ÇÖZÜMLER

DEĞERLENDİREN : CEM TEZER*

A51. U ve V noktalarında kesişen α ve β çemberleri verilmiş olsun. U noktasından geçen değişken bir k doğrusu α ve β çemberlerini sırasıyla E ve F noktalarında kessin. $[EF]$ doğru parçasının orta noktasının geometrik yerini bulunuz...

Çözüm : $[US]$, $[UT]$ sırasıyla α, β nın birer çapını teşkil etmek üzere $S \in \alpha$, $T \in \beta$ noktalarını alalım. $<(UF, FT) = <(UE, ES) = \pi/2$ dir. $[ST]$ nin orta noktasını M, $[EF]$ nin ortanoktasını da G ile gösterirsek $<(UG, GM) = \pi/2$ olduğundan, G nin geometrik yeri $[UM]$ çaplı çember olmalıdır. (**Çözenler :** Ümit Uzel, Alaattin Aktaş)

A52. $a, b, c > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} ax + by + cxy &= a + b + c \\ by + cz + ayz &= a + b + c \\ cz + ax + bzx &= a + b + c \end{aligned}$$

denklem sisteminin $x, y, z \geq 0$ olacak şekilde bir tek çözümü olduğunu gösteriniz, bu çözümü bulunuz.

Çözüm : $x > 1, y > 1, z > 1$ olamayacağı aşikardır. Aynı şekilde $x < 1, y < 1, z < 1$ de imkansızdır. Diğer taraftan, x, y, z den herhangi birinin 1 e eşit olması halinde diğerleri de 1 e eşit olmalıdır. $x < 1 < z$ ve $y \neq 1$ farzedersek $y < 1$ halinde birinci denklem, $y > 1$ halinde de ikinci denklem sağlanamaz. Aynı şekilde $z < 1 < x$ ve $y \neq 1$ de çelişkiye yol açacaktır. Demek ki $y = 1$ ve $x = z = 1$ olmalıdır. (**Çözenler :** Ruhi Tabur, Funda Baykara)

A53. Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde $[AD]$ ve $[BC]$ kirişlerinin ortadikmeleri, AC ve BD köşegenlerini sırasıyla E ve F noktalarında keserse, EF nin AB ye paralel olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm : AC ve BD, K de kesişsin. (Kesişmezse ?) AKD ve BKC üçgenleri benzer olduğundan, sözkonusu ortadikmeler $[AK]$ yi ve $[BK]$ yi aynı oranda bölerler; yani $EA : EK = FB : FK$ dir. Böylece EF, AB ye paralel olmalıdır. (**Çözenler :** E. Ciliv, Alaattin Aktaş, Yaşar Kandur)

A54. $1, x, x^2$ sayıları bir üçgenin kenar uzunluklarını temsil edebilecek şekildeki bütün x gerçel sayılarını bulunuz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm : Üç artı miktarın bir üçgenin kenar uzunluklarını temsil edebilmeleri için gerek ve yeter şart, bunlardan en büyüğünün, diğer ikisinin toplamından küçük olmasıdır. Yani

$$x > 1 \quad \text{halinde} \quad x^2 < x + 1$$

$$x < 1 \quad \text{halinde} \quad 1 < x + x^2$$

olmalıdır. Bu eşitsizlikleri $x > 0$ hatırlanarak çözmek ve bunlara da $x = x^2 = 1$ hali de eklenerek $1, x, x^2$ miktarlarının bir üçgenin kenar uzunluklarını temsil etmesi için gerek ve yeter şartın

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < x < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

olduğu görülebilir. (**Çözenler :** R. Tabur, B. Yüksel, S. Kahveci, Burhan Biner)

A55. Her biri diğer ikisine dik üç birim yarıçaplı çemberin üçünün de içinde kalan noktaların teşkil ettiği bölgenin alanını bulunuz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm : Sözkonusu çemberlerin merkezleri, her bir kenarı $\sqrt{2}$ uzunluğunda olan bir eşkenar üçgenin köşelerini teşkil ederler. Elimizdeki üç çember, bu üçgeni yedi parçaya ayırır. Bunlardan, üçgenin köşelerinde kalan, yani ikişer doğru ve ikişer çemberle sınırlandırılan üç eşit parçanın her birinin alanına x, üçgenin kenarlarına komşu olan, yani her biri birer doğru ve üçer çemberle sınırlandırılan üç eşit parçanın her birinin alanına da y diyelim. En nihayet, üç çemberin de içinde kalan ve alanını bulmak istediğimiz yedinci parçanın alanını z ile gösterirsek,

$$3x + 3y + z = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x + y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$2y + 2z = \frac{\pi}{2} - 1$$

bulunur. (Neden ?) İkinci ve üçüncü denklemlerden

$$2(x+y)+z=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\pi}{12}$$

ve $x+y$ yi z cinsinden birinci denklemde yerine koyarak

$$z=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}$$

elde edilir.

