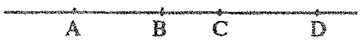
DÖRTGENLERİ TANIYALIM (II)

HÜSEYİN DEMİR*

Harmonik Dörtgenler : Kiriş dörtgenlerinden olan harmonik dörtgenler birkaç türlü tanımlanabiliyor.

A, B, C, D bir doğru üzerinde bu sırada alınan dört nokta olsun (Şekil 1)



Şekil 1

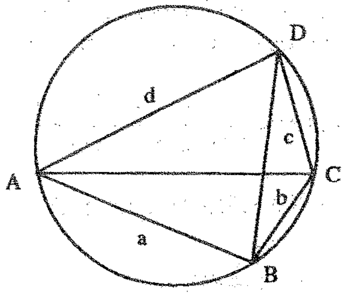
Eğer

$$\frac{|BA|}{|BC|} = \frac{|DA|}{|DC|} \tag{14}$$

eşitliği varsa B, D için $[AC]$ yi harmonik olarak bölüyor denir. Bu durumda A, C nin de $[BD]$ yi harmonik olarak böldüğü ispatlanabilir. Buna göre A, B, C, D sıralı dörtlüsüne *harmonik dörtlü* denir.

Her doğru, merkezi sonsuzda olan bir çember olarak düşünülürse harmonik dörtlüyü çemberde de tanımlayabiliriz :

A, B, C, D bir çember üzerinde bu sırada alınan dört nokta ve (14) eşitliği bu noktalar için geçerli ise, $ABCD$ kirişler dörtgenine harmonik bir dörtgen adı verilir (Şekil 2).



Şekil 2

Buna göre (14) ten

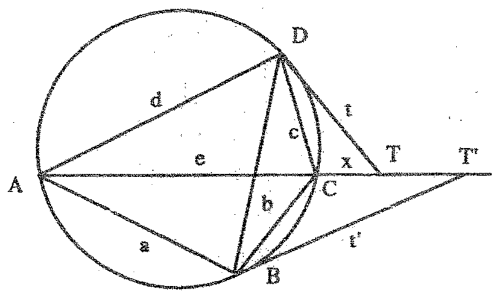
$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} \Rightarrow ac = bd \tag{14'}$$

elde edilir. Özetle, karşılıklı kenar uzunluklarının çarpımı eşit olan bir dörtgen harmonik bir dörtgendir.

Harmonik dörtgenlere ilişkin iki özelik vereceğiz. Bu özeliklerden herbiri harmonik dörtgenlerin tanımı olarak alınabilir.

Teorem 1 : Harmonik bir dörtgende bir köşegenin uç noktalarından çevrel çembere çizilen teğet doğrular öteki köşegenin doğrusu üzerinde kesişirler.

İspat D ve C den çevrel çembere çizilen teğet doğrular AC yi T ve T' de kessin. $T = T'$ olduğunu göstermeliyiz (Şekil 3).



Şekil 3

$$|DT| = t, |CT| = x$$

koyalım. $\Delta CDT \sim \Delta DAT$ benzerliğinden

$$\frac{t}{e+x} = \frac{x}{t} = \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{c}{d}t$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{c^2}{d^2}t^2 = \frac{c^2}{d^2}x(x+e)$$

$$\Rightarrow \quad (1 - \frac{c^2}{d^2})x = \frac{c^2}{d^2}e$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{c^2}{d^2 - c^2}e = \frac{e}{\frac{d^2}{c^2} - 1}$$

çıkar. $x' = |CT'|$ için benzer olarak

$$x = \frac{e}{\frac{a^2}{b^2} - 1}$$

* ODTÜ Matematik Bölümü Emekli Öğretim Üyesi

bulunur ki (14) ten $x = x'$ elde edilir. □

Problem Harmonik bir dörtgen çiziniz.

Çizim: 1. Bir çember ile dışında bir T noktası alınır.

2. T den çembere çizilen teğet doğruların B ve D değme noktaları bulunur.

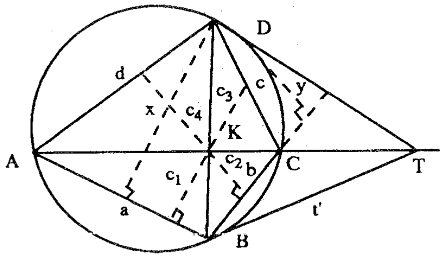
3. T den bir kesen çizilip çemberi kestiği A ve C noktaları bulunur.

