Çözüm :

$$3.2^{3n+4}-7^{2n+1}=3.16.(2^3)^n-7.(7^2)^n$$
$$=48.8^n-7.49^n$$
$$=41.8^n-7.(49^n-8^n)$$
$$=41.8^n-7.41.(49^{n-1}$$
$$+49^{n-2}+\cdots+49.8^{n-1}+8^{n-1})$$

Demek ki $3.2^{3n+4}-7^{2n+1}$ daima 41 e bölünür.

(Çözenler : Y. Emre Topaloğlu, Ediz Tüfekçioğlu, Alparslan Ceran, Osman Nuri Okumuş, Görkem Kuterdem, Hasan Kullap, Volkan Kurtaş, Sefer Baş, Etem Ciliv, Turgay Uçkun, Ruhi Tabur, Banu Yüksel, Burhan Biner, Ömer Civelek, İlyas Küreli, Erhan Gürel, Muammer Keleş, Çetin Camcı, Dursun Bulutoğlu, İsmail Yılmaz, Nesrin Gürbüz, Erol Gedikli, Atasagun Baysal, M. Hikmet Beybağa, Ümit Uzel, Uğur Gül.)

A57. Bir ABC diküçgeninde, (A açısı dik olmak üzere) $[BC]$ doğru parçası, B merkezli ve $|BA|$ yarıçaplı çemberi E noktasında, C merkezli ve $|CA|$ yarıçaplı çemberi de F noktasında kessin. AEF ve ABC üçgenlerinin alanlarının oranını ABC nin çevrel çember ve içteğet çember yarıçapları cinsinden hesaplayınız...(*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm : ABC nin içteğet çember yarıçapını r, çevrel çember yarıçapını da R ile gösterirsek, ABC dik üçgen olduğundan $|BC|=2R$ ve $|CA|+|AB|-|BC|=2r$ dir. (Neden ?)

$$|BC|=|BE|-|EF|+|FC|=|BA|-|EF|+|AC|$$

olduğundan

$$|EF|=|CA|+|AB|-|BC|=2r$$

buradan da

$$\Delta_{AFE}:\Delta_{ABC}=|EF|:|BC|=r:R$$

elde edilir. (Bu problemin asıl metninde ne yazık ki "BC doğru parçası" yerine "BC doğrusu" tabiri kullanıldı. Düzeltir, özür dilerim.)

(Çözenler : Volkan Kurtaş, Turgay Uçkan, Ruhi Tabur, Salim Kahveci, Y. Emre Topaloğlu, Burhan Biner, İlyas Küreli, Erhan Gürel, Dursun Bulutoğlu, Alaattin Aktaş, İsmail Yılmaz, Atasagun Baysal.)

A58. Bir φ ellipsi, φ üzerinde kalmayan A, A' sabit noktaları ve sırasıyla A, A' den geçen birbirlerine paralel, değişken k, k' doğruları verilsin.

$$\varphi\cap k = \{P,Q\}$$
$$\varphi\cap k' = \{P',Q'\}$$

ise

$$\frac{AP\cdot AQ}{A'P'\cdot A'Q'}$$

oranının k (veya k') doğrusunun doğrultusundan bağımsız olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm : φ elipsini

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

denklemiyle gösterelim. A, A' noktalarının koordinatları sırasıyla (ξ,η), (ξ',η') olsun. k doğrusunun (yönlü doğru olarak) x-ekseniyle bir θ açısı yaptığını farzedersek bu doğru üzerindeki genel bir noktanın koordinatları $(\xi+r\cos\theta,\eta+r\sin\theta)$ şeklindedir. AP, AQ miktarları, bu koordinatları elipsin denkleminde yerine koyularak elde edilen

$$\frac{(\xi+r\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(\eta+r\sin\theta)^2}{b^2}=1$$

yani

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)r^2+2\left(\frac{\xi\cos\theta}{a^2}+\frac{\eta\sin^2\theta}{b^2}\right)r$$
$$+\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1=0$$

denkleminin kökleri olup

$$AP.AQ=\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)^{-1}$$

dır. Benzer şekilde

$$A'P'.A'Q'=\left(\frac{\xi'^2}{a^2}+\frac{\eta'^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)^{-1}$$

olduğundan

$$\frac{AP.AQ}{A'P'.A'Q'}=\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\xi'^2}{a^2}+\frac{\eta'^2}{b^2}-1\right)^{-1}$$

olup, θ dan bağımsızdır.

A59. Bir ABC üçgeninde I içteğet çemberin merkezi, H de üç yüksekliğin kesişim noktası(yani "ortosantr") olsun. AI nin IH ye dik olması için $\cos B+\cos C=1$ olmasının gerek ve yeter olduğunu gösteriniz.

