A41. Bir ABC dik üçgeninde [BC] hipotenüsü, D_1, D_2, D_3, D_4 noktalarıyla eş beş parçaya bölünmüştür. $[AD_i] = d_i$ $(i = 1,2,3,4)$ olmak üzere,

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$$

toplamını $a = |BC|$ türünden hesaplayınız.
(Hazırlayan : Bahri Ünal)

Çözüm : AD_2D_3 ve AD_1D_4 üçgenlerinde kenarortay teoreminden sırasıyla

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = d_2^2 + d_3^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3a}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = d_1^2 + d_4^2$$

bu denklemleri toplayarak da

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = \frac{6}{5}a^2$$

bulunur.

A42. Kenar uzunlukları $|AB| = b\sqrt{2}$, $b = |BC|$ olan dik bir dörtgende [CD] üzerine dıştan bir yarıçember çizilmiştir. Yay üzerindeki bir P olmak üzere PA, PB doğruları CD yi ve F de keserse

$$|CE|^2 + |DF|^2 = |CD|^2$$

olduğunu gösteriniz.
(P. Fermat)

Çözüm: PA, PB doğruları CD yi sırasıyla E,F noktalarında kesmekte. Yarıçemberin merkezini O, P den CD ye indirilen dikmenin ayağını Q ile gösterelim. Gösterimde bir kolaylık olmak üzere $x = |QF|$, $y = |FC|$ yazalım. $\measuredangle COP$ açısının da ölçüsünü α ile gösterelim. Diğer bir kolaylık olarak $b = \sqrt{2}$ yani $|AB| = |CD| = 2$ alalım. Böylece

$$\frac{x}{|PQ|} = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{x+y}{\sin\alpha + \sqrt{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha + \sqrt{2}}$$

buradan da

$$y = \frac{(1-\cos\alpha)\sqrt{2}}{\sin\alpha + \sqrt{2}}$$

bulunur. Buradan da

$$|DF| = 2 - y = 2 - \frac{(1-\cos\alpha)\sqrt{2}}{\sin\alpha + \sqrt{2}}$$

benzer şekilde

$$|CE| = 2 - \frac{(1-\cos\alpha)\sqrt{2}}{\sin\alpha + \sqrt{2}}$$

bulunur. Bu suretle

$$|CE|^2 + |DF|^2 = 8 - 8\frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha + \sqrt{2}} + \frac{4(1-\cos\alpha)\sqrt{2}}{\sin\alpha + \sqrt{2}}$$

buradan da

$$1 + \cos^2\alpha = 2 - \sin^2\alpha = (\sqrt{2} + \sin\alpha)(\sqrt{2} - \sin\alpha)$$

gözönünde tutularak

$$|CE|^2 + |DF|^2 = 4 = |CD|^2$$

bulunur.

A43. $$\sqrt[6]{4\sqrt[3]{\frac{3}{2}} - 5\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

eşitliğini kanıtlayınız.
(Ramanujan)

Çözüm (!): Okuyucu bu satırlarda bir çözümden ziyade, bir yanlışlıklar komedyası bulacak. Bir kere hemen işaret edelim ki büyük matematikçi S. Ramanujan'a (1887 -1920) ait olup, aslında

$$\sqrt[6]{4\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 5\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

şeklinde olan denklemi biz

$$\sqrt[6]{4\sqrt[3]{\frac{3}{2}} - 5\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

olarak yayınlamışız. Sadık ve çilekeş okuyucularınız yanlış veya eksik basılmış problemlerle uğraşmaya alışık olduğundan bu beyan o kadar şaşırtıcı olmayabilir. Sonra, bir çözüm bulup yayınlamak zamanı gelince (zaten gecikmiş sayıları yetiştirme telaşı içindeydik !) perişan problem dosyamızda bu denkleme ait esas metinden başka bir kayıt, bir çözüm v. b. olmadığını gördüm. Kendim bir ispat vermeye çalışırken önce basım hatasını buldum ; arkadan da "doğru" sunun da yanlış olabileceğini düşünmeye başladım.