$ABCD$ kirişler dörtgeni harmonik olur. □

Not : Eğer T den çizilen kesen BD ye dik alınırsa elde edilen harmonik dörtgen dikgen olur.

Teorem 2 Harmonik bir dörtgende K köşegen noktasının kenarlardan uzaklıkları bu kenarların uzunluklarıyla doğru orantılıdır.

İspat K nin AB, BC, CD, DA dan uzaklıkları r_1, r_2, r_3, r_4 olsun (Şekil 4).



Şekil 4

$$\frac{r_1}{a} = \frac{r_2}{b} = \frac{r_3}{c} = \frac{r_4}{d}$$

olduğunu göstermek istiyoruz.

D nin AB ve CD den uzaklıkları x ve y ise

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{x}{y} = \frac{d \sin A}{c \sin c} = \frac{d}{c} = \frac{a}{b}$$

Öteki orantılar benzer yolla gösterilir. □

a) Kiriş Dörtgeninde Bazı Formüller

$ac + bd, ad + bc, ab + cd$ ifadeleri

Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde köşegenlerin arasındaki açılardan biri θ ise, üçgenlerdeki $bc = 2Rh_a$ formülü ABD ve CDB üçgenlerine uygulandığında

$$\begin{aligned} ad + bc &= 2Rh' + 2Rh'' \\ &= 2Rh = 2Re \sin \theta \end{aligned}$$

bulunur. $ab + cd$ için de benzer formül elde olunarak

$$\begin{aligned} ac + bd &= ef \\ ad + bc &= 2Re \sin \theta \\ ab + cd &= 2Rf \sin \theta \end{aligned} \qquad (15)$$

formülleri elde edilir.

(15) teki eşitlikleri taraf tarafa çarparak

$$\begin{aligned} \sqrt{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)} &= 2Ref \sin \theta \\ &= (ac + bd)^2 2R2S \end{aligned}$$

olup

$$\sqrt{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)} = 4RS \qquad (16)$$

ve

$$\sin \theta = \frac{4RS}{(ac + bd)2R} = \frac{2S}{ac + bd} \qquad (17)$$

elde olunur.

b) Köşe Açıları

Formülleri dört açıdan sadece A için yazacağız. Öteki açılarınkiler kenar uzunluklarının çembersel permütasyonlarıyla kolayca yazılabilir.

DAB üçgenine uygulanan kosinüs teoremi

$$\begin{aligned} 2da \cos A &= d^2 + a^2 - f^2 \\ &= d^2 + a^2 - \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc} \end{aligned}$$

olup sağ taraf ortak paydalı yazılırsa kısaltmalardan sonra

$$\cos A = \frac{d^2 + a^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} \qquad (18)$$

elde edilir. $\cos B, \cos C, \cos D$ (18) den çembersel permütasyonla bulunur. Örneğin

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ba + cd)}$$

Yarı açı formüllerine gelince,

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \frac{A}{2} &= 1 + \cos A \\ &= 1 + \frac{d^2 + a^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} \\ &= \frac{(d + a)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)} \\ &= \frac{(d + a - b + c)(d + a + b - c)}{2(ad + bc)} \end{aligned}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2(u - b)(u - c)}{ad + bc}} \qquad (19)$$

ve benzer olarak

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(u-d)(u-a)}{ad+bc}} \qquad (20)$$

ve bölme ile de

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(u-d)(u-a)}{(u-b)(u-c)}} \qquad (21)$$

Öte yandan $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ den

$$\sin A=\frac{2S}{ad+bc} \qquad (22)$$

c) Köşegen Noktasının Köşelerden Uzaklıkları

$$|KA|=x, |KB|=y, |KC|=e-x$$

$$|KD|=f-y$$

koyduğumuzda, $KAB \sim KDC$ benzerliğinden

$$\frac{a}{c}=\frac{x}{f-y}=\frac{y}{e-x}$$

orantılarından

$$\begin{aligned} cx+ay &= af \\ ax+cy &= ae \end{aligned}$$

denklem sistemini bulunuz. Bu sistemin çözümü ise

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{a^2-c^2}(ae-cf) \\ y &= \frac{a}{a^2-c^2}(af-ce) \end{aligned}$$

olup e ve f nin (18) ile verilen değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} x &= \frac{ac+bd}{4RS}ad \\ y &= \frac{ac+bd}{4RS}ab \end{aligned} \qquad (23)$$

elde olunur.