Çözüm : Üçgene ait

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R} \qquad (*)$$

özdeşliğini kullanacağız. Bu özdeşliğin doğru olduğu şu şekilde görülebilir :

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2bc} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2bc}$$
$$= \frac{1}{2abc}[a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2)]$$
$$= \frac{1}{2abc}[a((b+c)^2-a^2)+b((c+a)^2-b^2) + c((a+b)^2-c^2)-6abc]$$
$$= -3 + \frac{a+b+c}{2abc}[a(b+c-a)+b(c+a-b) + c(a+b-c)]$$
$$= -3 + \frac{s}{abc}[-(a+b+c)^2+4(ab+bc+ca)]$$
$$= -3 + \frac{4}{abc}[-s^3+s(ab+bc+ca)]$$
$$= -3 + \frac{4}{abc}[s^3-s^2(a+b+c)+s(ab+bc+ca) - abc]+4$$
$$= 1 + \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$$
$$= 1 + \frac{4\Delta^2}{sabc}$$
$$= 1 + \frac{\Delta}{s}\frac{4\Delta}{abc}$$
$$= 1 + \frac{r}{R}$$

Şimdi problemimize dönelim : AIH üçgeninde $\angle(AIH)$ açısının dik olması için gerek ve yeter şart

$$|AH|\cos(\angle(HAI)) = |AI| = \frac{r}{\sin(A/2)}$$

yani

$$2R\cos A\cos(\frac{B-C}{2}) = \frac{r}{\sin(A/2)}$$

dir. Buradan

$$\frac{r}{R} = 2\cos A\cos(\frac{B-C}{2})\sin(A/2)$$
$$= \cos A . 2\cos(\frac{B-C}{2})\cos(\frac{B+C}{2})$$
$$= \cos A(\cos B+\cos C) \qquad (**)$$

elde edilir. (*) ve (**) beraberce

$$\cos B + \cos C = 1$$

denklemini verirler.

(Çözenler : İsmail Yılmaz, Atasagun Baysal.)

A60. $k = 1, 2, \cdots$ olmak üzere 3^k şeklinde hiçbir tamsayının iki tamsayının kareleri toplamı olamayacağını gösteriniz.

Çözüm : Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. 3^k nin iki tamsayının kareleri toplamı olarak ifade edilebileceği en küçük $k \geq 1$ tamsayısını gözönüne alalım. Yani $3^k = x^2+y^2$ şeklinde x, y tamsayıları bulunsun. Böylece

$$x^2+y^2 \equiv 0(\text{mod}3)$$

tür. Buradan

$$x^2 \equiv y^2 \equiv 0(\text{mod}3)$$

ve

$$x \equiv y \equiv 0(\text{mod}3)$$

bulunur. Demek ki $x = 3m$, $y = 3n$ olacak şekilde m, n tamsayıları bulunabilir. O zaman da

$$3^k = x^2+y^2 = 3^2(m^2+n^2)$$

yani

$$3^{k-2} = m^2+n^2$$

bulunur ki bu k nin yukarda belirtilen özelliğe sahip 1 den büyük en küçük tamsayı olduğu varsayımıyla çelişir.

(Çözenler : Etem Ciliv, Sefer Baş, Y. Emre Topaloğlu, İlyas Küreli, Dursun Bulutoğlu İsmail Yılmaz, Atasagun Baysal, Ümit Uzel.)

Y56. Her $n = 0, 1, 2, \cdots$ için $2^{5n+1}+5^{n+2}$ sayısının 27 ye bölündüğünü gösteriniz.

Çözüm :

$$2^{5n+1}+5^{n+2} = 2.32^n + 25.5^n = 2.(27+5)^n + 2.5^n$$

olup, en sağdaki ilk parantezin açılmasıyla elde edilen ilk n terim 27 nin katı olduğundan

$$2^{5n+1}+5^{n+2} = 27A + 2.5^n + 25.5^n$$

olacak şekilde bir A tamsayısı bulunabilir. Yani

$$2^{5n+1}+5^{n+2} = 27A + 27.5^n$$

olup $2^{5n+1}+5^{n+2}$ daima 27 nin bir katıdır.

