# POLİNOMLAR HAKKINDA

## İSMAİL GÜLOĞLU*

1993 Uluslararası Matematik Olimpiyatları'na hazırlanan Türk ekibi çalışmalarını 25 Ocak - 4 Şubat tarihleri arasında Antalya'da sürdürdü. Orda gözden geçirilen problemlerden bir demek de size sunmak istiyorum.

1. $F(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ polinomu katsayıları tamsayı olan bir polinom olsun ve

$$F(a) = F(b) = F(c) = F(d) = 5$$

olacak şekilde 4 tane farklı $a, b, c, d$ tamsayıları bulunsun. $F(k) = 8$ olacak şekilde bir $k$ tamsayısının bulunmadığını gösteriniz.

Önce $F(x)$ polinomu yerine $G(x) = F(x)-5$ polinomunu alarak problemi, "tam sayılı $G(x)$ polinomu farklı tamsayı köke sahip ise hiç bir $k$ tam sayısı için $G(k) = 3$ olamayacağını" göstermek problemine dönüştürelim.

$G(a) = 0$ olduğunda $G(x)$ polinomu $x-a$ polinomuna bölünür, benzer şekilde $x-b, x-c, x-d$ polinomlarına da bölünür. Bunlar ikişer ikişer aralarında asal oldukları için $G(x)$ polinomu bunların çarpımına da bölünür. Yani $H(x)$ tam katsayılı bir polinom olmak üzere

$$G(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)H(x)$$

dir. Buna göre her $k$ tam sayısı için $G(k)$ bir tam sayı ve

$$G(k) = (k-a)(k-b)(k-c)(k-d)H(k)$$

$G(k)$ sayısının $Z$ içinde bir çarpanlara ayrılışıdır. Üstelik $(k-a), (k-b), (k-c), (k-d)$ ikişer ikişer farklhı tam sayılardır. Burdan hemen $G(k)$ değerinin hiç bir $k$ tam sayısı için asal sayı olamayacağı görülür.

2) $F(x)$ tam katsayılı bir polinom olsun. $F(1), F(2), \ldots, F(k)$ tam sayılarının hiç biri $k$ ya bölünmeyecek şekilde bir $k$ doğal sayısı varsa $F(x)$ polinomunun $Z$ tam sayılar halkasından hiç bir kökü yoktur.

Bunun için şunu gözlemlemek yeter: $a, b, k \in Z$ ve $a \equiv b \pmod{k}$ ve tam katsayılı $F(x)$ polinomu için $F(a) \equiv F(b) \pmod{k}$ dır.

Diğer taraftan her $a$ tam sayısı $k$ modülüne göre $\{1, 2, \ldots, k\}$ kümesinin bir elemanına denk olduğu için $F(a) = 0$ olacak şekilde bir $a \in Z$ varsa $k/F(i)$ olacak şekilde uygun bir $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ sayısı vardır.

3) $n > 1$ olmak üzere $f(x) = (x+1)^n - x^n - 1$ polinomunun çok katlı bir kökü olması için gerek ve yeter şart $n-1$ sayısının 6 ya bölünmesidir.

$c$ sayısının $f(x)$ polinomunun çok katlı bir kökü olması demek $m \geq 2$ olmak üzere

$$f(x) = (x-c)^m\, h(x)$$

olacak şekilde bir $h(x)$ polinomunun bulunması demektir. Eğer $h(c) \neq 0$ ise $m$ sayısına $c$ kökünün katlılığı denir.

$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ polinomuna karşılık $a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 2x + a$ şeklinde tanımlanan polinoma $f(x)$ in türevi denir ve $f'(x)$ ile gösterilir. $f(x), g(x)$ polinomlar ve $c$ bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} [cf(x) + g(x)]' &= c \cdot f'(x) + g'(x) \quad \text{ve} \\ [f(x) \cdot g(x)]' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Özel olarak $m \geq c$ için

$$\begin{aligned} [(x-c)^m\, h(x)]' &= m(x-c)^{m-1} \cdot h(x) + (x-c)^m\, h'(x) \\ &= (x-c)^{m-1}[m\, h(x) + (x-c)\, h'(x)] \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $c$ sayısı $f(x)$ polinomunun çok katlı bir kökü ise $f'(x)$ polinomunun da bir köküdür.

