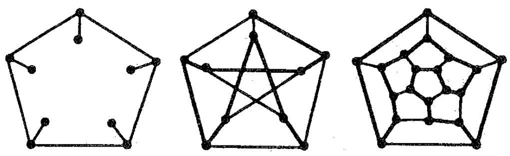
GRAF TEORİSİ (II)

ALİ DOĞANAKSOY*

Geçen sayıdaki yazımızı gezinti, dolaşım, yol, devre gibi tanımlarla tamamlamıştık. Buradan hareketle verilen bir şeklin, elimiz kağıttan kalkmadan ve bir çizdiğimiz çizgiden tekrar geçmeden, çizilip çizilemeyeceğini nasıl anlayabileceğimizi göstermiştik.

Şimdi yeni bir tanım daha veriyoruz: bir graf verildiğinde bütün köşeleri bir ve yalnız bir kere ziyaret eden bir yola Hamilton yolu ve böyle bir devreye de Hamilton devresi denilir. İçinde bir Hamilton devresi bulunan bir grafa da Hamilton grafı denir. Aşağıdaki graflardan birincisinde hiç Hamilton yolu bulunmaz; ikincisinde bir Hamilton yolu vardır ancak Hamilton devresi yoktur; üçüncüsü ise Hamilton grafıdır.



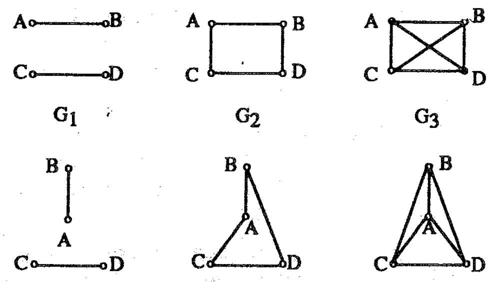
Tanımdan anlaşıldığı üzere bir Hamilton yolunda grafın bütün kenarlarının kullanılması gerekmemektedir. Bir grafın Euler grafı olup olmadığının anlaşılması kolay olduğu halde Hamilton grafı olması konusunda karar vermek çok zor olabilir. İfadesi karmaşık ve uygulaması zor bir kaç gerek şart ve yeter şart bulunmakla birlikte, hali hazırda bir grafın Hamilton olup olmadığını söyleyebilecek bir gerek-yeter şart bilinmemekedir.

Eş Yapılı Graflar

Bir grafı, düzlemde verilmiş noktalar ve bu noktaları bağlayan kirişlerden oluşan bir şekil olarak tanımlamıştık. Ancak graf kavramının bir tanımdan ibaret olmadığını da anlamış olmak gerekir.

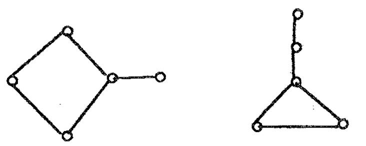
* ODTÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

Düzlemde çizip graf dediğimiz şeklin düğümleri genellikle bir problemin çeşitli konumlarına ve kenarları da bu konumlar arasındaki ilişkiyi temsil eder. Bu durumda konumlar ve ilişkiler verildiğinde bir graf çizebiliriz. Ancak, iki kişinin çizdiği şekiller, aynı bilgiyi yansıtmakla birlikte, farklı geometrik yapıda olabilir. Örneğin, dört futbol takımının lig usulü aralarında karşılaştıklarını düşünelim. Takımlar A, B, C, D olsun. Birinci hafta karşılaşmaları $A-B$ ve $C-D$, ikinci hafta $A-C$ ve $B-D$; üçüncü hafta da $A-D$ ve $B-C$ olsun. G_1 grafının noktaları takımları, kirişleri de ilk hafta yapılan karşılaştırmaları göstersin. G_2 grafının noktaları aynı, kirişleri ise ilk iki hafta sonunda yapılan karşılaşmaları, G_3 ün kirişleri ise ilk üç hafta sonunda yapılan karşılaşmaları göstersin. İki farklı kişi şu grafları elde edebilir :



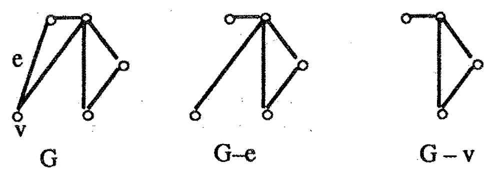
Görüldüğü gibi aynı durumu yansıtan iki farklı şekil ortaya çıkabiliyor. Ancak, bu şekillerden birinin noktalarının yerlerini ve kirişlerinin şeklini değiştirerek diğerini elde edebiliriz. Aynı durumu yansıtan, yani aynı yapıya sahip graflara eşyapılı graflar adı verilir.

