NASIL TOPLAMALI?

HALUK ORAL*

Bu yazımızda bazı kombinasyon toplamlarının ilginç bir yöntemle bulunmasından bahis edeceğiz.

Önce $(x+y)^n$ in nasıl açılabileceğini hatırlayalım.

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

eşitliğinin sağ tarafındaki çarpmaları yaparsak her parantez, çarpımın derecesine 1 ekleyeceği için bütün terimlerin derecesi n olur. Şimdi $x^k y^{n-k}$ teriminin katsayısını düşünelim. x in kuvveti olan k, parantezlerin k tanesinden x in seçildiğini gösterir. Bu seçim $\binom{n}{k}$ türlü yapılır ve bu seçim y leri de belirlediği için $x^k y^{n-k}$ nın katsayısı $\binom{n}{k}$ olur. Öyle ise

$$(x+y)(x+y)\cdots(x+y) = \binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}x^ny^0$$

yani

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

buluruz. Bu eşitliğe binom açılımı denir. Bu eşitliği kullanarak

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Şimdi

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^m\binom{n}{m} \quad (m \le n)$$

toplamını bulalım. Bu toplam

$$x^n(1-x)^n + x^{n-1}(1-x)^n + \cdots + x^{n-m}(1-x)^n$$

polinomunda x^n nin katsayısıdır. Bu polinomu dönüştürerek

$$\begin{aligned}
x^n(1-x)^n &+ x^{n-1}(1-x)^n + \cdots + x^{n-m}(1-x)^n \\
&= (1-x)^n \cdot x^{n-m}\cdot(x^m + x^{m-1} + \cdots + x + 1) \\
&= (1-x)^n \cdot x^{n-m}\cdot \frac{1-x^{m+1}}{1-x} \\
&= (1-x)^{n-1}\cdot(x^{n-m} - x^{n+1}) \\
&= x^{n-m}\cdot(1-x)^{n-1} - x^{n+1}\cdot(1-x)^{n-1}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu polinomda x^n,

$$x^{n-m}\cdot(-1)^m\binom{n-1}{m}x^m = (-1)^m\binom{n-1}{m}x^n$$

olarak görüneceğinden, $m < n$ için katsayısı ve dolayısı ile istenilen toplam $(-1)^m\binom{n-1}{m}$ olur ve $m = n$ için daha evvel verdiğimiz $(1-1)^n = 0$ toplamını elde ederiz.

Yukarıda bir geometrik serinin toplam formülünü kullandık;

$$1 + x + \cdots + x^m = \frac{1-x^{m+1}}{1-x} \quad (x \neq 1)$$

Bu eşitlik tümevarımla, veya şu şekilde kolaylıkla gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
A &= 1 + x + \cdots + x^m \\
Ax &= x + x^2 + \cdots + x^{m+1} \\
A - Ax &= 1 - x^{m+1}
\end{aligned}$$

O halde

$$A = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$$

Eğer $|x| < 1$ ise x^m nin m büyüdükçe sıfıra yaklaşan değerler alacağını düşünürsek, aşağıdaki sonsuz toplam için

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^m + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

eşitliğini de yazabiliriz.

Bu sonlu ve sonsuz toplam formüllerinin kullanılabileceği iki örnek daha verelim. Önce sonlu toplam için;

$$\binom{n}{k}+\binom{n+1}{k}+\binom{n+2}{k}+\cdots+\binom{n+m}{k} \quad (k \le n)$$

* Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

Bu toplam x^k nın $(1+x)^n+(1+x)^{n+1}+\cdots+(1+x)^{n+m}$ polinomundaki katsayısıdır. Yine bu polinomu dönüştürerek

$$\begin{aligned}(1+x)^n+(1+x)^{n+1}+\cdots+(1+x)^{n+m} &= \\ = \quad & (1+x)^n[1+(1+x)+\cdots+(1+x)^m] \\ = \quad & (1+x)^n[\frac{1-(1+x)^{m+1}}{1-(1+x)}] \\ = \quad & \frac{1}{x}[(1+x)^{n+m+1}-(1+x)^n]\end{aligned}$$

elde ederiz. x^k lı terim

$$\frac{1}{x}[\binom{n+m+1}{k+1}x^{k+1}-\binom{n}{k+1}x^{k+1}]$$

olacağından $k<n$ için x^k nın katsayısı

$$\binom{n+m+1}{k+1}-\binom{n}{k+1}$$

olarak bulunur. $k=n$ hali için bu katsayı $\binom{n+m+1}{k+1}$ dir.

Şimdi sonsuz toplam formülünün kullanıldığı bir örnek verelim.

$$\binom{2n}{0}-\binom{2n-1}{1}+\binom{2n-2}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$$

toplamını bulalım.