Bu gözleme dayanarak bizim problemimizde $c$ kompleks sayısı $f(x) = (x+1)^n - x^n - 1$ in çok katlı bir kökü ise

$$(c+1)^n - c^n - 1 = 0$$

ve

$$n(c+1)^{n-1} - nc^{n-1} = 0$$

* ODTÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

olmalıdır. Buradan $(c+1)^{n-1} = c^{n-1}$ ve dolayısı ile $c^{n-1}(c+1) = c^n + 1$ den

$$(c+1)^{n-1} = c^{n-1} = 1$$

bulunur. Buna göre $c$ ve $c+1$ kompleks sayıları birim çemberin içine çizilen bir köşesi 1 sayısı olan düzgün $(n-1)$-genin iki köşesidirler.

Diğer taraftan köşeleri $c, c+1$ ve 0 sayıları ile verilen üçgen eşkenar olduğundan uygun bir $k \in IN$ için

$$\frac{2\pi}{G} = k \cdot \frac{2\pi}{n-1}$$

yani $n - 1 = G \cdot k$ olmalıdır.

Tersine $G/n-1$ ise $(x+1)^n - x^n - 1$ polinomunun çok katlı bir kökü olduğunu göstermeyi okuyucuya bırakıyoruz.

4) $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ tam katsayılı bir polinom ve $n \geq 1$ olsun. Herhangi bir $k$ pozitif tam sayısı verildiğinde $f(m)$ tamsayısının en az $k$ tane farklı asal böleni olacak şekilde bir $m$ tamsayısı var mıdır?

$K = \{p \,|\, p \text{ asal}\,,\ p \,|\, f(m), m \in Z\}$ kümesi sonlu ise problemin cevabı elbette "hayır" olmak zorundadır. Önce bunu anlamaya çalışalım. $K$ kümesi sonlu olsun, $K = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ farzedelim. Bu durumda $a_n \neq 0$ olduğu hemen görülür.

$$f(a_n y) = a_n[a_n^{n-1}y^n + a_1 a_n^{n-2}y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}y + 1]$$

olduğu için $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_r$ in katı olan her $y$ tam sayısı için $f(a_n y)/a_n$ tam sayısının asal bölenlerinin hiç biri $K$ kümesine ait olamayacağı için bu şekildeki her $y$ için $f(a_n y)/a_n = 1$ yani

$$a_n^{n-1}y^n + \cdots + a_{n-1}y = 0$$

olmalıdır. Fakat $n \geq 0$ için $n$ inci dereceden bir polinomun en fazla $n$ tane farklı kökü olabilir. $n \geq 1$ olduğuna göre $K$ nın sonlu olduğunu kabul etmek bir çelişkiye neden olmaktadır. Şu halde $K$ sonsuzdur.

Buna göre verilen herhangi bir $k$ pozitif tam sayısı için öyle $m_1, m_2, \ldots, m_k$ tamsayıları ve $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ikişer ikişer farklı asal sayılar vardır ki her $i = 1, 2, \ldots, k$ için

$$p_i \mid f(m_i)$$

olsun. Çinli Kalan Teoremi'ne göre (Matematik Dünyası, Cilt 3, Sayı 1)

$$m \equiv m_i \ (\text{mod } p_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

olacak şekilde bir $m$ tamsayısı vardır. Diğer taraftan bu kongrüans bağıntıları

$$f(m) \equiv f(m_i) \equiv 0 \ (\text{mod } p_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

ve dolayısı ile

$$p_1 p_2 \cdots p_k \mid f(m)$$

olduğunu gösterir. Yani sorumuzun cevabı "evet"dir. (1989 Olimpiyatları'na önerilen sorulardan biri). $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ikişer ikişer farklı tamsayılar ve $n \geq 3$ olsun. $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) - 2$ polinomu $Z$ üzerinde çarpanlara ayrılabilir ise yani

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

olacak şekilde, dereceleri en az 1 olan $g(x)$ ve $h(x)$ tam katsayılı polinomlar bulunabilirse $n = 3$ dür.

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ ise $f(a_i) = -2$ den her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $-2 = g(a_i)h(a_i)$, yani $(g(a_i), h(a_i)) \in \{(1,-2), (-1,2)(2,-1), (-2,1)\}$ elde ederiz. Buna göre $g(a_i) + h(a_i)$ her $i = 1, 2, \ldots, n$ için ya 1 ya da -1 dir. $\{i \mid g(a_i) + h(a_i) = 1\}$ kümesinin tam $k$ tane olsun. Bu durumda $\{i \mid g(a_i) + h(a_i) = -1\}$ kümesinde tam $n - k$ tane eleman vardır. Genelliği bozmadan, gerekirse $a_i$ leri yeniden uygun şekilde indeksleyerek

$$g(a_1) + h(a_1) = g(a_2) + h(a_2) = \cdots = g(a_k) + h(a_k) = 1$$

farzedelim.