S. Ramanujan bu denklemi bir problem olarak Journal of Indian Mathematical Society'de (cilt 11, sayfa 199) yayınlamış. Ortadoğu Teknik Üniversitesi kütüphanesinde bu dergini 26. cildinden öncekileri bulunmadığı için, bu bilgiyi ve denklemi ben Ramanujan'ın yayınlanmış bütün eserlerinin toplandığı "Collected Works of Srinivasa Ramanujan" (G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar ve B. M. Wilson'ın editörlüğü altında, Chelsea Publishing Company, New York 1962, ilk basım 1927) adlı kitapta buldum. Ramanujan'ın problem şeklinde yayınladığı 30-40 kadar denklem büyük ilgi görmüş, tanınmış, tanınmamış birçok matematikçi çözüm göndermiş. Hayretle gördüm ki çözüldüğüne dair bir kayıt olmayan çok az sayıda problem arasında bizimki de var !

Denklemin doğru olmadığı şöyle görülebilir:

Denklemin sağ ve sol taraflarını sırasıyla X_{sa} ve X_{so} şeklinde gösterelim. Kolaylık olarak $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ yerine sırasıyla a ve b yazalım. Artı miktarlar üzerinde çalışacağımız için kuvvet ve (artı) kök alma işlemlerini serbestçe kullanacağız.

Hemen

$$X_{sa} = \frac{a^2 - a + 1}{b^2} = \frac{a^3 + 1}{b^2 (a+1)} = \frac{b}{a+1}$$

buradan da

$$X_{sa} = (X_{sa}^3)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{3}{3 + 3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{1}{1 + a + a^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{a-1}{a^3 - 1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (a-1)^{\frac{1}{3}} (\sqrt[3]{2} - 1)^{\frac{1}{3}}$$

bulunur. Ramanujan' ın eşitliğinin doğru olması için gerek ve yeter şart

$$X_{sa}^{18} = X_{so}^{18}$$

dir. Şimdi

$$X_{so}^{18} = (4\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 5\sqrt[3]{\frac{1}{3}})^3$$

$$= 64\frac{2}{3} - 240\frac{\sqrt[3]{4}}{3} + 300\frac{\sqrt[3]{2}}{3} - 125\frac{1}{3}$$

$$= 1 + 100\sqrt[3]{2} - 80\sqrt[3]{4}$$

dür. Diğer tarafdan

$$X_{sa}^{18} = (\sqrt[3]{2} - 1)^6$$

$$= 4 - 6.2\sqrt[3]{4} + 15.2\sqrt[3]{2} - 20.2 + 15.\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{2} + 1$$

$$= -35 + 24\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$$

Demek ki Ramanujan' ın denklemi doğru olsaydı

$$1+100\sqrt[3]{2}-80\sqrt[3]{4}=-35+24\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}$$

olması veya

$$83\sqrt[3]{4}-76\sqrt[3]{2}-36=0$$

olmalı, yani $\sqrt[3]{2}$, $83y^2-76y^2-36=0$ denkleminin bir kökü olmalıdır ki, bunun imkansız olduğunu biliyoruz.

Teorinin tatmin etmediği okurları da rahatlatalım : Ali Doğanaksoy bilgisayarla $X_{sa} \sim 0.638..$, $X_{so} \sim 0.549$ değerlerini buldu.

A44. Bir ABC üçgeninin kenarları üzerine dıştan BCXX′, CAYY′ ABZZ′ kareleri çizilirse alanlar için

$$|XYZ| = |X'Y'Z'|$$

eşitliğini gösteriniz.
(Hazırlayan : H. Demir)

Çözüm: Bir UVW üçgeninin alanını |UVW| ile gösterelim. (Aslında yönlü alan kullanmak gerekiyor. Biz üçgenin hiç bir açısının 45° den küçük olmadığı en basit hali alıyoruz.) Her zaman ki gibi a = |BC|, b = |CA|, c= |AB| yazarsak

$$\begin{aligned}|XYZ| &= |ABC|+|BCX|+|CAY|+|ABZ|+|XYC| +|YZA|+|ZXB|\\ &= |ABC| + \tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\\ &+\tfrac{1}{2}a(b\sqrt{2})\sin(\tfrac{5\pi}{4}-C)\\ &+\tfrac{1}{2}b(c\sqrt{2})\sin(\tfrac{5\pi}{4}-A)\\ &+\tfrac{1}{2}c(a\sqrt{2})\sin(\tfrac{5\pi}{4}-B)\end{aligned}$$

ve benzer şekilde de

$$\begin{aligned}|X'Y'Z'| &= |ABC|+|BCX'|+|CAY'|+|ABZ'|+|X'Y'C| +|Y'Z'A|+|Z'X'B|\\ &= |ABC| + \tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\\ &+\tfrac{1}{2}(a\sqrt{2})b\sin(\tfrac{5\pi}{4}-C)\\ &+\tfrac{1}{2}(b\sqrt{2})c\sin(\tfrac{5\pi}{4}-A)\\ &+\tfrac{1}{2}(c\sqrt{2})a\sin(\tfrac{5\pi}{4}-B)\end{aligned}$$

bulunur ki, bundan da

$$|XYZ| = |X'Y'Z'|$$

olduğu aşikardır.

