VİETA TEOREMİNİN PROBLEM ÇÖZÜMLERİNE UYGULANMASI

CAFER VELİEV

Vieta teoremi bir çokterimlinin (polinomun) kökleri ile katsayıları arasındaki bağıntıları ifade eder. Önce çokterimlilerin bazı özelikleri üzerinde kısaca duralım.

Gerçel ya da (karmaşık) x değişkeninin

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$

şeklinde olan bir fonksiyonuna, x değişkeninin çokterimlisi (daha doğrusu çokterimli fonksiyon) denir. Burada $n \in \mathbb{N}$ *ve* $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$*dir.* $a_0, a_1, ..., a_n$ *P(x) çokterimlisinin katsayıları olarak isimlendirilir.* $a_n \neq 0$ *olduğunda başkatsayı adını alır ve n sayısına P(x) çokterimlisinin derecesi denir.*

P(x) = 0 denkleminin çözümüne P(x) çokterimlisinin kökü denir.

Teorem: *P(x) ve Q(x) herhangi iki çokterimli ve* $Q(x) \not\equiv 0$ *olsun. Bu halde öyle bir tek S(x) ve R(x) çokterimlileri vardır ki* $P(x) = S(x)\,Q(x) + R(x)$ *eşitliği doğrudur ve burada R(x) in derecesi Q(x) in derecesinden küçüktür. Eğer burada P(x) ve Q(x) çokterimlilerin katsayıları gerçel ise S(x) ve R(x) in katsayıları da gerçeldir. Eğer P(x) ve Q(x) in katsayıları rasyonel sayılar ise S(x) ve R(x) in katsayıları da rasyonel sayılardır. Eğer P(x) ve Q(x) in katsayıları tamsayılarsa ve buna ek olarak Q(x) in baş katsayısı 1 ya da –1 ise, S(x) ve R(x) in katsayıları da tam sayılardır.*

Q(x) = x – a olsun. Bu halde

$P(x) = (x - a)\,S(x) + r, \quad r = P(a)$

dir, yani P(x) çokterimlisi x – a ikiterimlisine bölündüğünde kalan P(a) dır. Buradan şöyle bir sonuç ortaya çıkar : P(x) çokterimlisinin x – a iki terimlisine bölünebilmesi için gerek ve yeter koşul a sayısının P(x) in kökü olmasıdır.

Eğer P(x) çokterimlisi $(x - a)^k$ çokterimlisine bölünürse, ancak $(x - k)^{k+1}$ çokterimlisine bölünemezse a sayısına P(x) çokterimlisinin k katlı kökü denir. Çokterimlinin köklerinin tümünü yazarken, bir kök kaç katlı ise o kadar tekrarlayarak ifade edilir.

Çokterimliler cebrinin **esas teoremi** aşağıdaki gibidir:

$n \geq 1$ dereceli her çokterimlinin en az bir karmaşık kökü vardır.

Bu teoremden de şöyle bir sonuç çıkar.

$n \geq 1$ dereceli her çokterimlinin n karmaşık kökü vardır. P(x), n inci dereceden bir çok terimli, $x_1, x_2, ..., x_n$ *onun kökleri ise* $P(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ *kuralı geçerlidir.*

Vieta teoremi ve onun tersi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Diyelim ki $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ çokterimlisinin kökleri $x_1, x_2, ..., x_n$ sayılarıdır. O halde

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

...

$$x_1 x_2, \ldots, x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

yazılabilir ve tersine x_1, x_2, ..., x_n sayıları için yukarıdaki eşitlikler doğru ise, bu halde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sayıları P(x) çokterimlisinin kökleridir.