Sonuç :

$$x:y:z:t=da:ab:bc:cd \qquad (24)$$

d) Köşegen Noktasının Kenarlardan Uzaklıkları

K köşegen noktasının $AB, CD, \ldots$ den uzaklıkları $k_1, k_2, \ldots$ olsun. DAB üçgeninden

$$\frac{1}{2}xy\sin\theta=\frac{1}{2}ah_1$$

eşitliğinde (23) ve (17) kullanılırsa

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{xy}{a}\sin\theta \\ &= \frac{(ac+bd)^2}{a(4RS)^2}a^2bd\frac{2S}{ac+bd} \\ &= \frac{dab(ac+bd)}{8R^2S} \end{aligned}$$

$$h_1=\frac{abcd(ac+bd)}{4R^S S}\frac{1}{c} \qquad (25)$$

Sonuç :

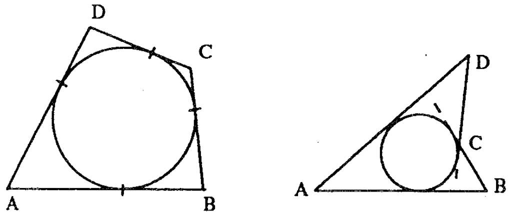
$$h_1:h_2:h_3:h_4:=\frac{1}{c}:\frac{1}{d}:\frac{1}{a}:\frac{1}{b} \qquad (26)$$

Not: (26) ve (28) orantıları daha sade yollardan elde edilebilir.

D. TEĞET DÖRTGENLERİ

Kenar doğruları bir çembere teğet olan bir dörtgene *teğetler dörtgeni* denir.

Aşağıda dışbükey ve içbükey olan iki teğetler dörtgeni çizilmiştir (Şekil 5).



Şekil 5

Teorem: Basit bir $ABCD$ dörtgeninin teğetler dörtgeni olması için gerek ve yeter koşul

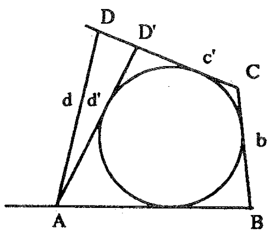
$$a+c=b+d \qquad (27)$$

eşitliğidir.

İspat İspatı dışbükey dörtgenler için veriyoruz. Benzer ispat içbükey olanlar için verilebilir.

a) Gereklilik: Bilinmektedir.

b) Yeterlilik: $ABCD$ dörtgeninde (15) eşitliği geçerli olsun. Dörtgende $[AB], [BC], [CD]$ ye teğet olan çemberi çizelim. (Şekil 6). Eğer $[AD]$ bu çembere teğet değilse teğet olan $[AD']$ doğru parçasını çizelim ($D' \in [CD]$).



Şekil 6

Varsayımdan : $a+c=b+d$
$ABCD'$ den $a+c'=b+d'$
olup taraf tarafa çıkarma yapıldığında

$$c-c'=d-d' \Rightarrow D=D'. \qquad \square$$

Alan Formülleri

Genel alan formülü (10) $ABCD$ teğetler dörtgenine uygulanırsa

$$u=a+c=b+d$$

den

$$\begin{aligned} S^2 &= (u-a)(u-b)(u-c)(u-d) - abcd\cos^2\varphi \\ &= c\,d\,a\ - abcd\cos^2\varphi \\ &= abcd(1-\cos^2\varphi) \end{aligned}$$

$$s=\sqrt{abcd}\sin\varphi \qquad (28)$$

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}dr$$

ise

$$S=ur \qquad (29)$$

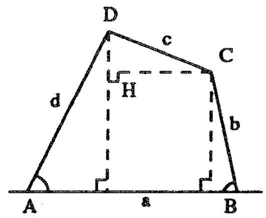
verir.

Teğet Dörtgenleri Üzerine Bir Araştırma

Geometrik bir yeri bulma ile başlayan araştırmamız beklenmedik bir sonuçla bitmiş ve sonuç atelyede bir mekanizma haline getirilmiştir. Çok güzel işleyen bu mekanizmanın teknolojide bir uygulaması olacağına inanıyoruz.

Problem $[AB]$ kenarı sabit tutulan ve a,b,c,d kenar uzunlukları verilen oynak bir $ABCD$ teğetler dörtgeninin I iç merkezinin geometrik yerini bulunuz.