İki graf verildiğinde, bunların eşyapılı olup olmadığını anlamak uğraştırıcı olabilir. Hemen aklımıza gelen bazı gerek şartlar şunlardır : G_1 ve G_2 grafları verilmiş olsun, bunların eşyapılı olabilmesi için düğüm sayıları, kenar sayıları ve lokal dereceleri küçükten büyüğe dizerek elde edilen dizileri de aynı olmalıdır. Ancak bu şartlar yeterli değildir. Örneğin, aşağıdaki G_1 ve G_2 grafları eşit sayıda düğüm ve kirişe hatta aynı lokal derece dizilerine sahip olmakla beraber eş yapılı değildir.

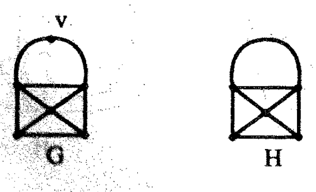


Graflar Üzerinde İşlemler

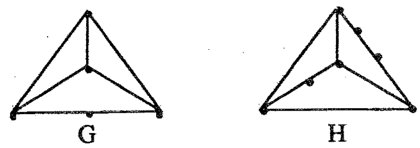
Bir G grafı verildiğinde, bu grafın düğümleri ve kirişleri ile oynayarak yeni yeni graflar elde edebiliriz. Üzerinde çalıştığımız problemin özelliklerine bağlı olarak bazı kirişlerin veya bazı düğümlerin önemi olmayabilir. Geçen sayımızda ele aldığımız 'Kurt, Kuzu, Lahana' problemini çözerken ortaya çıkan grafta istenmeyen düğümleri atmıştık. Bir G grafından e kirişini silerek elde ettiğimiz grafı $G - e$ ile gösteririz. Verilen bir G grafında herhangi bir e kirişini silme işlemine kiriş-silme diyeceğiz. Görüldüğü üzere, kiriş-silme işleminde hiç bir güçlük yoktur. Benzer şekilde, G grafından bir v düğümünü sildiğimizi düşünelim. Bu düğümün silinmesinden sonra, buna bağlı kirişlerin birer ucu açıkta kalacaktır ki, böyle bir münasebetsizliğe, tanım itibarı ile izin verilmemektedir. O halde, $G - v$ ile göstereceğimiz graf, G grafından v ile birlikte v ye bağlı bütün kirişlerin de atılmasıyla elde edilir.



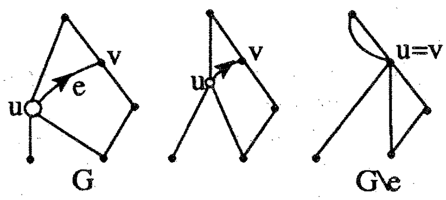
Bazı problemlerin tartışılmasında, lokal derecesi 2 olan düğümler önem taşımayabilir. Örneğin aşağıdaki graflardan birisi Euler grafı ise diğeri de Euler grafıdır. Yani, G nin Euler grafı olup olmadığını araştırırken v düğümü hiç bir rol oynamamaktadır.



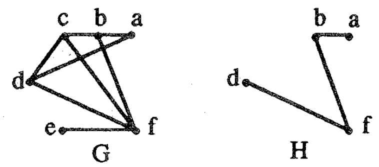
Bu durumda v düğümüne, bağlı olduğu kirişleri tek bir kiriş kabul edip bu yeni kirişin bir noktası gözü ile bakmış oluyoruz. O halde bu işleme 'düğüm-söndürme' diyebiliriz. Yalnız, derecesi ikiden farklı düğümleri söndürüemiyeceğimizi unutmamak gerekir. Söndürme işleminin tersi de 'düğüm şişirme' olarak tanımlanabilecek işlemdir. Yani, durduk yerde, bir kirişin her hangi bir noktasını şişirip düğüm haline getirmeye 'düğüm şişirme' diyeceğiz. Eğer iki graf söndürme ve şişirme işlemleri ile birbirlerine eş oluyorsa bunlara homeomorf graflar denir. Şekildeki G ve H grafları homeomorftur.



Son olarak bir G grafının bir kirişinin büzülmesini tarif edelim. G grafında e kirişi u ve v düğümlerini birleştiren kiriş olsun. Bu grafı, yeniden ama e kirişini biraz kısaltarak çizelim. Bir sonraki adımda, e yi biraz daha kısaltalım. Böylece devam edersek, her adımda e biraz daha kısalacak, u ve v birbirlerine biraz daha yaklaşacaktır. Nihayet, e tamamen ortadan kalktığında, u ve v çakışmış olacaktır. İşte bu işleme e kirişinin büzüşmesi diyoruz ve ortaya çıkan grafı da $G\backslash e$ ile gösteriyoruz. G ve H graflarından G, bir büzüşme ile H ye dönüşebiliyorsa, G grafı H .ye büzüşebilir deriz.