İkinci derece üçterimlisi için Vieta teoremi ve tersi aşağıdaki gibi ifade olunur. *Eğer x_1 ve x_2 sayıları $x^2 + px + q$ üçterimlisinin kökleri ise $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$ dur ve tersine x_1 ve x_2 sayıları için $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$ olursa, x_1 ve x_2 sayıları $x^2 + px + q$ üçterimlisinin kökleridir. Bu teorem okullarda matematik derslerinde ispat edilir.*

n = 3 hali: Eğer x_1, x_2, x_3 sayıları *$P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ çokterimlisinin kökleri ise,*

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = q$$

$$x_1 x_2 x_3 = -r$$

eşitlikleri ve bu ifadenin tersi doğrudur.

İspat: x_1, x_2, x_3 P(x) in kökleri ise

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

olur. Bu yazılıştaki parantezleri çarparak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$P(x) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3.$$

P(x) in bu ifadesini $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ ifadesi ile karşılaştırırsak istenilen eşitlikler bulunur.

Tersine, x_1,x_2,x_3 sayıları için Vieta teoreminin ifadesinde verilen eşitlikler doğru ise

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + px^2 + qx + r \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + \\ &\quad + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 \\ &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \end{aligned}$$

yazabiliriz ve $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = 0$ dır, yani x_1, x_2, x_3 sayıları P(x) in kökleridir.

Şimdi Vieta teoreminin, bazı alıştırmaların çözümüne uygulanmasına bakalım.

Bu alıştırmaların bir kısmı olimpiyat problemleridir.

Problem 1. *Köklerinden biri $(3 + \sqrt{5})/2$ sayısı olan tam katsayılı ikinci derece denklemini kurunuz.*

Çözüm : İkinci derece denkleminin ikinci kökü olan x_2 sayısı öyle olmalıdır ki, hem $x_2 + (3 + \sqrt{5})/2$ hem de $x_2 (3 + \sqrt{5})/2$ sayıları tamsayılar olsun. Böyle bir sayı $(3 + \sqrt{5})/2$ sayısının "eşleniği" olan $(3 - \sqrt{5})/2$ sayısıdır. Kökleri $x_1 = (3 + \sqrt{5})/2$ ve $x_2 = (3 - \sqrt{5})/2$ olan ikinci derece denklemi şöyle olur:

$$p = -(x_1 + x_2) = -3, \quad q = x_1 x_2 = 1;$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Problem 2. *$u = (3 + \sqrt{5})/2$ için $u^5 - 2u^4 + 3u^3 - 10u^2 - 7u + 4$ ifadesini hesaplayınız.*

Çözüm : $(3 + \sqrt{5})/2$ nin beşinci kuvvetini hesaplamak zor olduğu için bu sayının sağladığı $x^2 - 3x + 1 = 0$ denkleminden yani $u^2 = 3u - 1$ den yararlanacağız. Bu yolla u^3, u^4 ve u^5 i u ya göre doğrusal olarak ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} u^3 &= u^2 . u = (3u - 1)u = 3u^2 - u \\ &= u(3u - 1) - u = 8u - 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^4 &= u^3.u = (8u - 3)u = 8u^2 - 3u \\ &= 8(3u - 1) - 3u = 21u - 8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^5 &= u^4. u = (21u - 8)u = 21u^2 - 8u \\ &= 21(3u - 1) - 8u = 55u - 21. \end{aligned}$$

$u^5 - 2u^4 + 3u^2 - 10u^2 - 7u + 4 = 55u - 21$
$-2(21u - 8) + 3(8u - 3) - 10(3u - 1) - 7u + 4 = 0$

Problem 3. $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^9 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^9$ sayısının *tamsayı olduğunu ve 3 e bölündüğünü ispatlayınız.*

Çözüm: $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ olsun.

Bilindiği gibi α ve β sayıları $x^2 - 3x + 1 = 0$ denkleminin kökleridir. Yani $\alpha^2 = 3\alpha - 1$, $\beta^2 = 3\beta - 1$ dir. Şimdi $a_n = \alpha^n + \beta^n$, $n=0,1,2,...$ dizisine bakalım.