Önce $k \geq \frac{n}{2}$ durumunu inceleyelim:

$$g(x) + h(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_k)u(x)$$

olacak şekilde tam katsayılı bir $u(x)$ polinomu vardır. $g(x)+h(x)-1$ polinomunun derecesi, $g$ ve $h$ polinomlarının derecelerinin büyüğünden daha büyük olmadığı için, $n$ den küçüktür. Dolayısı ile $k < n$ dir. $i \leq k+1$ için $g(a_i) + h(a_i) = -1$ olduğu için her $i \geq k+1$ için

$$(a_i - a_1)(a_i - a_2)\cdots(a_i - a_k)u(a_i) = -2 \qquad (*)$$

dir. Problem 1'de uyguladığımız düşünce ile bu denklemlerden önce $k \leq 3$ olduğunu görünüz. $k = 3$ ise yukarıdaki denklemden

$$\{a_1, a_2, a_3\} \subseteq \{a_i - 2, a_i - 1, a_i + 1, a_i + 2\} \qquad (**)$$

bulunur. $n > 4$ ise $(**)$ da $i = 4$ olup $a_5$ e bakarsak, $|a_5 - a_j| \geq 3$ olacak şekilde bir $j \in \{1, 2, 3\}$ bulunması gerektiği görülür ki, $(*)$ denklemi ile çelişir. $n = 4$ ise $g(x)$ veya $h(x)$

polinomlardan birinin derecesi 1 olmak zorundadır yani $f(x)$ polinomunun tamsayı olan $z$ gibi bir kökü bulunmalıdır. Fakat bu

$$(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)=2$$

verir ki mümkün değildir. Şu halde $k=2$ ve dolayısı ile $n \leq 2k = 4$ olmalıdır. $n=4$ olsun. Yukarıdaki düşünce ile $g(x)$ ve $h(x)$ in her birinin derecesi 2 den küçük olamayacağı için tam 2 olmalı ve dolayısı ile

$$g(x)+h(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)u(x)$$

de $u(x)$ sabit olmalıdır ve dolayısı ile sol tarafın baş katsayısına eşit olmalı. $g(x)$ ve $h(x)$ in baş katsayıları 1 olduğu için $u(x) \equiv 2$ bulunur. Buna göre

$$(a_3-a_1)(a_3-a_2)=-1=9a_4-a_1)(a_4-a_2)$$

yani

$$\{a_3-1, a_3+1\}=\{a_1,a_2\}=\{a_4-1,a_4+1\}$$

elde edilir ki $a_3=a_4$ çelişkisini verir. Şu halde $u=3$ olur.

Benzer şekilde $k<\frac{n}{2}$ durumunda, $g(x)+h(x)-1$ polinomu yerine $g(x)+h(x)+1$ polinomunu alarak $n=3$ olduğunu göstermeyi okuyucuya bırakıyoruz.

Geçen sayımızda Veliev'in makalesinde söz edilen polinomun kökleri ve katsayıları arasındaki münasebetler konusunda bir takım problem ile bu yazıya son verelim:

I. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + x^2 + x + 1$ reel katsayılı polinomun bütün köklerinin ($C$ içinde) reel olamayacağını gösterin.

II. $a_i \in \{-1,1\}$, $i=0,1,2,\ldots,n-1$ katsayılı ve köklerinin hepsi reel olan $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ polinomlarının tümünü bulun.

III. $a,b,c$ reel sayıları $a+b+c=0$ koşulunu sağlarsa

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

olduğunu gösterin.

## DÜZELTME

Yarışma problemi **Y54** dergimizin 3. cilt, 1. sayısında hatalı olarak yayınlanmıştır. Aşağıda düzeltilmiş şeklini sunar, özür dileriz...

**Y54.** Yarıçapları $r_1, r_2, r_3$ olan $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ çemberleri ,

$$\gamma_2 \cap \gamma_3 = \{O, A_1\}$$

$$\gamma_3 \cap \gamma_1 = \{O, A_2\}$$

$$\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{O, A_3\}$$

olacak ve $O$ noktası $A_1A_2A_3$ üçgeninin içinde kalacak şekilde kesiştikleri takdirde

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3} \leq \frac{1}{|OA_1|}+\frac{1}{|OA_2|}+\frac{1}{|OA_3|}$$

olduğunu ve eşitliğin ancak $A_1A_2A_3$ üçgeninin eşkenar ve

$$r_1=r_2=r_3$$

olması halinde mümkün olduğunu gösteriniz. (*Cem TEZER*)