A45. Bir ABC üçgeninde [BC] kenarının orta noktası D_0 a göre simetrik iki nokta D ve D′ olsun. Bu noktalardan geçen d ve d′ doğruları CA ve AB kenarları E, F, E′, F′ de kessin. EF′ ve E′F doğrularının, BC yi D_0 a göre simetrik iki noktada kestiklerini gösteriniz.

Çözüm: $EF' \cap \{BC\} = \{Y\}$ ve $E'F \cap \{BC\} = \{Z\}$ olsun. ABC üçgeninde EF, E′F′ doğrularına nazaran Menelaus teoreminden sırasıyla

$$\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}\cdot\frac{DB}{DC}=1$$

$$\frac{E'C}{F'A}\cdot\frac{F'A}{F'B}\cdot\frac{D'B}{D'C}=1$$

gene ABC üçgeninde EF′, E′F doğrularına nazaran Menelaus teoreminden sırasıyla

$$\frac{EC}{EA}\cdot\frac{F'A}{F'B}\cdot\frac{YB}{YC}=1$$

$$\frac{E'C}{E'A}\cdot\frac{FA}{FB}\cdot\frac{ZB}{ZC}=1$$

Bulunur. Bu denklemlerden,

$$\frac{DB}{DC}=\frac{D'B}{D'C}$$

olduğu da hatırlanarak kolayca

$$\frac{YB}{YC}=\frac{ZB}{ZC}$$

elde edilir.

Y41. [AB] çaplı bir çemberin AB ye K noktasında dik bir [CD] kirişi çiziliyor ve [BD] yayında bir P noktası alınıyor. PK doğrusunun çemberi kestiği diğer nokta E ve $PA \cap CD = F$ ise $|EK| < |AF|$ olduğunu gösteriniz.
(P.Erdös)

Çözüm: Çemberin yarıçapını R ile, $\angle PAB$ açısının ölçüsünü de α ile gösterelim. Sunuşu kolaylaştırmak maksadıyla,

$x = |KE|$
$y = |FA|$
$u = |PK|$
$v = |PF|$
$q = |AK|$

yazalım. Kolaylıkla

$$y + v = 2R\cos\alpha$$

$$y = \frac{q}{\cos\alpha}$$

yazılabilir. Ayrıca K nin çembere göre kuvvetinden

$$xu = q(2R - q)$$

ve AKP üçgeninde kosinüs teoreminden

$$u^2 = (y + v)^2 + q^2 - 2q(y + v)\cos\alpha$$

bunu ilk denklemle birleştirerek de

$$u^2 = 4R^2\cos^2\alpha + q^2 - 4Rq\cos^2\alpha$$

veya

$$u^2 = (2R - q)^2\cos^2\alpha + q^2\sin^2\alpha$$

elde ederiz. Böylece

$$y^2 - x^2 = \frac{q^2}{\cos^2\alpha} - \frac{q^2(2R - q)^2}{(2R - q)^2\cos^2\alpha + q^2\sin^2\alpha}$$

ve nihayet

$$y^2 - x^2 = q^4\frac{\tan^2\alpha}{(2R - q)^2\cos^2\alpha + q^2\sin^2\alpha} \geq 0$$

bulunur. Eşitliğin ancak ve yalnız $q = 0$ yani $K = A$ halinde mümkün olduğunu belirtelim.

Y42. Aşağıdaki denklemi sağlayan m ve n pozitif tam sayılarını bulunuz :

$$1! + 2! + \ldots + n! = m^2.$$

Çözüm: Denklemin $n = 1, m = 1$ ve $n = 3, m = 3$ şeklinde iki basit çözümü olduğunu işaret ettikten sonra başka bir çözüm olmadığı kolayca görülebilir : $n = 2,4$ hallerinde $1! + 2! + 3!+\ldots+n!$ in tamkare olmadığını biliyoruz. Diğer taraftan da $n \geq 5$ için, $1!+2!+3!+\ldots+n!$ sayısının onlu yazılımda son hanesi daima $1!+2!+3!+4!+5!=33$ in onlu yazılımda son hanesi olan 3 olmalıdır. Halbuki hiçbir tamkare tamsayının onlu yazılımda son hanesi 3 olamaz.