$a_0 = 2$

$a_1 = 3$

$a_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (3\alpha - 1) + (3\beta - 1) = 3(\alpha + \beta) - a_0$

$$\begin{aligned}
3a_{n+1} - a_n &= 3(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - (\alpha^n + \beta^n) \\
&= \alpha^n(3\alpha - 1) + \beta^n(3\beta - 1) \\
&= \alpha^n . \alpha^2 + \beta^n . \beta^2 \\
&= \alpha^{n+2} + \beta^{n+2}
\end{aligned}$$

yani

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$

dir. $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ tamsayılar olduğundan, $a_{n+1} = 3a_{n+1} - a_n$ indirgeme bağıntısına göre, bütün a_n ler tamsayılardır. Diğer taraftan $a_1 = 3$ dür ve 3 e bölünebilir. Buna göre $a_3 = 3a_2 - a_1$ de 3 e bölünebilir ve tüme varım yöntemini uygulayarak, a_{2n-1} 3 e bölündüğünden $a_{2n+1} = 3a_{2n} - a_{2n-1}$ de 3 e bölünür. Yani n tek sayı ise a_n 3 e bölünebilir. O halde a_9 da 3 e bölünebilir.

Problem 4. *$a_n = [(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n]/2\sqrt{3}$ veriliyor. a_n, $n \geq 0$ değerlerinin tamsayı olduğunu ispatlayınız. a_n sayısının 3 e bölündüğü bütün n leri bulunuz.*

Çözüm : $u = 2 + \sqrt{3}$, $v = 2 - \sqrt{3}$ olsun; $a_n = (u^n - v^n) / 2\sqrt{3}$. u, v sayıları $x^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminin kökleridir, yani $u^2 = 4u - 1$, $v^2 = 4v - 1$ dir. Bu denklemlerden yararlanarak, üçüncü örnekte olduğu gibi, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ bağıntısı ispatlanabilir. Burada ilk birkaç terimini elde edelim.

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 15$, $a_4 = 56$, $a_5 = 209$, $a_6 = 780$,...

a_n sayılarının 3 e bölünmesiyle ortaya çıkan kalanlar şunlardır :

$r_0 = 0$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$, $r_4 = 2$, $r_5 = 2$, $r_6 = 0$,...

Yani

$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \pmod 3$ için kalan

$$r_{n+2} = \begin{cases} r_{n+1} - r_n & \text{eğer } r_{n+1} \geq 0 \text{ ise} \\ r_{n+1} - r_n + 3 & \text{eğer } r_{n+1} - r_n < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Bu kuraldan

$r_{6k} = r_0 = 0$, $r_{6k+1} = r_1 = 1$, $r_{6k+2} = r_2 = 1$

$r_{6k+3} = r_3 = 0$, $r_{6k+4} = r_4 = 2$, $r_{6k+5} = r_5 = 2$

ve $r_{6k} = r_{3k} = r_0 = r_3 = 0$ elde edilir. Böylece 3 e bölünen n ler için a_n de 3 e bölünür.

Problem 5. *$x^3 - 6x^2 + ax + a$ çokterimlisinin x_1, x_2, x_3 kökü*

$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$

denklemini sağlıyorsa, a sayısını bulunuz.

Çözümü : $x = y + 3$ konumundan sonra çokterimli aşağıdaki şekli alır :

$$\begin{aligned}
P_1(y) &= P(y + 3) = (y + 3)^3 - 6(y + 3)^2 + a(y + 3) + a \\
&= y^3 + 3y^2 + (a - 9)y + (4a - 27).
\end{aligned}$$

Vieta teoremine göre, $y_1 = x_1 - 3$, $y_2 = x_2 - 3$, $y_3 = x_3 - 3$ ve $P_1(y_1) = P_1(y_2) = P_1(y_3) = 0$ olmak üzere

$y_1 + y_2 + y_3 = -3$, $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = a - 9$, $y_1y_2y_3 = 27 - 4a$

dır.