Y51. Odakları F, F' olan bir elips üzerinde FP ve $F'P'$ paralel olacak şekilde alınan değişken P ve P' noktalarından elipse çizilen teğetlerin kesişme noktalarının geometrik yerini bulunuz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm : P, P' noktaları elipsin büyük ekseninin aynı tarafında kalmalıdır. (Aksi takdirde bunlar elipsin merkezine göre bakışık olup, söz konusu teğetlerin kesişmesi mümkün olmaz.) P, P' den geçen teğetleri sırasıyla t, t' ile gösterelim.

F nin t' deki yansıması, $F'P'$ üzerinde kalan bir M, F' nün t deki yansıması da FP üzerinde kalan bir M' noktasıdır. $|FM'| = |F'M|$ uzunlukları elipsin büyük çapına eşit olup, $FF'MM'$ bir paralelkenardır. t, t' teğetleri sırasıyla $[F'M']$, $[FM]$ doğruparçalarının ortadikmeleridirler. Demek ki t, t' , $FF'MM'$ paralelkenarının merkezinde kesişmektedirler. M' noktasının geometrik yeri F merkezli, yarıçapı elipsin büyük çapına eşit bir çember olduğuna göre, t ve t' nün kesim noktasının geometrik yeri, elipsin büyük çapını çap kabul eden çember olmalıdır. (**Çözenler :** H. Kullap, Ümit Uzel, Alaattin Aktaş, Çetin Camcı)

Y52. Bir $ABCD$ teğetler dörtgeninde $[AC]$ ve $[BD]$ köşegen doğru parçalarının orta noktalarının ve içteğet çemberin merkezinin doğrudaş olduklarını gösteriniz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm : $[AC], [BD]$ doğruparçalarının ortanoktalarını sırasıyla E, F ile, dörtgenin içteğet çemberinin yarıçapını r, merkezini I ve herhangi bir UVW üçgeninin alanını da Δ_{UVW} ile gösterelim. Bir yardımcı teorem kullanacağız :

Yardımcı Teorem : $\Delta_{XAB}+\Delta_{XCD}=$ sabit şeklindeki X noktalarının geometrik yeri bir doğrudur.

İspat : AB ve CD doğruları bir T noktasında kesişsin. (Kesişmezse ?) TC üzerinde $|TQ|=|DC|$, TB üzerinde de $|TP|=|AB|$ olacak şekilde P, Q noktaları alalım. Kolaylıkla

$$\begin{aligned}\Delta_{XQP}&=\Delta_{XQT}+\Delta_{XTP}-\Delta_{QPT}\\&=\Delta_{XCD}+\Delta_{XAB}-\Delta_{QPT}=\text{sabit}\end{aligned}$$

bulunur. Demek ki X in geometrik yeri PQ ya paralel bir doğrudur.

Şimdi problemimize dönelim : $\Delta_{EAB}+\Delta_{ECD}$ ve $\Delta_{FAB}+\Delta_{FCD}$ miktarlarının herbirinin dörtgenin alanının yarısına eşit olduğu aşikardır. $ABCD$ bir teğetler dörtgeni olduğundan

$$|AB|+|CD|=|BC|+|DA|$$

olduğunu biliyoruz. Bundan yararlanarak

$$\begin{aligned}\Delta_{IAB}+\Delta_{ICD}&=\frac{r}{2}(|AB|+|CD|)\\&=\frac{r}{2}(|AC|+|BD|)\\&=\Delta_{IBC}+\Delta_{IDA}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Demek ki $\Delta_{IAB}+\Delta_{ICD}$ de dörtgenin alanının yarısına eşit olup, E, F, I noktaları doğrudaştır.

Y53. $2^{33}-2^{19}-2^{17}-1$ in 1000 ile 5000 arasında bir çarpanı olduğunu gösterip, bu çarpanı bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned}A&=2^{33}-2^{19}-2^{17}-1\\&=(2^{11})^3-(2^6)^3-1-3.2^{11}.2^6.1\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}&x^3-y^3-z^3-3xyz\\&=(x-y-z)(x^2+y^2+z^2-yz+zx+xy)\end{aligned}$$

özdeşliğinden $2^{11}-2^6-1=1983$ ün A nın bir çarpanı olduğu görülür.