Çözüm $ABCD$ dörtgeni teğetler dörtgeni olduğundan $a+c=b+d$ eşitliği geçerli olup $c=b+d-a$ yazalım ve Şekil 7'den yararlanarak kenar uzunlukları ve A,B açıları arasında bir bağıntı elde edelim.



Şekil 7

$$(b+d-a)^2=h^2+k^2$$

den

$$a^2+b^2+c^2-2a(b+d)=(a-d\cos A-b\cos B)^2$$
$$+(d\sin A-b\sin B)^2$$

yazalım. Parantezleri açıp düzenlemelerden sonra

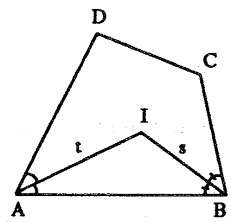
$$bd(1-\cos(A+B))=ad(1-\cos A)+ab(1-\cos B)$$

elde edilir. Bu da

$$bd\sin^2\frac{A+B}{2}=ad\sin^2\frac{A}{2}+ab\sin^2\frac{B}{2}$$

yi verir.

Burada (Şekil 8) açılar IAB üçgeninin I daki dış açısı ve taban açıları olup sinüs teoremi uygulandığında



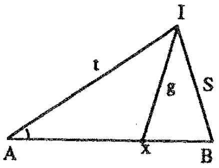
Şekil 8

$$bda^2=ads^2+adt^2$$

bulunur. Her terim $b+d$ ile bölündüğünde

$$\frac{bd}{b+d}a^2=\frac{ad}{b+d}s^2+\frac{ab}{b+d}t^2 \qquad (a)$$

elde edilir. (a) nın sağ tarafında s^2,t^2 nin katsayılarının p,q ile gösterirsek



Şekil 9

$$p+q=a \text{ ve } \frac{p}{a}=\frac{q}{b}$$

den $[AB]$ üzerinde A dan uzaklığı p ve B den uzaklığı q olan bir X noktası tanımlamış oluruz (Şekil 9).X noktası $[AB]$ yi yan kenarların oranında böler.

Böylece

$$\frac{bd}{a+d}a^2 = ps^2 + pt^2 \qquad (a')$$

yi elde etmiş oluruz. Bu eşitlik bize IAB üçgeninde $|IX| = \rho$ ile ilgili şu Stewart bağıntısını hatırlatıyor:

$$a\rho^2 = \frac{bd}{b+d}a^2 - apq$$

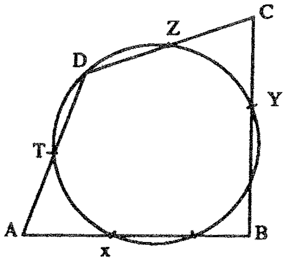
$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho^2 &= \frac{abd}{b+d} - \frac{a^2bd}{(b+d)^2} \\ &= \frac{abd}{(b+d)^2}(b+d-a) = \frac{abcd}{(b+d)^2} \end{aligned}$$

ve

$$\rho = \frac{\sqrt{abcd}}{b+d} \qquad (29)$$

elde edilir. Burada ρ sabit olup I nin X noktasından uzaklığını verir. Başka bir deyişle I nin geometrik yeri X merkezli ve ρ yarıçaplı bir çemberdir. □.

Bu geometrik yerde önemli ve beklenmedik bir sonuç çıkaracağız. Eğer $[AB]$ kenarı yerine $[BC]$ kenarını sabit tutarak I nın geometrik yerini düşünseydik, $[BC]$ yi $a : c$ oranında bölen Y noktasını bulur ve geometrik yerin Y merkezli ve aynı ρ yarıçaplı bir çember olduğunu anlardık. Durum $[CD], [DA]$ kenarları için de aynıdır. $[CD]$ yi $b : d$ ve $[DA]$ yı $c : a$ oranında bölen Z, T noktalarını alır ve sonuç olarak $|IX| = |IY| = |IZ| = |IT|$ yi elde ederdik. (şekil 10) (D noktası çember üzerine düşmeyebilir).



Şekil 10

Sonuç şu oluyor:

Bir teğetler dörtgeninde [AB] yi $\frac{|XA|}{|XB|} = \frac{d}{b}$, $[BC]$ yi $\frac{|YB|}{|YC|} = \frac{a}{c}$, $[CD]$ yi $\frac{|ZC|}{|ZD|} = \frac{b}{d}$ ve $[DA]$ yı $\frac{|TD|}{|TA|} = \frac{c}{d}$ oranlarında bölen X, Y, Z, T noktaları bir Γ çemberi üzerinde bulunur. Bu çemberin merkezi I iç merkezi ve yarıçapı $\rho = \frac{\sqrt{abcd}}{b+d}$ dir.