$y^3 + 3y^2 + (a - 9)y + (4a - 27) = 0$

denkleminden

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = -3(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + (9 - a)(y_1 + y_2 + y_3) + 3(27 - 4a)$$

yazabiliriz.

$$y_1^2 + y_1^2 + y_3^2 = (y_1 + y_2 + y_3)^2 - 2(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)$$

ve

$$y_1^3 + y_1^3 + y_3^3 = (x_1 - 3)^3 + x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$$

olduğunu kullanarak

$$-3(27-2a) + (9-a)(-3) + 3(27-4a) = 0$$

ve $a = -9$ buluruz.

Problem 6. *a, b, c tamsayılar ve a>0 olduğuna göre $ax^2 + bx + c$ üçterimlisinin (0,1) aralığında iki farklı kökü varsa $a \geq 5$ olduğunu ispatlayınız. $a = 5$ olduğunda yukarıdaki koşula uyan bir çift b, c sayısı bulunuz.*

Çözüm : Kabule göre katsayıları tamsayı olan $P(x) = ax^2 + bx + c$ üçterimlisinin a katsayısı pozitiftir, ve kökleri farklı olup (0,1) aralığındadır :

$$0 < x_1 < x_2 < 1, \quad b^2 - 4ac > 0.$$

Vieta teoremine göre

$$\frac{c}{a} = x_1x_2 \in (0,1), \quad -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 > 0$$

yani

$0 < c < a$, $b < 0$ dır. Diğer taraftan $a > 0$ ve $x_1, x_2 \in (0,1)$ olduğundan $P(1) = a + b + c > 0$ ve dolayısıyla

$$a + c > -b > 0, \ (a + c)^2 > b^2, (a - c)^2 > b^2 - 4ac > 0$$

bulunur. a, b, c nin tamsayılar olduğunu hatırlarsak $b^2 - 4ac \geq 1$ ve $(a - c)^2 \geq 2$ buradan da $a - c \geq 2$ elde edilir. $a \leq 4$ olduğunu varsayarsak a, c çiftinin alabileceği değerler.

1) $a = 4$, $c = 2$; 2) $a = 4$, $c = 1$, 3) $a = 3$, $c = 1$

olabilir. $(a - c)^2 > b^2 - 4ac > 0$; eşitsizliğinden şunlar bulunur:

1) $4 > b^2 - 32 > 0$, $36 > b^2 > 32$;

2) $9 > b^2 - 16 > 0$, $25 > b^2 > 16$;

3) $4 > b^2 - 12 > 0$, $16 > b^2 > 12$.

Yukarıdaki üç eşitsizliğin, tamsayılar kümesinde çözümü yoktur.

Demek ki $a \geq 5$ olmalıdır. $a = 5$ olduğunda

1) $c = 3$, $4 > b^2 - 60 > 0$, $64 > b^2 > 60$;

2) $c = 2$, $9 > b^2 - 40 > 0$, $49 > b^2 > 40$;

3) $c = 1$, $16 > b^2 - 20 > 0$, $36 > b^2 > 20$.

Üçüncü eşitsizlikten $b = -5$ çözümü bulunur. $5x^2 - 5x + 1 = 0$ üçterimlisinin kökleri olan $(5 - \sqrt{5})/10$ ve $(5 + \sqrt{5})/10$ sayıları (0,1) aralığına aittir.

Problem 7. *x_1, x_2, x_3 sayıları*

$$x_1 + x_2 + x_3 = a \ , \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{a}$$

denklemlerini sağlasın. x_1, x_2, x_3 sayılarından en az birinin a ya eşit olduğunu ispat ediniz.

Çözümü : İkinci denklemden

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 / a$$

buluruz. Şimdi kökleri x_1, x_2, x_3 olan üçterimliyi kuralım :

$$p = -(x_1 + x_2 + x_3) = -a,$$

$$q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3/a = -\frac{r}{a}$$

$$P(x) = x^3 + px^2 + qx + r = x^3 - ax^2 - \frac{r}{a}x + r$$

$$= (x - a)\left(x^2 - \frac{r}{a}\right)$$

Buradan $P(a) = 0$, yani çokterimlinin köklerinden birinin a olduğu elde edilir.

