ARİTMETİK TARİHİNE BAKIŞ - II

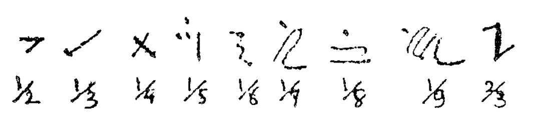
DOĞAN DÖNMEZ*, FİKRİ AKDENİZ*

GİRİŞ:

Bu yazımızda tarihin ilk çağlarından orta çağlara kadar değişik uygarlıklarda kesirli sayılar ve temel işlemler hakkında bazı bilgiler vereceğiz.

Kesirli Sayılar:

Mısırlılar: Mısırlılar birim kesirler (payı 1 olan kesirler) ve bir istisna olarak 2/3 kesri için semboller kullanıyorlardı. Birim kesirlerin çoğu paydadaki sayıyı gösteren sembolün üzerine bir nokta koyarak gösteriliyordu (Şekil 1).



Şekil 1. Mısırlılarda kesirli sayılar

Diğer kesirleri de farklı birim kesirlerin toplamı şeklinde ifade edip araya bir işaret koymadan yanyana yazıyorlardı. Örneğin, 3/4 kesri

$$\frac{1}{2}\frac{1}{4} \quad \text{veya} \quad \frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{6} \quad \text{ya da} \quad \frac{2}{3}\frac{1}{12}$$

şeklinde;

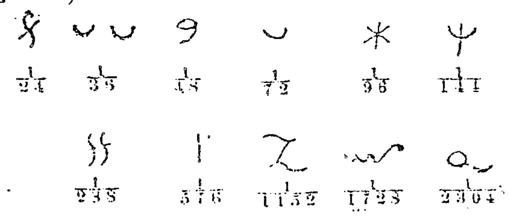
$$\frac{5}{8} \text{ kesri } \frac{1}{2}\frac{1}{8} \text{ şeklinde } \frac{7}{8} \text{ kesri } \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}$$

şeklinde yazılıyordu. Görüldüğü gibi bir kesrin birden fazla yazılış şekli vardı. Mısır papirüsleri arasında payı 2, paydası ise 5 ile 99 arasında bir tek sayı olan kesirlerin birim kesirler cinsinden ifadelerini gösteren bir tablo bulunmuştur. Örneğin, burada 2/5 kesri 1/3 1/15 şeklinde gösteriliyordu. Bu tablonun toplamada kullanılışını sonraki kısımda göreceğiz.

Babilliler: Babilliler kesirli sayıların zorluklarından kurtulmak amacıyla "Altmışlık kesir" diye adlandırılabilecek, paydası 60 veya 60'ın kuvvetleri olan kesirlerle yetindiler. 1 saati 60 dakikaya, 1 dakikayı 60 saniyeye, çemberi 360 dereceye ve 1 dereceyi 60 dakikaya bölerken bu kesirleri kullandılar. Sayıları göstermek için de 60 tabanına çok benzeyen bir sistem geliştirdiler.

Yunanlılar: Yunanlılar hem birim kesirleri, hem 60'lı kesirleri hem de bildiğimiz bayağı kesirleri kullanıyorlardı. Bayağı kesirleri göstermek için payın üzerine bir üs, paydanın üzerine iki üs kullanıyorlardı. Birim kesirlerde ise yalnızca paydayı yazıp bir üsle yetiniyorlardı. Bazen de paydayı bizim üs yazdığımız yere yazdıkları da olmuştur. Yunanlılar da (Mısırlılar gibi) 2/3 için özel bir sembol kullandılar.

Romalılar: Romalılar da Babillilerinkine benzer fakat 60 yerine 12 kullanılan bir sistem geliştirdiler. Romalıların sisteminde 1/12 den 11/12 ye kadar olan kesirler ve $1/24, 1/36, 1/48, 1/96, 1/144, \ldots, 1/576$ ve daha küçük kesirler için özel ad ve semboller kullandılar (Şekil 2).



Şekil 2. Romalılarda kesirli sayılar

Diğer kesirleri bunların tam sayı katları olarak gösteren tablolar hazırladılar. Kullanımındaki güçlüklere karşın bu sistem 10-13. yüzyıllar arasında öğretilmiştir.

Hindular ve Araplar: Hindular kesirleri bugünküne çok benzer bir şekilde göstermişlerdi. Şimdiki gösterimden farkı bölme çizgisi kullanılmaması ve bileşik kesirlerde tam sayı kısmının da en üste yazılmasıydı. Örneğin;

$$\begin{matrix} 8 \\ 3 \\ 11 \end{matrix} \; ; \; 8\tfrac{3}{11} \quad \text{sayısını gösteriyordu.}$$

Araplar da bu sistemi kullanmaya başlamış ve bugünkü adı da Arapçada 'kırmak' anlamına

* Çukurova Üniversitesi, Matematik Bölümü öğretim üyeleri

gelen "al-kasr" adını vermişlerdir. Bu Latince ve diğer batı dillerine de tercüme edilmiştir. Dilimizde ise kesir şekline dönüşmüştür.

