

ÇÖZÜMLER

DEĞERLENDİREN : CEM TEZER*

A46. $p > 3$ bir asal sayı ise $p^2 + 2$ nin asal olamayacağını gösteriniz (H. Demir).

Çözüm : 3 ten büyük her p asal sayısı, ya $p = 3n + 1$, veyahut da $p = 3n + 2$ şeklinde yazılabilir. Böylece birinci halde $p^2 + 2 = 9n^2 + 6n + 3$ ikinci halde de $p^2 + 2 = 9n^2 + 6n + 6$ olup $p^2 + 2$ daima 3 ün katıdır. (p asal olsun veya olmasın, 3 e bölünmeyen bir sayı olduğu müddetçe $p^2 + 2$ nin daima 3 e bölünebildiğine dikkat ediniz. Demek ki bu pek iyi inşa edilmemiş bir problem...)

A47. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right) = \ln 3$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right) &= \ln \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \\ &= \ln \left(\frac{n+2}{n} \right) - \ln \left(\frac{n+3}{n+1} \right) \end{aligned}$$

olduğu hatırlanarak

$$\sum_{n=1}^N \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right) = \ln 3 - \ln \left(\frac{N+3}{N+1} \right)$$

buradan da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right) = \ln 3$$

bulunur.

A48. $n - 1$ ve $n + 1$, 10 dan büyük iki asal sayı olsun. $n^3 - 4n$ sayısının daima 120 ye bölündüğünü gösteriniz. (G.E. Andrews)

Çözüm : Önce $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ ve $n^3 - 4n = n(n-2)(n+2)$ olduğunu hatırlayalım. Ardışık çift sayılar olan $n-2, n, n+2$ nin her biri 2 ye, en az bir tanesi de 3 e bölünebilir. Diğer taraftan $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ ardışık sayılarından bir tanesi 5 e bölünebilmelidir. $n-1, n+1$ asal olduğuna ve 5 e eşit olmadığına göre $n-2, n, n+2$ sayılarından biri 5 e bölünebilmelidir. Demek ki $n^3 - 4n$, 120 ye bölünür. (Aslında dikkatli okuyucunun farketmiş olacağı gibi $n \geq 2$ olmak üzere, $n-1$ ve $n+1$ sayıları 5 e bölünmeyen sayılar olduğu takdirde, $n^3 - 4n$ daima 240 ın bir katıdır.)

A49. Bir kenarının ortanoktası ve diğer iki kenarına ait yüksekliklerin ortanoktası verilen üçgeni pergel ve cetvelle çiziniz. (H. Demir)

Çözüm : Bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarının ortanoktası D , sırasıyla B ve C köşelerine ait yüksekliklerin ayakları E ve F , $[BE]$ ve $[CF]$ nin ortanoktası da U ve V olsun. Ortosantrı, yani üç yüksekliğin kesiştiği noktayı her zamanki gibi H ile gösterelim. D, U, V verildiği takdirde ABC üçgeninin nasıl çizileceği soruluyor. $\sphericalangle VDU = \sphericalangle BAC$ olduğundan D, U, V noktaları doğruduş olarak verilemez. DV , AB ye, DU da AC ye paralel olduğundan H , sırasıyla DU ya U dan ve DV ye V den çizilen u ve v dikmelerinin kesişim noktasıdır. W , $[EF]$ nin ortanoktası ise, $UDVW$ bir paralelkenar olur. Bir köşesi H de, H den geçen kenarları u ve v doğrusu üzerinde, merkezi de W da olan bir paralelkenarın H ye komşu köşeleri E ve F dir. Demek ki E noktası H nin W ya göre bakışından v ye çizilen paralel ile u nun kesişimi olarak elde edilebilir. Benzer şekilde F . En nihayet HE ye E den, HF ye de F den çizilen diklerin kesişim noktası olarak A elde edilir. Gerisi kolay.

A50. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

Çözüm :

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

polinom özdeşliğinin iki tarafının birer defa türevi alınarak ve $x = 1$ yazılarak

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k$$

elde edilebilir. Gene aynı özdeşliğin, bu sefer iki defa türevini almak ve $x = 1$ koymak suretiyle

$$n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k(k-1)$$

* ODTÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k^2 - \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 - n2^{n-1}
\end{aligned}$$

buradan da

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 = n(n+1)2^{n-2}$$

elde edilir.

Y46. Odakları F, F' olan bir elips ve bu elipsin F den geçen bir AB kirişi verilsin. A ve B den elipse çizilen normaller N noktasında kesişsin. N den FF' ne çizilen paralelin $[AB]$ doğru parçasının orta noktasından geçtiğini gösteriniz.