2. Çözüm yolu : $x_3 \neq a$ olduğunu varsayalım. $x_1 + x_2 + x_3 = a$ olduğundan $x_1 + x_2 \neq 0$ dır. $x_1 + x_2 + x_3 = a$ denkleminden x_3 sayısını x_1 ve x_2 cinsinden ifade edip

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{a}$$

denklemi ile birlikte gözönüne alalım.

$$a[x_1x_2 + x_3(x_1+x_2)] = x_1x_2x_3 ;$$

$$a[x_1 x_2 - (a-(x_1+x_2))(x_1+x_2)] = x_1x_2(a-(x_1+x_2))$$

$$a^2 - a(x_1+x_2) + x_1x_2 = 0, \ (x_1 - a)(x_2 - a) = 0$$

Yani x_1, x_2 sayılarından en az biri a ya eşittir.

Problem 8. *$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ifadesini çarpanlara ayırınız.*

Çözümü : Kökleri x, y, z olan $P(t) = t^3 + pt^2 + qt + r$ çokterimlisine bakalım. $t = x$, $t = y$, $t = z$ için $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$ olduğuna göre

$$x^3 + y^3 + z^3 + p(x^2 + y^2 + z^2) + q(x + y + z) + 3r = 0,$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3r = -p(x^2 + y^2 + z^2) - q(x + y + z)$$

dir. p, q, r yi x, y, z cinsinden ifade edersek

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \\ &\quad - (xy + xz + yz)(x + y + z) \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \end{aligned}$$

bulunur.

Not: Dikkat ediniz ki

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = [(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]/2 \geq 0$$

dır. Eğer $x, y, z \geq 0$ olursa $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$ olur. $x = \sqrt[3]{a}$, $z = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$ konumunu yaparsak, bilinen

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Problem 9. *$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ve $x + y + z = 1$ olduğunda*

$$0 \leq xy + xz + yz - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

eşitsizliklerini ispat ediniz.

Çözümü : Soldaki eşitsizlik kolaylıkla ispat olunabilir :

$$\begin{aligned} xy + xz + yz - 2xyz &= xy(1-z) \\ &\quad + xz(1-y) + yz \geq 0 \end{aligned}$$

Kökleri x, y, z olan çokterimli

$$P(t) = t^3 + pt^2 + qt + r = (t-x)(t-y)(t-z)$$

dir. Burada $q = xy + xz + yz$, $r = -xyz$ ve dolayısıyla

$$xy + yz + zx - 2xyz = q + 2r$$

dir. İkinci eşitsizliği ispat etmek için $q + 2r \leq \frac{7}{27}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

1) $x \leq \frac{1}{2}$, $y \leq \frac{1}{2}$, $z \leq \frac{1}{2}$ olursa

$3\sqrt[3]{abc} \leq a + b + c$ eşitsizliğini de kullanarak

$$\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) \leq \left[\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - (x + y + z)\right)\right]^3 = \frac{1}{6^3}$$

$$\frac{q + 2r}{2} \leq \frac{1}{6^3} + \frac{1}{8} = \frac{7}{2.27} ; \ q + 2r \leq \frac{7}{27}$$

yazabiliriz.

2) x, y, z sayılarından biri $\frac{1}{2}$ den büyük olsun. ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ ve $x + y + z = 1$ olduğundan x, y, z sayılarından ikisi aynı anda $\frac{1}{2}$ den büyük olamaz). Bu halde

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) \leq 0$$

ve

$$\frac{q + 2r}{2} < \frac{1}{8}, \ q + 2r \leq \frac{1}{4} = \frac{7}{28} < \frac{7}{27}$$

bulunur.

Problem 10.

$$x + y + z = 1$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$
$$x^5 + y^5 + z^5 = 1$$

denklem sistemini çözünüz.

Çözümü : Kökleri, x, y, z olan çokterimliyi düşünelim. $p = -(x + y + z) = -1$,

$q = xy + yz + zx = [(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)]/2 = -1$

$P(t) = t^3 - t^2 - t + r$; $r = -xyz$.