Y54. Yarıçapları r_1, r_2, r_3 olan $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ çemberleri ,

$$\gamma_2\cap\gamma_3=\{O, A_1\}$$
$$\gamma_3\cap\gamma_1=\{O, A_2\}$$
$$\gamma_1\cap\gamma_2=\{O, A_3\}$$

olacak ve O noktası $A_1A_2A_3$ üçgeninin içinde kalacak şekilde kesiştikleri takdirde

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\le\frac{1}{|OA_1|}+\frac{1}{|OA_2|}+\frac{1}{|OA_3|}$$

olduğunu ve eşitliğin ancak $A_1A_2A_3$ üçgeninin eşkenar ve

$$r_1 = r_2 = r_3$$

olması halinde mümkün olduğunu gösteriniz. (*Cem TEZER*)

Çözüm : Merkezi O, kuvveti k olan bir evirtim alalım. Herhangi bir X geometrik nesnesinin bu evirtim altındaki görüntüsünü X^* la gösterelim. Sırasıyla γ_1, γ_2, γ_3 çemberleri üzerinde $[OZ_1]$, $[OZ_2]$, $[OZ_3]$ birer çap teşkil edecek şekilde Z_1, Z_2, Z_3 noktaları alalım. Sözkonusu evirtim altında, γ_1, γ_2, γ_3 çemberleri sırasıyla $A_2^*A_3^*$, $A_3^*A_1^*$, $A_1^*A_2^*$ doğrularına dönüşür; bu doğrulara O noktasından indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla Z_1^*, Z_2^*, Z_3^* dır. O noktası $A_1^*A_2^*A_3^*$ üçgeninin içinde kaldığından Erdös - Mordell teoremi (Matematik Dünyası Cilt 1, Sayı 5) uygulanarak

$$2(|OZ_1^*|+|OZ_2^*|+|OZ_3^*|) \leq |OA_1^*|+|OA_2^*|+|OA_3^*|$$

bundan da

$$2(\frac{k}{|OZ_1|}+\frac{k}{|OZ_2|}+\frac{k}{|OZ_3|}) \leq \frac{k}{|OA_1|}+\frac{k}{|OA_2|}+\frac{k}{|OA_3|}$$

ve nihayet $i = 1,2,3 \cdots$ için $|OZ_i| = 2r_i$ olduğu hatırlanarak

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3} \leq \frac{1}{|OA_1|}+\frac{1}{|OA_2|}+\frac{1}{|OA_3|}$$

elde edilir. Eşitlik haline ait gözlem Erdös - Mordell teoremindeki eşitlik halinin doğrudan neticesidir. (**Çözenler :** Çetin Camcı)

Y55. Bir ABC üçgeninde ağırlık merkezi G olsun. GA, GB, GC doğruları üçgenin çevrel çemberini sırasıyla A ve X, B ve Y, C ve Z noktalarında keserse

$$\frac{|GA|}{|GX|}+\frac{|GB|}{|GY|}+\frac{|GC|}{|GZ|} = 3$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm : A dan geçen kenarortayın uzunluğunu m ile, karşı kenarı kestiği noktayı da D ile gösterirsek, D noktasının üçgenin çevrel çemberine göre kuvvetinden

$$m.|DX| = \frac{a^2}{4}$$

kenarortay teoreminden de

$$4m^2 = 2(b^2+c^2) - a^2$$

bulunur. Böylece

$$\frac{|GA|}{|GX|} = \frac{2}{3}\frac{m}{(m/3)+|DX|}$$

$$= \frac{2m}{m+3|DX|} = \frac{2m^2}{m^2+3m|DX|}$$

$$= \frac{8m^2}{4m^2+3a^2} = \frac{8m^2}{2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{2(b^2+c^2)-}{a^2+b^2+}$$

benzer şekilde de

$$\frac{|GB|}{|GY|} = \frac{2(c^2+a^2)-b^2}{a^2+b^2+c^2}$$

ve

$$\frac{|GC|}{|GZ|} = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

elde edilerek

$$\frac{|GA|}{|GX|}+\frac{|GB|}{|GY|}+\frac{|GC|}{|GZ|} = 3$$

bulunur.

(**Çözenler :** R. Tabur, S. Kahveci, H Çetinkaya, Çetin Camcı, Emre Alkan, Yaşar Kandur)

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

2 Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

3. Çözümleri, Cem Tezer, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531 ANKARA adresine, 1 Kasım 1993 tarihine kadar ulaşacak şekilde gönderiniz.