Çözüm : Yarıçapı elipsin büyük çapına eşit, F merkezli bir γ çemberi alalım. AB doğrusu γ yı P ve Q noktalarında kessin. A ve P nin F nin aynı tarafında kaldığını farzedelim. A , $[PF']$ nü ortadikmesi ile PQ nun kesişim noktasıdır. (Neden ?) A daki teğet de $[PF']$ nün ortadikmesidir. (Neden ?) Demek ki A noktasındaki normal PF' ye A dan çizilen paralel, B noktasındaki normal de QF' ye B den çizilen paralel olmalıdır. Bu normaller N de kesişiyor. Demek ki N den FF' ne yani PQF' üçgeninin F' den geçen kenarortayına çizilen paralel, ABN üçgeninin N den geçen kenarortayı olmalıdır.

Y47. Bir üçgende içteğet çemberin merkezi I , yüksekliklerin kesişim noktası H ("ortosantr"), çevrel çember merkezi de O olsun. Üçgenin kenar uzunlukları a, b, c , içteğet çemberin yarıçapı da r ise IOH üçgeninin alanının

$$\left| \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{8r} \right|$$

olduğunu gösteriniz. (W.J. Blundon)

Çözüm : Vektör gösterimi kullanacağız. Her zamanki gibi $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ ve $2s = a+b+c$ yazalım. Çevrelçember yarıçapını R ile göstereyim. O yu yani çevrel çember merkezini başlangıç noktası aldığımız, üçgenin ağırlık merkezini de G ile gösterdiğimiz takdirde

$$O = \vec{0}$$

$$G = \frac{1}{3}(A+B+C)$$

$$H = A+B+C \quad (\text{Neden ?})$$

$$I = \frac{1}{2s}(aA+bB+cC) \quad (\text{Neden ?})$$

bulunur. Herhangi bir XYZ üçgeninin (yönlü) alanını Δ_{XYZ} ile gösterirsek,

$$\begin{aligned}
\Delta_{IOH} &= \Delta_{OHI} \\
&= \frac{1}{2} \det[H, I] \\
&= \frac{1}{2} \det[A+B+C, \frac{1}{2s}(aA+bB+cC)] \\
&= \frac{1}{4s} \det[A+B+C, aA+bB+cC] \\
&= \frac{1}{4s} [(c-b) \det(B, C) + (a-c) \det(C, A) + (b-a) \det(A, B)] \\
&= \frac{1}{2s} [(c-b) \Delta_{OBC} + (a-c) \Delta_{OCA} + (b-a) \Delta_{OAB}] \\
&= \frac{R^2}{4s} [(c-b) \sin 2A + (a-c) \sin 2B + (b-a) \sin 2C]
\end{aligned}$$

ve nihayet

$$|\Delta_{IOH}| = \left| \frac{R}{4s} [(c-b)a \cos A + (a-c)b \cos B + (b-a)c \cos C] \right|$$

elde edilir.

Şimdi $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ Şeklindeki bütün çembersel permütasyonlar üzerinden toplamayı

$$\sum^*$$

ile göstererek, (mesela

$$\sum^* a = a + b + c$$

veya

$$\sum^* ab^2 = ab^2 + bc^2 + ca^2$$

gibi) diğer taraftan da

$$|\Delta_{ABC}| = \left| \frac{1}{2} bc \sin A \right| = \frac{1}{2} bc \left(\frac{a}{2R} \right) = \frac{abc}{4R}$$

ve

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2$$

olduğu da hatırlanarak ve $|\Delta_{ABC}|$ yerine sadece Δ yazarak,

$$\begin{aligned}
|\Delta_{IOH}| &= \frac{abc}{16\Delta s} \left| \sum^* a(b-c) \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right| \\
&= \frac{1}{32\Delta s} \left| \sum^* a^2(b-c)(b^2 + c^2 - a^2) \right| \\
&= \frac{1}{32\Delta s} \left| \sum^* a^2(b-c)(4s(s-a) - 2bc) \right| \\
&= \frac{1}{8\Delta s} \left| \sum^* a^2(b-c)s(s-a) \right| \\
&= \frac{1}{16\Delta} \left| \sum^* a^2(b-c)(b+c-a) \right| \\
&= \frac{1}{16\Delta} \left| \sum^* a^3(b-c) \right|
\end{aligned}$$

buradan da $\Delta = rs$ olduğu hatırlanarak ve

$$\sum^* a^3(b-c) = (a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$$

özdeşliği gözönüne alınarak küçük bir hesaplama

$$|\Delta_{IOH}| = \left| \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{8r} \right|$$

elde edilir.