Bir G grafının düğüm ve kiriş kümeleri $V(G)$ ve $E(G); H$ grafının da $V(H)$ ve $E(H)$ olsun. Eğer $V(H) \subset V(G)$ ve $E(G) \subset E(H)$ ise, H ye, G nin bir alt grafı diyoruz. Bu durum, $H \subset G$ ile gösterilir.

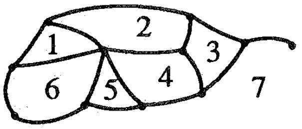


H⊂G

Düzlemsel Graflar

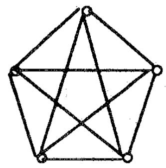
'Üç ev-üç kuyu' problemini temsil eden grafımız $K_{3,3}$ idi ve bu grafı nasıl çizersek çizelim muhakkak iki kirişinin kesişeceğini göstermiştik. Bir graf, kirişleri hiç kesişmeyecek tarzda çizilebilirse 'düzlemsel graf' diye nitelenir. Kirişlerin kesişmesi, $K_{3,3}$ te olduğu gibi, kaçınılmazsa 'düzlemsel olmayan graf' tanımı ortaya çıkar. K_4'ü  şeklinde çizdiğimizde iki kiriş kesişmektedir ancak bu grafı yeniden,  şeklinde, kirişler kesişmeyecek tarzda çizebiliriz. O halde K_4 düzlemsel graftır. Yazının devamını okumadan, K_5 in düzlemselliğini araştırmanızı tavsiye ederiz.

Her düzlemsel graf, düzlemde kirişleri ile sınırlı bölgeler tanımlar. Bu bölgelerin her birine grafın yüzü diyoruz ve bunların sayısını da f ile gösteriyoruz. Burada dikkat edilecek nokta, bölgelerden birinin 'sonsuz-bölge' olması ve f ile gösterilen sayıya bunun da dahil edilmesidir. Örneğin K_4 ün dört adet yüzü vardır. Aşağıdaki grafın da tam 7 tane yüzü vardır.



Euler Formülü Her düzlemsel ve bağlantılı G grafının köşeleri sayısı v, kirişleri sayısı e ve yüzleri sayısı $f, v+f=e+2$ eşitliğini sağlar.

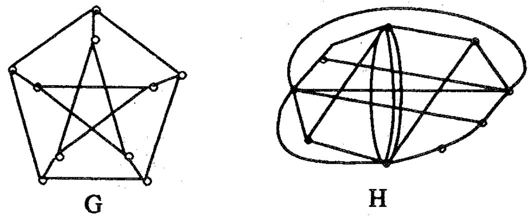
Şöyle bir soru soralım : 73 düğümlü, 214 kirişli düzlemsel basit bir graf var mıdır? Soru üzerinde çalışmadan önce, basit bir grafın ilmeği bulunmayan ve iki düğümü arasında en çok bir kiriş bulan bir graf olduğunu hatırlayalım. Yukarıdaki soruyu, çözmek yerine, daha genel olan şu soruyu soralım : n adet düğüm verildiğinde, basitlik ve düzlemsellik bozulmadan en fazla kaç tane kiriş çizebiliriz? Şu nokta görülmelidir ki, en fazla sayıda kiriş çizildiğinde bütün yüzler üçgensel olur. (Üçgensel yüz, üç kirişle sınırlı yüz demektir). Aksi takdirde, üçgensel olmayan yüze ait köşegenleri kiriş olarak ilave edip daha çok sayıda kiriş çizilebilir. Bütün yüzleri üçgensel olan grafta, her yüze ait üç kiriş olduğundan ve her kiriş tam iki yüze sınır olduğundan $3f=2e$ olur. Kirişlerin sayısı en fazla değilse $3f<2e$ olur. O halde Euler formülü gereği, her düzlemsel basit graf için $e \leq 3(v-2)$ geçerli olur. İlk sorduğumuz soruya geri dönelim, $v=73$ ise $e \leq 3(73-2)=213$ olmalıdır. Yani 73 düğümlü, 214 kirişli düzlemsel basit bir graf çizilemez. Şimdi de K_5 grafını düşünelim :



K_5

K_5 için, $v=5, e=10$ dur. $3(v-2)=9<10=e$ olduğundan, K_5 in düzlemsel olmayacağı anlaşılır. $K_{3,3}$ ün düzlemsel olmadığı bu eşitsizlikten elde edilemez. Ancak aynı muhakeme tarzı ile devam ederek daha genel eşitsizlikler elde edilebilir. Bir grafta her yüz en az k adet kirişle sınırlıysa $kf \geq 2e$ olacaktır. Euler formülünü de kullanarak $e \leq k\frac{v-2}{k-2}$ ifadesini buluruz. Burada, eşitlik ancak bütün yüzlerin tam k adet kirişle sınırlı olması halinde geçerlidir. Şimdi yine $K_{3,3}$ ü düşünelim. $K_{3,3}$ iki-parçalı bir graf olduğundan içinde hiç üçgen olamaz. O halde elde ettiğimiz son ifadeyi $k=4$ için yazabiliriz: $e \leq 2(v-2)$. Eğer $K_{3,3}$ düzlemsel ise bu ifadenin doğru olması gerekir. $K_{3,3}$ için $e=9$; $v=6$ dır ve $2(v-2)=8<9=e$ olduğundan $K_{3,3}$ düzlemsel olmaz.