(Çözenler : Ediz Tüfekçioğlu, Alparslan Ceran, Osman Nuri Okumuş, Görkem Kuterdem, Hasan Kullap, Volkan Kurtaş, Sefer Baş, Etem Ciliv Çağkan Erbaş, Turgay Uçkan, Ruhi Tabur, Banu Yüksel, Y. Emre Topaloğlu, Burhan Biner, Fırat Aydın, Ömer Civelek, İlyas Küreli, Erhan Gürel, Muammer Keleş, Emre Alkan, Çetin Camcı,Dursun Bulutoğlu, Nesrin Gürbüz, Erol Gedikli, Atasagun Baysal, M. Hikmet Beybağa, Ümit Uzel, Uğur Gül.)

Y57. Bir elips üzerinde alınan değişken bir X noktasından elipse çizilen normal elipsi ikinci defa bir Y noktasında kessin. $|XY|$ uzunluğu X noktasının hangi konumlarında en küçük değerini alır ? (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm : Bu ilginç, ilginç olduğu kadar da zor bir problem. Çözümü bazı hesapları kısaltarak sunuyorum : Sözkonusu elips $a > b$ olmak üzere

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denlemiyle verilmiş olsun. Bu suretle a elipsin büyük yarıçapını, b de küçük yarıçapını temsil etmektedir. Geleneğe uyarak odaklar arasındaki uzaklığı $2c$ ile gösterelim ve $c^2 = a^2 - b^2$ olduğunu hatırlayalım. Bu eğrinin üzerindeki herhangi bir nokta $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ şeklinde yazılabilir. Böyle bir noktadaki normalin denklemi de

$$\frac{x - a\cos\theta}{b\cos\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{a\sin\theta}$$

dir. Bu normalin elipsi ikinci defa kestiği Y noktasının koordinatlarını (x', y') ile gösterirsek,

$$x' = \frac{a\cos\theta[a^2(a^2 - 2b^2)\sin^2\theta - b^4\cos^2\theta]}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}$$

$$y' = \frac{b\sin\theta[b^2(b^2 - 2a^2)\cos^2\theta - a^4\sin^2\theta]}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}$$

elde edilir. Kolaylık olmak üzere

$$N = N(\theta) = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$

$$D = D(\theta) = a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta$$

yazarak,

$$|XY|^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = \frac{4a^2b^2N^3}{D^2}$$

bulunur. Şimdi de bu (hiç bir zaman sıfır olmayan) miktarın θ ya göre türevini alalım :

$$\frac{d}{d\theta}(|XY|^2) = 4a^2b^2\left[\frac{3N^2}{D^2}\frac{dN}{d\theta} - \frac{2N^2}{D^3}\frac{dD}{d\theta}\right]$$

$$= \frac{4a^2b^2N^2}{D^3}\left[3D\frac{dN}{d\theta} - 2N\frac{dD}{d\theta}\right]$$

Demek ki bu türevin sıfır olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$3D\frac{dN}{d\theta} - 2N\frac{dD}{d\theta} = 0$$

olup, birkaç kısaltmadan sonra

$$\sin\theta\cos\theta[3D - 2(a^2 + b^2)N] = 0 \qquad (*)$$

dır. (*) denkleminin kökleri $|XY|$ nin yerel olarak nerede ekstrem değerler aldığını incelemekte kullanılabilir. Tabii ki $0 \le \theta \le \pi/2$ aralığını incelemek yeter. (*) denkleminin sol tarafındaki ilk iki çarpan $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$ basit çözümlerini verecektir. Tabii ki $|XY|_{\theta=0} = 2a$, $|XY|_{\theta=\pi/2} = 2b$ dir. (*) denkleminin sol tarafındaki üçüncü çarpanın kökü θ_3 ise, biraz meşakkatli hesaplar neticesinde,

$$\sin^2\theta_3 = \frac{b^2}{c^2}\frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2}$$

veyahut bununla tamamen eşdeğer olmak üzere

$$\cos^2\theta_3 = \frac{a^2}{c^2}\frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

şeklinde, dolaylı olarak, bulunur. Tabii $-1 \le \sin\theta_3 \le 1$ olduğundan, bu çözümler ancak $b < c$ veyahut $a > b\sqrt{2}$ halinde mümkündür. En son olarak da $a > b\sqrt{2}$ halinde θ_3 ün mutlak bir minimum noktası teşkil ettiğini görelim : Küçük bir hesapla,

$$N(\theta_3) = \frac{3a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

ve

$$D(\theta_3) = 2a^2b^2$$

ve en nihayet de

$$\delta = |XY|_{\theta=\theta_3} = \frac{\sqrt{27}a^2b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

olacaktır. Bu ifadenin alabileceği en büyük değer $2b$ olup, bu da ancak $a = b\sqrt{2}$ olması halinde mümkündür. Demek ki sözkonusu elipsin bir ucunda elipse dik olan kirişlerinin uzunluklarının en küçük değeri

$$|XY|_{min} = \min\left[2b\ ,\ \frac{\sqrt{27}a^2b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

olmalıdır.