Dörtgen biçim değiştirdiğinde $X, Y, Z,\ T$ nin çemberdeşliği ve ρ nun sabitliği bozulmaz.

Özelliği somutlaştırmak için atelyede yaptırılan modelin çok güzel çalıştığı görülmüş ve bu mekanizmanın teknolojide yararlı olabileceği düşünülmüştür.

Bu mekanizmada

$|BX| = |BY|, |CY| = |CZ|, |DZ| = |DT|, |AT| = |AX|$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Sonuç

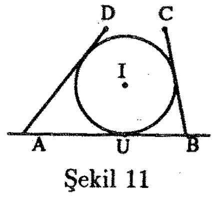
$$\begin{aligned} \rho = \frac{\sqrt{abcd}}{u} \text{ ve} S &= \sqrt{abcd}\sin\varphi \\ &= ur \end{aligned}$$

Buradan da $r = \rho\sin\varphi$ olduğu çıkar.

O halde $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olduğunda ya da teğetler dörtgeni kirişler dörtgeni biçimine girdiğinde Γ çemberi iç çember olur.

Şimdi Γ çemberini kullanarak şu çizim problemini kolayca çözebiliriz:

Problem Bir ℓ doğrusu ile bu doğruya U da teğet bir çember verildiğinde, A, B köşeleri ℓ üzerinde olan ve kenar uzunlukları verilen ve çemberi iç çember kabul eden dışbükey bir $ABCD$ dörtgenini cetvel ve pergelle çiziniz.



Şekil 11

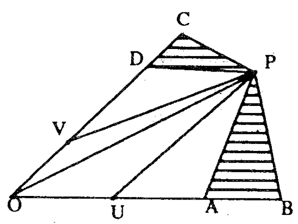
Çözüm: Verilen çember $[I]$ olsun. Teğetler dörtgeninin $\Gamma(I,\rho)$ çemberini çizelim. (Şekil 11) Bu çemberin ℓ yi kestiği noktalardan biri x olsun. (Eğer Γ çemberi ℓ yi kesmezse problemin çözümü yoktur.)

$|XA| = \frac{ad}{b+d}$ ve $|XB| = \frac{ab}{b+d}$ eşitliklerinden A ve B noktaları çizilebilir. A ve B den [I] ye değetler çizilip $[AD] = d, [BC] = b$ olmak üzere D, C köşeleri bulunur. CD doğrusu $[I]$ ye teğet kalır. □

Teorem Bir teğetler dörtgeninde köşegenlerin orta noktaları ve iç merkez doğrudaştır.

İspat için şu yardımcı teoremi kullanacağız:

Yardımcı Teorem Bir poq açısının kenarları üzerinde $[AB], [CD]$ doğru parçaları ile içte bir P noktası alındığında PAB, PCD üçgenlerinin alanları toplamı sabitse P nin geometrik yeri açının bir kirişidir.

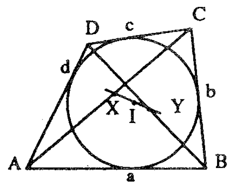


Şekil 12

Kenarlar üzerinde $[AB]$ ye eş $[OU]$ ve $[CD]$ eş $[OV]$ yi alalım. (Şekil 12). POU, POV nin alanları toplamı ilk toplama eşit olup $PUOV$ dörtgeninin alanı sabit kalır. OUV nin alanı değişmediğinden PUV nin alanı sabit kalır. O halde P nin geometrik yeri açının UV ye paralel bir kirişi olur.

Not: Eğer $[AB], [CD]$ doğru parçaları birbirine paralel iki doğru üzerinde alınmış olsaydı geometrik yerin bu doğrulara paralel bir doğru olacağı açıktır.