Y48. İkizkenar bir ABC üçgeninin (B ve C açıları eşit!) A tepe noktasından geçen değişken bir doğru $[AB]$ kenarını D noktasında, çevrel çemberin A köşesi karşısındaki yayını da E noktasında kessin. $[DE]$, $[DB]$ doğru parçalarına ve çevrel çembere içerden değen çemberin yarıçapı r_1 , $[DE]$, $[DC]$ doğru parçalarına ve çevrel çembere içerden değen çemberin yarıçapı r_2 olsun. $\ell = |AD|$ ise $\ell + \sqrt{r_1 r_2}$ nin sabit, yani değişken AD doğrusunun konumundan bağımsız olduğunu gösteriniz, (H. Demir)

Çözüm : ABC nin çevrel çemberine α , problemde sözkonusu edilen r_1 , r_2 yarıçaplı çemberlere de β_1 , β_2 diyelim. β_1 , β_2 nin BC ye değdikleri noktalar K_1 , K_2 olsun. A merkezli ve kuvveti $|AB|^2 = |AC|^2$ olan bir evirtim altında B ve C noktaları sabit kahrken, α çemberi ve BC doğrusu yer değiştirirler. Bundan β_1 , β_2 çemberlerinin kendi kendilerinin evrikleri olduğu ortaya çıkar. Demek ki A merkezli ve $|AB| = |AC|$ yarıçaplı çember β_1 ve β_2 ye dik olmalı, yani A dan β_1 ve β_2 çemberlerine çizilen teğetler eşit uzunlukta olmalıdır. Buradan β_1 ve β_2 in AD doğrusuna aynı bir E noktasında değdikleri ve $|AB| = |AC| = |AE|$ bulunur. Küçük bir hesaplama

$$|DE| = |DK_1| = |DK_2| = \sqrt{r_1 r_2}$$

buradan da

$$\ell + \sqrt{r_1 r_2} = |AD| + |DE| = |AE| = |AB| = \text{sabit}$$

bulunur.

Y49. $\dots \Gamma_n, \Gamma_{n+1}, \Gamma_1, \Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}, \Gamma_n \dots$ çemberler dizisinde ardışık iki çember birbirlerine dıştan teğet ve dizinin bütün çemberleri ölçüsü 2α olan bir açının kenarlarına teğettir. Γ_n in yarıçapına r_n ve $\rho_n = \frac{r_n}{r_0}$ yazarsak $\rho_{m+n} = \rho_m \rho_n$ olduğunu gösteriniz. (H. Demir)

Çözüm : Herhangi bir $n \in \mathbf{Z}$ için Γ_{n+1} ve Γ_n i gözönüne alalım. Pisagor teoreminden kolaylıkla

$$\frac{(r_{n+1} + r_n)^2 - (r_{n+1} - r_n)^2}{(r_{n+1} + r_n)^2} = \cos^2 \alpha$$

bulunur. Demek ki $\xi = r_{n+1}/r_n$ oranı

$$\frac{4\xi}{(1+\xi)^2} = \cos^2 \alpha$$

yı yani

$$\xi^2 + 2\left(1 - \frac{2}{\cos^2 \alpha}\right)\xi + 1 = 0$$

veyahut da

$$\xi^2 + 2\left(\frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}\right)\xi + 1 = 0$$

denklemini sağlamalı yani

$$\xi = \frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{(1 \pm \sin \alpha)^2}{1 - \sin^2 \alpha}$$

olmalıdır. Γ_n çemberlerinin $n \in \mathbf{Z}$ ile beraber büyüdüklerini farz ederek $+$ işaretini alabiliriz. Bu suretle

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$$

ve en nihayet

$$\rho_n = \frac{r_n}{r_0} = \left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}\right)^n$$

buradan da herhangi $m, n \in \mathbf{Z}$ için

$$\rho_m \rho_n = \rho_{m+n}$$

elde edilir.

$$\mathbf{Y50.} \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

özdeşliğini ispat ediniz.

Çözüm : Bu problemi, hem dergimizin kapağında hem de problem sayfamızda yanlış olarak yayınladığımız için okuyucularımızdan özür diliyoruz. Özdeşliğin okuyucularımızın tahmin etmekte güçlük çekmediklerine inandığımız doğru şeklini ve ispatını sunuyoruz :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k - 1 \right) x^{-1} = \frac{(1-x)^n - 1}{x}$$

polinom özdeşliğinin iki tarafı x e göre 0 dan 1 e kadar integre edilerek

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k} = \int_0^1 \frac{(1-x)^n - 1}{x} dx$$

ve $t = 1 - x$ ikamesiyle de

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k} &= - \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt \\ &= - \int_0^1 (1+t+t^2+\dots+t^{n-1}) dt \\ &= -(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) \end{aligned}$$

elde edilir.