Y58. Ortak bir O sınır noktası bulunan $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ yarı doğrularını gözönüne alalım. $\underline{b}$ yarıdoğrusu $\underline{a}$ ve $\underline{c}$ yarıdoğruları arasında olmak üzere $| < (\underline{a}, \underline{b})| = | < (\underline{b}, \underline{c})| = 60^\circ$ olsun. Sırasıyla $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ üzerinde herhangi A, B, C noktaları için

$$|OA| - |OB| + |OC| \leq |AB| + |BC|$$

olduğunu gösteriniz. (*Cem TEZER*)

Çözüm : OC doğrusu üzerinde, O noktası A' ve C arasında kalacak ve $|OA'| = |OA|$ olacak şekilde bir A' noktası, $\underline{a}$ yarıdoğrusu üzerinde de $|OB'| = |OB|$ olacak şekilde bir B' noktası alalım. $OA'B'$ ve OAB üçgenleri eşit, $OB'B$ üçgeni de eşkenar olduğundan $|A'B'| = |AB|$ ve

$$|OB| = |OB'| = |BB'|$$

olup,

$$\begin{aligned} |OA| + |OC| &= |OA'| + |OC| = |A'C| \\ &\leq |A'B'| + |B'B| + |BC| \\ &= |AB| + |OB| + |BC| \end{aligned}$$

bundan da

$$|OA| - |OB| + |OC| \leq |AB| + |BC|$$

bulunur.

(Çözenler : Turgay Uçkun, Ruhi Tabur, Burhan Biner, Fırat Aydın, İlyas Küreli, Erhan Gürel, Emre Alkan, Atasagun Baysal.)

Y59. ABC ve $A'B'C'$ üçgenleri verilmiş olsun. A, B, C noktalarından sırasıyla $B'C', C'A', A'B'$ doğrularına indirilen dikmeler noktadaşlarsa (yani aynı bir noktadan geçerlerse), A', B', C' noktalarından sırasıyla BC, CA, AB doğrularına indirilen dikmeler de noktadaştır. (*Cem TEZER*)

Çözüm : Problemi vektörlerin iç çarpımını kullanarak çözeceğiz. A, B, C noktalarından sırasıyla $B'C', C'A', A'B'$ doğrularına indirilen dikmeler bir S noktasında kesiştiği takdirde

$$\begin{aligned} (S-A).(B'-C') &= 0 \\ (S-B).(C'-A') &= 0 \\ (S-C).(A'-B') &= 0 \end{aligned}$$

bu denklemleri toplayarak da

$$A(B'-C') + B(C'-A') + C(A'-B') = 0$$

veyahut

$$A'(B-C) + B'(C-A) + C'(A-B) = 0$$

elde edilir. Eğer A', B' noktalarından sırasıyla BC, CA doğrularına indirilen dikmeler bir S' noktasında kesişirse

$$\begin{aligned} (S'-A').(B-C) &= 0 \\ (S'-B').(C-A) &= 0 \end{aligned}$$

Bu iki denklemin toplamını da (*) dan çıkartmak suretiyle de

$$(S'-C').(A-B) = 0$$

elde edilir ki, bu C' dan AB ye indirilen dikmenin de S' den geçtiğini gösterir.

(Çözenler : Etem Ciliv, Emre Alkan.)

Y60. α sıfırdan farklı herhangi bir gerçel sayı olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & \alpha^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 2 & \alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 2 \end{bmatrix}$$

şeklindeki 1993×1993 matrisin determinantını bulunuz. (*Cemal KOÇ*)

Çözüm : $n \times n$ bir

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & \alpha^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 2 & \alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını D_n ile gösterelim. D_{1993} ü bulmak istiyoruz. $D_1 = 2$ ve $D_2 = 3$ olduğu kolaylıkla görülebilir. $n \geq 2$ için $n \times n$ matrisin birinci satırına göre açarak

$$D_n = 2D_{n-1} - \frac{1}{\alpha}\alpha D_{n-2} = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

buradan da tümevarım kullanılarak

$$D_n = n + 1$$

elde edilir. Bu suretle

$$D_{1993} = 1994$$

bulunur.

(Çözenler : Görkem Kuterdem, Ruhi Tabur, Fırat Aydın, İlyas Küreli, Erhan Gürel, Emre Alkan, Çetin Camcı, Dursun Bulutoğlu, Erol Gedikli, Atasagun Baysal, Koray Tuna.)