İYİ TANIMLILIK KAVRAMI

TALİN BUDAK*

İyi Tanımlılık ne demektir? Bu kavrama nerelerde rastlıyoruz? Bu sorulara yanıt vermeden önce *fonksiyon* tanımını hatırlamamız gerekir.

Tanım 1. $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ verilmiş iki küme olsun. A nın her elemanını B de yalnız bir elemana eşleyen A dan B ye f bağıntısına A dan B ye fonksiyon denir ve $f : A \rightarrow B$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımı niceleyicilerle

$f : A \rightarrow B$ fonksiyon $\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B, (x,y) \in f$ ve $x_1, x_2 \in A, x_1 = x_2$ ise $(x_1, y_1) \in f \bigwedge (x_2, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$
şeklinde ifade edebiliriz.

A dan B ye f fonksiyonunda A kümesine *tanım kümesi,* B kümesine de *değer kümesi* denir.

$x \in A, y \in B$ için $(x,y) \in f$ ise y ye x in B deki görüntüsü adı verilir. B kümesinde f fonksiyonu ile görüntü olan bütün elemanların kümesine, A nın görüntü kümesi denir ve $f(A)$ ile gösterilir. Bunu $f(A) = \{b \in B : b = f(a), a \in A\}$ şeklinde de belirtebiliriz.

Tanım 2. $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu A tanım kümesinin farklı elemanlarını B değer kümesinin farklı elemanlarına eşliyorsa, f'e *birebir fonksiyon* denir.

Bu tanımı
$f : A \rightarrow B$ birebir fonksiyon
$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
şeklinde ifade edebiliriz.

Tanım 3. $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu ile B kümesindeki her eleman A kümesindeki en az bir elemanın görüntüsü ise f fonksiyonuna *örten fonksiyon* denir. O halde

$$f : A \rightarrow B \text{ örten} \Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$$

diyebiliriz.

İyi Tanımlılık hangi durumlarda söz konusu olabilir? Herhangi bir A kümesi ve bu küme üzerinde bir R denklik bağıntısı verildiğinde, A'nın elemanlarının denklik sınıflarından oluşan kümeye A'nın bölüm kümesi dendiğini biliyoruz. Bu kümeyi A/R ile gösterelim. İşte A/R üzerinde bir fonksiyon tanımlamamız gerektiğinde çok dikkatli olmalıyız. A/R nin elemanları denklik sınıfları olduğundan, $a \in A$ için, a nın denklik sınfı $[a]$, a ile bağıntıda bulunan tüm elemanları içeren bir kümedir. Yani her $b \in A$ için $bRa((b,a) \in R)$ ise $b \in [a]$ olmakta ve bu yüzden $[b] = [a]$ elde edilmektedir. Sonuç olarak A/R üzerinde tanımlanacak bir f fonksiyonu için $[a]$ ve $[b]$ nin görüntüleri aynı olmalı, yani f fonksiyonu için $[a]$ nın elemanlarından bağımsız bir şekilde tanımlanmalıdır. İşte iyi tanımlılık böylesi durumlarda söz konusu olmaktadır. Matematikçi herhangi bir ispat içerisinde bir fonksiyon tanımlama ihtiyacını duysa mutlaka tanımladığı fonksiyonun iyi tanımlı olduğunu göstermelidir. Bölüm kümeleri böylesi durumlar için klasik örnek olmakla birlikte başka birçok değişik durumda da iyi tanımlılık kavramına ihtiyaç duyulmaktadır. Şimdi çeşitli sorular üzerinde bu konuyu açıklayalım.

1. $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, f : A \rightarrow B$ örten bir fonksiyon ve R, A üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanmış bir denklik bağıntısı olsun.

$$\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

$\theta : A \rightarrow A/R, \theta(a) = [a]$ şeklinde tanımlanan bölüm fonksiyonu olarak alındığında $f^* \circ \theta = f$ eşitliğini sağlayacak şekilde tek bir birebir örten f^* fonksiyonunun var olduğunu gösteriniz.

Kanıt : R nin bir denklik bağıntısı olduğunu, yani yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını kolaylıkla görebiliriz. Şimdi göstermemiz gereken aşağıdaki diagrama değişme özelliğini sağlatacak şekilde birebir örten bir f^* fonksiyonunun varlığıdır.

$f^* : A/R \rightarrow B, f^*([a]) = f(a)$ şeklinde bir f^* tanımladığımızda, istenilen $f^* \circ \theta = f$ eşitliğinin sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Ama acaba tanımladığımız f^* bağıntısı bir fonksiyon

* Boğaziçi Üniversitesi Öğretim Üyesi

mu? Yani $f^\star$ iyi tanımlı mı? $f^\star$ fonksiyon tanımının şartlarını sağlıyor mu? $[a] \in A/R$ ve $[b] \in A/R$ ve $([a], f(a)) \in f^\star$, $([b], f(b)) \in f^\star$ ise $f(a) = f(b)$ olduğunu göstermeliyiz. Bu sonucu ise aşağıdaki gerektirmelerden kolaylıkla elde edebildiğimizi görüyoruz.

$$[a] = [b] \Rightarrow aRb \Rightarrow f(a) = f(b)$$

Sonuç olarak $f^\star([a])$ nın $[a]$ nın elemanlarından bağımsız olarak tanımladığını, yani $f^\star$ ın iyi tanımlı olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi ispatın geri kalan kısmını tamamlayalım. $f^\star$ ın birebir olduğunu gösterebilmek için her $[a], [b] \in A/R$ için $f^\star([a]) = f^\star([b]) \Rightarrow [a] = [b]$ ifadesinin doğruluğunu kanıtlamamız gerekir. $f^\star([a]) = f^\star([b])$ eşitliği $f^\star$ ın tanımından $f(a) = f(b)$ eşitliğini verir. R nin tanımından $f(a) = f(b) \Leftrightarrow aRb$ olduğunu biliyoruz. $aRb \Rightarrow [a] = [b]$ olduğundan $f^\star$ ın birebir olduğu kanıtlanmıştır.