Henüz sabit terim belli değil. x, y, z sayıları $P(t) = 0$ denkleminin çözümleri olduğundan, bu sayılar için $t^3 = t^2 + t - r$ denklemi doğrudur. O halde

$$\begin{aligned} t^5 &= t^2t^3 = t^2(t^2 + t - r) = t^3(t + 1) - rt^2 \\ &= (t^2 + t - r)(t + 1) - rt^2 \\ &= t^3 + t^2 + (t - r)(t + 1) - rt^2 \\ &= t^2 + t - r + t^2 + (1 - r)t - r - rt^2 \\ &= (3 - r)t^2 + (2 - r)t - 2r \end{aligned}$$

sonucunu $t = x$, $t = y$, $t = z$ için kullanarak

$x^5 + y^5 + z^5 = (3-r)(x^2+y^2+z^2) + (2-r)(x+y+z) - 6r$

ya da

$1 = (3 - r)3 + (2 - r)1 - 6r$; $r = 1$.

buluruz. Böylece

$P(t) = t^3 - t^2 - t + 1 = (t - 1)^2(t + 1)$

olur. $P(1) = P(-1) = 0$ dır ve 1, P(t) nin iki katlı bir köküdür. Demek ki sistemin çözüm kümesi $\{(1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1)\}$ olacaktır.

Problem 11. *$(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.*

Çözümü : $x - y = u$, $y - z = v$, $z - x = w$ konumunu yaparsak $u + v + w = 0$ olur. Kökleri u, v, w olan çokterimliyi kuralım:

$P(t) = t^3 + qt + r$, $q = uv + vw + wu$, $r = -uvw$.

$t = u$, $t = v$, $t = w$ için $t^3 = -(qt + r)$ olduğundan

$t^5 = t^2t^3 = -(qt + r)t^2 = -qt^3 - rt^2 = q(qt+r) - rt^2$

ve

$t^5 = -rt^2 + q^2t + qr$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} u^5+v^5+w^5 &= -r(u^2+v^2+w^2)+q^2(u+v+w)+3qr \\ &= -r(u^2+v^2+w^2) + 3qr \\ &= uvw(u^2+v^2+w^2) - 3(uv+vw+wu)uvw \end{aligned}$$

$$= uvw\left[u^2+v^2+w^2 - 3\frac{(u+v+w)^2-(u^2+v^2+w^2)}{2}\right]$$

$$= \frac{5}{2}uvw(u^2+v^2+w^2)$$

olur. Yani

$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$

$= \frac{5}{2}(x-y)(y-z)(z-x)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$

$= 5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$

bulunur.

Problem 12. *x, y, z pozitif sayıları $xyz > 1$,*

$$x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$ *eşitsizliklerini*

sağlıyor. Bu sayılardan birinin 1 den küçük olduğunu ispat ediniz.

Çözümü : Kökleri x, y, z olan çokterimli

$P(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 + pt^2 + qt + r$

olsun. Varsayımımıza göre

$x, y, z > 0$, $-r = xyz > 1$,

$-p = x+y+z < \dfrac{xy + yz + zx}{xyz} = \dfrac{q}{-r}$, $q > pr$

dir. Demek ki

$P(1) = 1 + p + q + r > 1 + p + pr + r = (1 + p)(1 + r)$

olur. $-r > 1$ olduğundan $1 + r < 0$ dır. Diğer taraftan $-p = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} > 3 > 1$ den $1 + p < 0$ ve $P(1) = (1 + p)(1 + r) > 0$ yani $(1 - x)(1 - y)(1 - z) > 0$ dır. Bu eşitsizlikten x, y, z nin pozitif sayılar olmasını ve $xyz > 1$ koşulunu sağlamasını kullanarak bu sayılardan birinin 1 den küçük, ikisinin ise 1 den büyük olduğunu görürüz.

Dilimiz türkçesine Okay ÇELEBİ tarafından çevrilmiştir.