Düzlemsel graflardan bahsederken $K_{3,3}$ ve K_5 üzerinde ısrarla durmamız boşuna değil. Önce, okuyucu verilen herhangi bir grafın düzlemselliğinin araştırılmasının zorluk derecesini anlamalıdır. Örneğin aşağıdaki graflar için ne söylenebilir? Bunları kirişler kesişmeden yeni baştan çizebilir miyiz? Cevabın kolayca verilemeyeceği hissedilmektedir.



G H

Elimizde planar olmadığını bildiğimiz bir K grafı olsun. Eğer bir G grafı, K yi alt graf olarak barındırıyorsa veya G nin K ye homeomorf bir alt grafı varsa veya K ye büzüşebilir bir alt grafı varsa G nin de düzlemsel olamayacağı aşikardır. Bu halde, K_5 veya $K_{3,3}$ e homeomorf bir alt grafı bulunan veya bunlardan birine büzüşebilir bir alt grafı bulunan bir graf düzlemsel değildir. Peki, bunun tersi de doğru mudur. Yani, diyelim ki elimizde bir G grafı var ve gösterebiliyoruz ki bu grafta K_5 e veya $K_{3,3}$ e homeomorf veya büzüşebilir bir altgraf bulunmamaktadır. Diyebilir miyiz ki G düzlemsel dir? Elbette graf teorisi metodları ile incelemeden bu soruya kesin cevap veremeyiz. Ancak en basit mantık ilkesi ile, G hakkında bir şey söylenemeyeceğini ileri sürebiliriz. Aslında bu sorunun cevabı olumludur. Yani bir G grafının düzlemselliği teşhis etmek için $K_{3,3}$ ve K_5 tahlilleri yeterlidir. Bu sonuç graf teorisinin en güzel teoremlerinden birisidir.

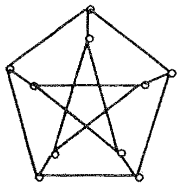
Teorem (Kuratowski) Bir G grafı için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir :

a) G düzlemseldir;

b) G nin K_5 veya $K_{3,3}$ e homeomorf alt grafı yoktur;

c) G nin K_5 veya $K_{3,3}$ e büzüşebilir alt grafı yoktur.

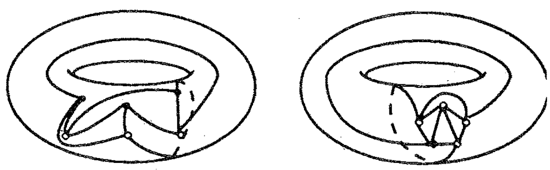
Örneğin, aşağıdaki graf (Petersen grafı), K_5 e büzülebildiğinden bir düzlemsel olmayan graftır.



G

Kuratowski teoremi gereği, Petersen grafının K_5 veya $K_{3,3}$ e homeomorf bir alt grafı bulunmalıdır. K_5 in her köşesindeki lokal derece 4 olduğundan, bütün köşe dereceleri 3 olan Petersen grafında K_5 e homeomorf bir alt graf aramak beyhude olacaktır. O zaman, Petersen grafında mutlak surette, $K_{3,3}$ e homeomorf bir alt graf bulunacaktır. Bunu bulmaya çalışmak iyi bir alıştırma olabilir.

Okuyucu gözden kaçırmamalıdır ki, düzlemsellik hakkında söylediklerimiz de düzlemseldir. Yani, bütün bu söylenenler bir grafı düzlem (veya küre) üzerine çizmemiz halinde geçerli olur. Örneğin simit yüzeyinde hem 'üç kuyu, üç ev' problemi çözülebilir hem de K_5, kirişleri kesişmeden çizilebilir.



HIBIR DERGİSİNDEN ALINMIŞTIR

• Dün gece ödevimi yapmadım, başka kim yapmadı? Pisagor! Pisagor nerde, hipotenüse çıktı. Hipotenüs nerde, tanjant kesti. Tanjant nerde, birim çembere düştü. Birim çember nerde, vektör içti. Vektör nerde, sonsuza kaçtı. Sonsuz nerde, yandı bitti kül oldu...

Ertuğrul Kanmaz - İZMİR