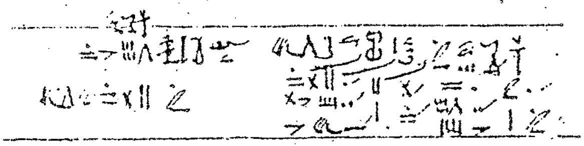
Ondalık kesirler ise çok sonraları kullanılmaya başlanmıştır. Babillilerden kalma 60'lık sistemde kullanılan üs ve çift üs bazılarınca 10 tabanına uygulandı. 14. yüzyılda Johannis de Muris $\sqrt{2}$ nin yaklaşık değerini 1.4.1.4 olarak yazmış, "burada, 1 tam kısmı, birinci 4 onda birlikleri, ikinci 1 onda birliğin onda birliklerini, ikinci 4 onda birliğin onda birliğinin onda birliklerini gösteriyor" diye açıklamıştır. Ayrıca, aynı sayıyı 20'lik ve 60'lık kesirler kullanarak göstermiştir.

Batıda ondalık kesirlerin sistemli olarak kullanılması 15-16. yüzyılda ortaya çıktı. Pellizzati bir problemde ondalık kesri tamsayıdan ayırmak için nokta kullandıysa da başka yerlerde bunu kullanmamıştır. Christian Rudolff ise düşey bir çizgi kullandı. 1585'de Flaman Simon Stevin 'La Thiende' adlı kitabında tamsayılardan sonra 0 ondalık kesirlerin basamakları arasına sırasıyla 1 2 3 vs. kullanmıştır. Bazen de aynı kitapta bu sembolleri basamakların alt veya üstüne yazmıştır.

1616'da Napier'in logaritma konusunda yazdığı kitapta bugün (Amerika ve İngiltere'de) kullanıldığı şekilde nokta tam sayıyı ondalık kesirden ayırmak için kullanılmıştır. Bazıları nokta yerine başka semboller (örneğin köşeli parantez) kullandılarsa da 18. yüzyıldan sonra ABD ve İngiltere'de nokta (Avrupa ana kıtası ve Doğuda virgül) kullanılması yerleşti.

Aritmetik İşlemler:

Mısırlılar: M.Ö., 17. yüzyıldan kalma olduğu sanılan Rhind (veya Ahemesu veya Ahmes) papirüsünde toplama ve çıkarma için Şekil 3'de alt yazıda gösterilen sembolleri kullanmışlardır.



Şekil 3. Ahmes papirüsünde bir cebir problemi

Çarpma işlemi ise sayılardan birinin $1, 2, 4, 8, \ldots$ (gerekiyorsa $1/2, 1/4, 1/8, \ldots$) katlarını hesaplayıp bunlardan uygun olanlarının toplanması şeklinde yapılıyordu. Örneğin;

$$37 \times 11\frac{5}{8} \text{ işlemi;}$$

$$\begin{array}{llll l}
37 & 1' & 18\frac{1}{2} & \frac{1'}{2} & \\
74 & 2' & 9\frac{1}{4} & \frac{1'}{4} & 37 \times 11\frac{5}{8} = 430\frac{1}{8} \\
148 & 4 & & & \\
296 & 8' & 4\frac{1}{2}\frac{1}{8} & \frac{1'}{8} &
\end{array}$$

şeklinde yapılıyordu (burada üsler sayının hangi katlarının kullanıldığını gösteriyor).

Bölme işlemi de benzer yöntemle bölenin $2, 4, 8, \ldots$ ve $1/2, 1/4, \ldots$ katları bulunup bunların hangilerinin toplamının bölüneni vereceği bulunarak yapılıyordu. Örneğin aynı papirusta "Kendisine yedide biri eklendiğinde 19 eden sayı kaçtır?" probleminin çözümü (Şekil 3) bugünkü sayılarla yazılışı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{llllllllll}
\frac{1}{4}\frac{1}{2}16 & 1' & \frac{1}{8}\frac{1}{4}2 & 1' & 2 & \frac{1'}{4} & 8 & 1 & 7 & 1' \\
 & & & & & & 16 & 2' & & \\
19 : \frac{1}{8}\frac{1}{4}2 & \frac{1'}{7} & \frac{1}{4}\frac{1}{2}4 & 2' & 1 & \frac{1'}{8} & 4 & \frac{1}{2} & 1\frac{1'}{7} & \\
 & & \frac{1}{2}9 & 4' & & & & & &
\end{array}$$

(Eski Mısır'da da yazı sağdan sola doğru yazılırdı.)

En sağ sütundaki 7 ve 1 toplanıp sağdan ikinci sütundaki 8 sayısı bulunuyor. Sağdan ikinci ve üçüncü sütunlarda 19 ve 8'e bölünüyor, bölüm ($\frac{1}{8}\frac{1}{4}2 = 2\frac{3}{8}$) soldan ikinci sütunda görülüyor. (Aranan sayının yedide birine x dersek, $8x = 19$ elde ediliyor). Soldan ikinci sütunda 7 ile $2\frac{3}{8}$ çarpılıp, sol üst köşedeki $\frac{1}{4}\frac{1}{2}16$ yani; $16\frac{5}{8}$ yanıtı bulunuyor.