$f^\star$ ın örten olduğunu göstermek için B den herhangi bir b elemanı alalım. f fonksiyonu örten olarak verildiği için $\exists a \in A, f(a) = b$ diyebiliriz. Şimdi a nın denklik sınıfını düşünelim. $f^\star([a]) = f(a)$ olduğunu biliyoruz. $f(a) = b$ olduğundan

$$\forall b \in B, \exists [a] \in A/R, f^\star([a]) = b$$

elde edilmiş olur. O halde $f^\star$ örten bir fonksiyondur.

Son olarak $f^\star$ ın bu özellikleri sağlayan tek fonksiyon olduğunu göstermeliyiz.

$g : A/R \to B, g \circ \theta = f$ olacak şekilde tanımlanmış başka bir fonksiyon olsun. A/R nin her $[a]$ elemanının A da bir a elemanına karşılık geldiğini biliyoruz. Bunun sonucunda

$$g([a]) = g(\theta(a)) = (g \circ \theta)(a) = f(a) = f^\star([a])$$

elde ederiz. A/R nin her elemanının $f^\star$ ve g fonksiyonları altındaki görüntüsü aynı olduğuna göre $f^\star = g$ sonucu elde edilmiş olur.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "h"'] & B \\ C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

2. $A, B, C \neq \emptyset$ üç küme ve f, g aşağıdaki şekilde gösterilen iki fonksiyon olsun. g birebir ise $f(A) \subseteq g(C)$ olması için gerek ve yeter şart yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi $f = g \circ h$ eşitliğini sağlayan bir h fonksiyonunun varolmamasıdır.

Kanıt: Önce $h : A \to C, f = g \circ h$ eşitliğini sağlayan bir h fonksiyonunun var olduğunu varsayalım. $f(a) \in f(A)$ aldığımızda

$$f(a) = (g \circ h)(a) = g(h(a)) \in g(C)$$

olacağından $f(A) \subseteq g(C)$ kanıtlanmış olur.

Şimdi ise $f(A) \subseteq g(C)$ yi kabul edelim. O halde her $a \in A$ için öyle bir $c \in C$ vardır ki $f(a) = g(c)$ olur. Bu $c \in C$ ye a nın h altındaki görüntüsü diyelim, yani $h : A \to C, h(a) = c$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $(g \circ h)(a) = g(c) = f(a)$ olacağından $g \circ h = f$ eşitliği doğrulanır. O halde h nın iyi tanımlı olduğunu gösterebilirsek ispat tamamlanmış olacaktır.

Şimdi $h(a) = c_1$ ve $h(a) = c_2$ ise, $c_1 = c_2$ olduğunu göstermeliyiz. h nın tanımından

$$h(a) = c_1 \Rightarrow g(c_1) = f(a) \text{ ve } h(a) = c_2 \Rightarrow g(c_2) = f(a)$$

elde ederiz. O halde $g(c_1) = g(c_2)$ dir. g birebir olduğundan bu da bize $c_1 = c_2$ sonucunu verir. Yani h iyi tanımlıdır.

3. Şimdi ise iyi tanımlı olmayan bir fonksiyon örneği görelim. ρ gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanmış bir denklik bağıntısı olsun.

$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\rho y \Leftrightarrow x - y \in Z$ (Z tam sayılar kümesidir).

Şimdi de $\dfrac{\mathbb{R}}{\rho} \times \dfrac{\mathbb{R}}{\rho}$ üzerinde bir f fonksiyonu tanımlamaya çalışalım.

$$f : \frac{\mathbb{R}}{\rho} \times \frac{\mathbb{R}}{\rho} \to \frac{\mathbb{R}}{\rho}$$
$$f([x], [y]) = [x \cdot y]$$

şeklinde verilmiş olsun. f nin iyi tanımlı olup olmadığını incelememiz gerekir.

f nin iyi tanımlı olması için $\forall x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ $([x], [y]) = ([x'], [y']) \Rightarrow [x.y] = [x'.y']$ olmalıdır.

Şimdi $x = x' = \sqrt{2}, y = \dfrac{3}{2}, y' = \dfrac{1}{2}$ alalım. $x - x' = 0 \in Z, y - y' = 1 \in Z$ olduğundan $[x] = [x'], [y] = [y']$ yani $([x], [y]) = ([x'], [y'])$ elde ederiz. Fakat $x \cdot y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, x'.y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ve $xy - x'y' = \sqrt{2} \notin Z$ olduğundan,

$$[x.y] \neq [x'.y']$$

elde ederiz. Bu da f nin iyi tanımlı olmadığın yani kısacası fonksiyon olmadığını gösterir.