalım. Diyelim 58246309. Ve şimdilik n ya 3 yada 9 olsun. Dördüncü alıştırmayı gözönünde bulundurarak hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned}
58245309 &= \\
&= 5\cdot10^7+8\cdot10^6+2\cdot10^5 \\
&\quad +4\cdot10^4+6\cdot10^3+3\cdot10^2+0\cdot10^1+9 \\
&=_n 5\cdot1^7+8\cdot1^6+2\cdot1^5+4\cdot1^4 \\
&\quad +6\cdot1^3+3\cdot1^2+0\cdot1^1+9 \\
&= 5+8+2+4+6+3+0+9=37.
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi 58245309 sayısı üçe yada dokuza bölündüğünde kalanı, 37'nin kalanına eşit.

Son olarak onbire bölünebilme kuralına bakalım. $10 =_{11} -1$ olduğundan,

$$10^n =_{11} \begin{cases} 1 & = \text{eğer } n \text{ çiftse} \\ -1 & \text{eğer } n \text{ tekse} \end{cases}$$

dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
58245309 & \\
&= 5\cdot10^7+8\cdot10^6+2\cdot10^5+4\cdot10^4+6\cdot10^3 \\
&\quad +3\cdot10^2+0\cdot10^1+9 \\
&=_{11} -5+8-2+4-6+3-0+9=11=_{11} 0
\end{aligned}$$

dir. Demek ki 58245309 sayısı onbire bölünür.