Kesirli sayıları toplarken, daha önce bahsedilen bazı kesirli sayıları basit kesirlerin toplamı olarak ifade eden tablo, aşağıdaki işlemde görüldüğü gibi kullanılmış olmalıdır.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{7}\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{7}\frac{1}{4}\right) &= \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \\
&= \left(\frac{2}{7}\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right) + \\
&\quad \frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{28} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{28} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{28} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{28}\frac{1}{3}\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Babiller: M.Ö. 3500-3000 yıllarına ait olduğu sanılan bir kil tablette 59 × 59'a kadar çarpım tablosu bulunmuştur. Bu tabloda bütün çarpımlar verilmemiş, örneğin $18 \times 1, 18 \times 2, \ldots, 18 \times 20$ den sonra $18 \times 30, 18 \times 40, 18 \times 50$ çarpımları verilmiş ve diğer çarpımların bunlardan elde edileceği varsayılmıştır.

Hintliler: Avrupa'da çarpma için kullanılan ilk yöntemler eski Hint yöntemlerinin aynısıdır. 7. yüzyılda Brahmagupta, 9. yüzyılda Mahaviracerya ve 11. yüzyılda Bhaskara tarafından yazılan kitaplarda aritmetik işlemler detaylı olarak anlatılmıştır. Bhaskara'nın kitabında bayağı kesirlerin dört işlemi aynen bugünkü şekliyle anlatılmıştır.

Avrupa'da aritmetik işlemler ve günümüzdeki şekle gelişi: Tamsayılar arasındaki işlemlerin bugünkü şekline gelmesi de pek kolay olmamıştır. Toplama önceleri aşağıdaki örnekteki gibi yapılır ve bu işlem sırasında toplanan sayıların gereksiz basamakları yavaş yavaş kaybolup sonuçta geriye yalnız toplam kalırdı:

826	829	909	1309
483	48	4	

Çıkarma da benzer şekilde yapılırdı. Bu işlemler 15. yüzyıldan sonra bugünkü şeklini almıştır.

Çarpma da adım adım yapılır ve çarpanlardan biri yavaş yavaş değişip çarpım haline dönüşür, diğer çarpan ise her adımda bir basamak sağa kayardı. 1450 yılında yazılmış "The Crafte of Nombrynge" kitabı aşağıdaki çarpma işlemini veriyor.

a)	2465 232	b)	**464465** 232	c)	**1** **82** 464865 232
d)	**11** **121** **828** 464825 232	e)	**11** **110** 1211 8285 464820	f)	571880

Burada 2465 sayısının soldan ilk rakamı 232 ile çarpılıp bulunan sayı (464), ilk çarpanın başına yazılıyor (2 siliniyor). Daha sonra 232 sayısı bir basamak sağa kaydırılıp son rakamın üstündeki sayı ile (4) çarpılıp 4 yerine $8 = 4 \times 2$ yazılıyor. 4×3 ve 4×2 ise yukarıya uygun basamaklara yazılıyor ve bu şekilde devam edilip sonunda bulunan sayılar toplanıyor. 16. yüzyıldan sonra çarpma bugünkü şekliyle yapılmaya başlandı.

Bölme için de 1542'de basılmış "The Grounde of Artes" adlı kitap öneriliyor. 7656 sayısı 29'a aşağıdaki adımlarla bölünüyor.

7656 29	3656 9 2	1856 2	1856 29 2	1656 9 26
116 26	116 29 26	116 29 264	36 9 264	 264

Aynı işlem aynı kitapta "karalama" yöntemiyle aşağıdaki şekilde yapılıyor:

  7656 29	 3 7656 (2 29	1 38 7656 (2 29	
 16 38 7656 (26 299 2	1 16 381 7656 (26 299 2	1 16 381 7656 (264 2999 22	1 163 381 7656 (264 2999 22

Her iki işlemde de aynı adımlarla bölümün bir basamağı bölenin bir basamağı ile çarpılıp bölünenin uygun basamağından çıkarılıyor; birincide eski basamak tamamen silinirken ikincide karalanıp yukarıya kısmı kalan yazılıyor. 'Karalama' yönteminin sık kullanılması, hata yapıldığında (eski rakamların hala görülüyor olması nedeniyle) düzeltmenin mümkün olmasından dolayı olmalı. Bu yöntemde bölümün her basamağı bölenin bir tek basamağı değil de tümüyle çarpılınca ve çıkarma işlemleri açıkça yazılınca bugün kullanılan bölme işlemi ortaya çıkıyor.

Bütün bunları görünce çağımız öğrencilerinin eski çağlardaki öğrencilere kıyasla ne kadar şanslı oldukları belli olmuyor mu?