Y43. Bir ABCD paralelkenarında [AB] tabanına paralel bir doğru [AD] ve [BC] kenarlarını E ve F noktalarında kesiyor. G, [AF] üzerinde seçilmiş herhangi bir nokta olmak üzere, $CG \cap AB = P$ ve $DG \cap EF = Q$ ise $PQ \parallel BC$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: FAB üçgeni ve PC doğrusuna Menelaus teoremi uygulanarak

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{CB}{CF} \cdot \frac{GF}{GA} = 1$$

gene EAF üçgeni ve QD doğrusuna Menelaus teoremi uygulanarak

$$\frac{QE}{QF} \cdot \frac{GF}{GA} \cdot \frac{DA}{DE} = 1$$

bulunur. Bu iki denklemden

$$\frac{CB}{CF} = \frac{DA}{DE}$$

kullanılarak

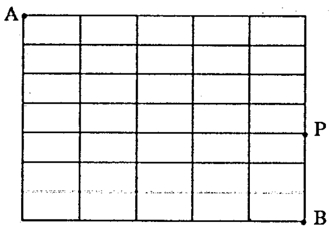
$$\frac{PA}{PB} = \frac{DE}{DF}$$

buradan da PQ nun AD ye paralelliği elde edilir.

Y44. Aşağıdaki 5 x 7 lik ızgara üzerinde sadece sağa ve aşağıya hareket edebilen bir nokta A dan yola çıkıp B ye varacaktır. Her kavşakta sağa veya aşağı eşit olasılıkla yönelen bu noktanın P den geçme olasılığı nedir.

$\binom{p+q}{q}$ ile verilir. Bu durumda, A dan B ye giden yolların sayısı $\binom{12}{5} = 792$, P ye giden yolların sayısı da $\binom{9}{5} = 126$ olur. Ancak, A dan

Çözüm : p x q boyutlarındaki bir ızgarada sol üst köşeden, sağ alt köşeye, yalnızca sağa ve aşağı yönelerek giden yolların sayısı tabii ki



B ye giden bir yolun P den geçme olasılığı $\frac{126}{792} \sim 0.159$ değildir. Zira bu yolların seçimi eşit ağırlıklı değildir. Örneğin, önce üst kenarı sonra da sağ kenarı takip eden yolun seçilme olasılığı $\frac{1}{32}$, önce sol kenarı sonra da alt kenarı takip eden yolun seçilme olasılığı $\frac{1}{128}$ dir. Bu göz önüne alınarak hesap yapılırsa A dan B ye giden yolların P den geçme olasılığı $\frac{1}{2}$ olarak bulunur.

Y45. İç açı ortayları [AD], [BE], [CF] olan bir ABC üçgeninde $\angle EDF = 90°$ ise A açısı kaç derecedir.

Çözüm : $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ yazalım. $\angle BAC$ açısının ölçüsünü de α ile gösterelim. A noktasını başlangıç noktası alarak vektör gösterimiyle,

$$E = \frac{c}{a+c}C$$

$$F = \frac{b}{a+b}B$$

$$D = \frac{b}{b+c}B + \frac{c}{b+c}C$$

olup

$$\overrightarrow{DF} = F - D = \frac{c}{a+c}C - \frac{b}{b+c}B - \frac{c}{b+c}C$$

$$= \frac{c(b-a)}{(a+c)(b+c)}C - \frac{b}{b+c}B$$

aynı şekilde de

$$\overrightarrow{DF} = F - D = \frac{b(c-a)}{(a+b)(b+c)}B - \frac{c}{b+c}C$$

bulunur. Böylece, $B.B = c^2$, $C.C = b^2$, $B.C = bc\cos\alpha$ da kullanılarak, küçük bir hesapla

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = \frac{b^2c^2}{(b+c)^2(a+b)(a+c)} \cdot A$$

$$A = (2a^2 + 2bc)\cos\alpha - (b^2 + c^2 - 2a^2)$$

buradan da

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha$$

hatırlanarak

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

yani

$$\alpha = 120°$$

çıkar.