Bu ifade

$$x^{2n}(1-x)^{2n}+x^{2n-1}(1-x)^{2n-1}+ \\ x^{2n-2}(1-x)^{2n-2}+\cdots+x^n(1-x)^n$$

polinomunda x^{2n} nin katsayısıdır. Bu polinomu rahat çalışabileceğimiz bir hale getirmek için

$$x^{n-1}(1-x)^{n-1}+x^{n-2}(1-x)^{n-2}+\cdots+x(1-x)+1$$

toplamını da bu polinoma ekleyelim. Kolayca görüleceği gibi bu ekleme x^{2n} nin katsayısını değiştirmez. Elde edilen toplam

$$\begin{aligned}(x-x^2)^{2n}+(x-x^2)^{2n-1}+\cdots+(x-x^2)+1 &= \\ & \frac{1-(x-x^2)^{2n+1}}{1-(x-x^2)} \\ = \quad & \frac{1-x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}}{x^2-x+1}\end{aligned}$$

Bu eşitliğin pay ve paydasını $1+x$ ile çarparak

$$[1-x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}]\cdot\frac{1+x}{1+x^3} = \\ \frac{1+x}{1+x^3}-x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}\frac{1+x}{1+x^3}$$

polinomuna eşit olduğunu görürüz.

$x^{2n+1}\cdot(1-x)^{2n+1}\cdot\frac{1+x}{1+x^3}$ ifadesinde bütün terimlerin derecesi $2n$ den büyük olduğu için x^{2n} nin katsayısı sadece $\frac{1+x}{1+x^3}$ den gelecektir.

Şimdi tekrar

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$$

ifadesine dönelim. x yerine $-x^3$ koyarsak

$$\frac{1}{1+x^3}=1-x^3+x^6-x^9+x^{12}\cdots$$

elde ederiz. (Bu eşitlik doğal olarak sadece x in mutlak değeri 1'den küçük iken doğrudur. Biz sadece katsayılarla ilgilendiğimiz için bu kısıtlama bir sorun yaratmaz.)

Böylece

$$\frac{1+x}{1+x^3}=(1+x)(1-x^3+x^6-x^9+x^{12}-\cdots)$$

elde ederiz. Bu çarpımda x^{2n} in katsayısı

$$=\begin{cases} 1 & 2n\equiv 0 \bmod 6 \quad \text{yani} \quad n\equiv 0 \bmod 3 \\ 0 & 2n\equiv 2 \bmod 6 \quad \text{yani} \quad n\equiv 1 \bmod 3 \\ -1 & 2n\equiv 4 \bmod 6 \quad \text{yani} \quad n\equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$$

olarak elde edilir. Bu formül, istediğimiz n ye bağlı toplamdır.

Son olarak

$$\binom{2n}{n}+2\binom{2n-1}{n}+4\binom{2n-2}{n}+\cdots+2^n\binom{n}{n}$$

toplamını bulalım. Bu ifade

$$(1+x)^{2n}+2(1+x)^{2n-1}+2^2(1+x)^{2n-2}+\cdots+2^n(1+x)^n$$

polinomunda x^n in katsayısıdır. Yine geometrik seriler için toplam formülünü de kullanarak bu polinomu dönüştürelim.

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n}+2(1+x)^{2n-1}+\cdots+2^n(1+x)^n & \\ = \quad & (1+x)^{2n}[1+\frac{2}{1+x}+\frac{2^2}{(1+x)^2}+\cdots \\ & \frac{2^n}{(1+x)^n}] \\ = \quad & (1+x)^{2n}\frac{\frac{2^{n+1}}{(1+x)^{n+1}}-1}{\frac{2}{1+x}-1} \\ = \quad & (1+x)^{2n}\frac{\frac{2^{n+1}}{(1+x)^n}-(1+x)}{2-(1+x)} \\ = \quad & [2^{n+1}(1+x)^n-(1+x)^{2n+1}]\cdot\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

Yine $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ eşitliğini kullanarak polinomumuzu

$$2^{n+1}(1+x)^n(1+x+x^2+\cdots) - (1+x)^{2n+1}\frac{1}{1-x}$$

şekline getirebiliriz. Şimdi bu ifadedeki x^n in katsayısını bulalım.
$(1+x)^n \cdot (1+x+x^2+\cdots) =$

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right]\frac{1}{1-x}$$

ifadesinde x^n içeren terimlerin katsayılarının toplamı

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

olduğu görülür. Öte yandan
$(1+x)^{2n+1}(1+x+x^2+\cdots)$

$$= \left[\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1}x + \binom{2n+1}{2}x^2\right.$$

$$\left. x^2 + \cdots + \binom{2n+1}{2n+1}x^{2n+1}\right]\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ifadesinde x^n içeren terimlerin toplamı

$$\binom{2n+1}{0}x^n + \binom{2n+1}{1}xx^{n-1} +$$

$$\binom{2n+1}{2}x^2x^{n-2} + \cdots + \binom{2n+1}{n}x^n$$

olacağından x^n nin katsayısı
$\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \cdots + \binom{2n+1}{n}$

$$= \frac{1}{2}\left[\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \cdot\right.$$

$$\left. + \binom{2n+1}{2n+1}\right] = \frac{1}{2}2^{2n+1} = 2^{2n}$$

olarak bulunur. Buradan x^n nin

$$2^{n+1}(1+x)^n(1+x+x^2+\cdots) - (1+x)^{2n+1}\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ifadesindeki katsayısı

$$2^{n+1} \cdot 2^n - 2^{2n} = 2^{2n+1} - 2^{2n} = 2^{2n}$$

olarak elde edilir.

Sayma yöntemi ile elde edilmesi zor olan pek çok eşitlik bu yöntemle bulunabilir. Bu yönteme doğuran fonksiyonlar yönteminin bir uygulaması olarak da bakılabilir.