İspat Teğetler dörtgeni $ABCD$, alanı S, yarıçevresi u, iç yarıçapı $r, [AC], [BD]$ nin orta noktaları X, Y ve iç merkez I ise X, Y, I nın orta noktaları X, Y ve iç merkez I ise X, Y, I nın doğrudaş olduğunu göstermek istiyoruz. (Şekil 13)



Şekil 13

$$\begin{aligned} |XAB| + |XCD| &= \frac{S}{2} \\ |YAB| + |YCD| &= \frac{S}{2} \\ |IAB| + |ICD| &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+c)r \\ &= \frac{1}{2}ur = \frac{S}{2} \end{aligned}$$

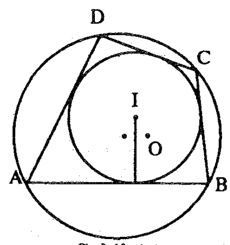
olup Y. Teorem'den doğrudaşlık doğru olur.

E. İKİ MERKEZLİ DÖRTGENLER

Çevrel ve iç merkezi olan bir dörtgene iki merkezli dörtgen denir. Kiriş - teğet dörtgeni de denebilir.

Bir kiriş-teğet dörtgeninde çevrel merkezi O ve yarıçapı R, iç merkezi I ve yarıçapı r ile göstereceğiz. (Şekil 14)

Şu teoremi ispatsız olarak veriyoruz:



Şekil 14

Teorem [0] ve $[I]$ gibi iki çemberi çevrel ve iç çember kabul eden bir dörtgen varsa bunlardan istenilen çoklukta dörtgen vardır.

Üçgenler de kiriş-teğet üçgenleri olup $d = [OI]$ uzaklığı ve R, r arasında Euler'in şu bağıntısı vardır.

$$d^2 = R^2 - 2Rr \tag{30}$$

Acaba kiriş-teğet dörtgeninde d, R, r, arasında ne gibi bir bağıntı vardır? Bağıntıyı Euler'ın öğrencisi olan Fuss elde etmistir:

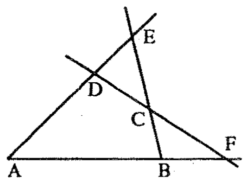
$$\frac{R}{R^2 - d^2} + \frac{1}{R^2 + d^2} = \frac{1}{r^2} \qquad (Fuss) \tag{31}$$

Alan formülü Kenar uzunlukları a,b,c,d olan iki merkezli bir dörtgende

$$S = \sqrt{abcd} \tag{32}$$

F. TAM DÖRTGENLER

Dışbükey bir dörtgenin kenarlarını uzatılmasıyla elde edilen şekle tam dörtgen denir. Başka bir deyişle tam dörtgen herhangi ikisi kesişen dört doğrunun oluşturduğu şekildir.



Şekil 15

$ABCD$ nin kirişler (teğetler) dörtgeni olmasına göre tam dörtgene kirişler (teğetler) tam dörtgeni deriz.

Şekil 15'deki $ABCD$ tam dörtgeninde $[AB], [BD], [EF]$ köşegenlerdir.

İspatsız olarak iki teorem vermekle yetineceğiz.

Teorem 1 (Newton) Bir tam dörtgende köşegenlerin orta noktaları doğudaştır.

Bu doğruya Newton doğrusu denir. Bu orta noktalar EAB uçgeninin orta üçgeninin kenarları üzerinde olup Menelaus Teoremini uygulayabilirsiniz.

Teorem 2 (Miquel) Tam dörtgendeki doğruların üçer üçer alınmasıyla oluşan dört üçgenin çevrel çemberleri noktadaştır.

ALIŞTIRMALAR

1. Çevrel yarıçapı R olan dikgen bir $ABCD$ dörtgeninde

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 4R^2$$

eşitliğini ispatlayınız.

2. Bir ABCD kirişler dörtgeninde köşegen noktasından ve bir kenarın ortasında geçen bir doğru karşı kenara diktir.

3. Dikgen bir kirişler dörtgeninde çevrel merkez ile köşegen noktasının kenarlar üzerindeki dik izdüşümleri çemberdeştir.

4. Dikgen bir harmonik dörtgen bir teğetler dörtgenidir.

5. Şekil 4 teki harmonik dörtgende A, K, S, T noktaları harmonik bir dörtlüdür.

6. Ardışık kenarlarının uzunlukları 75, 68, 40, 51 olan bir kirişler - dörtgeninde

   a. e ve f yi

   b. Köşelerin köşegen noktasından uzaklıklarını

   c. S alanını

   d. Çevrel çapı

hesaplayıp bunların birer tamsayı olduğunu gösteriniz.

Eğlencelik

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 88 \\ 55 & 64 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 44 \\ 55 & 68 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 & 66 \\ 55 & 66 \end{bmatrix}$$

Haydar Altunay