DÖRTGENLERİ TANIYALIM (I)

HÜSEYİN DEMİR

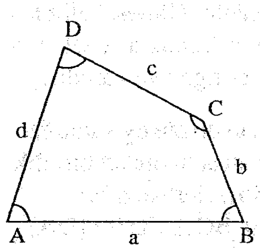
Dörtgenler, üçgenden sonra işlenen çokgenlerdir. Batı dillerinde, üçgenler üzerine birçok kitap ve sayıları 10000'e yakın makale yazılmıştır. Dörtgenler üzerinde de pek çok araştırma yapılarak çok ilginç özelikler elde edilmiştir. Biz bunlardan bazılarına değinmekle yetineceğiz. Uzay dörtgenlerini (aykırı dörtgenleri) konumuzun dışında bırakıyoruz.

SINIFLAMA

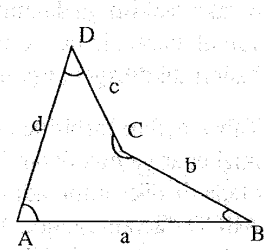
Herhangi üç doğrusal olmayan A,B,C,D gibi sıralı dört nokta verildiğinde [AB], [BC], [CD], [DA] doğru parçalarının birleşimine dörtgen deniliyor. A,B,C,D noktalarına *köşeler,* bu doğru parçalarına *kenarlar* deniyor.

Köşelerin alınışına göre dörtgenler *basit* ve *basit olmayan* dörtgenler olarak iki sınıfı ayrılıyor.

Basit dörtgenler

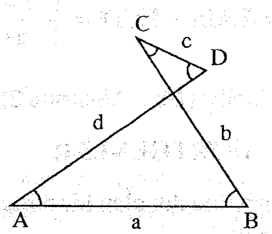


Dışbükey



İçbükey

Basit olmayanlar



Kelebek

Kelebek dörtgenlere, çapraz ya da yıldıl dörtgenler de denir. Şekilde görüldüğü üzere basit dörtgenler dışbükey ve içbükey olmak üzere ikiye ayrılır. Dışbükey (içbükey) bir dörtgende herhangi bir doğru dörtgeni en çok iki (dört) noktada kaser. Her ikisinin de bir iç ve dış bölgesi vardır. Basit olmayan bir dörtgende komşu olmayan iki kenar kesişirler ve şekil kelebek'e benzediği için kelebek adını alır.

Herhangi bir ABCD dörtgeninde kenar uzunluklarını

$a=|AB|,\ b=|BC|,\ c=|CD|,\ d=|DA|$

olarak gösteririz. Karşılıklı köşeleri birleştiren doğru parçalarına da *köşegen* denir. Bunların uzunluklarını da

$e = |AC|,\ f = |BD|$

olarak gösteririz.

Açılara gelince pozitif ölçüleri

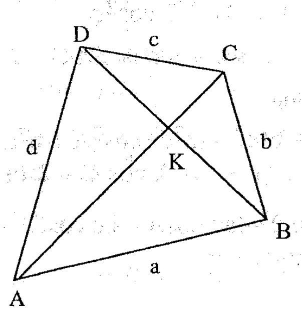
$A = \sphericalangle BAD,\quad B = \sphericalangle CBA,\quad C = \sphericalangle DCB,$

$D = \sphericalangle ADC$

olarak yazarız.

Dışbükey dörtgenlerde bazı simgeler

$S = |ABCD|$ (dörtgenin alanı)



Bir köşegeni kenar kabul eden üçgenlerin alan, çevrel yarıçap ve iç yarıçaplarını S_A, S_B, S_C, S_D; R_A, R_B, R_C, R_D ve r_A, r_B, r_C, r_D; ile gösteriyoruz. Örneğin S_A dediğimizde A köşesinin karşısındaki köşegeni kenar kabul eden ABD üçgeninin alanı anlaşılacaktır.

Bir köşesi K köşegen noktası olan üçgenlerin alanları, çevrel yarıçapları ve iç yarıçapları için S_a, S_b, S_c, S_d ; R_a, R_b, R_c, R_d ve r_a, r_b, r_c, r_d simgelerini kullanacağız.

Basit dörtgenlerin alan formülü

Kenarları verilen bir dörtgen çeşitli biçimler alabileceğinden alanının kenarlar türünden ifade edilemeyeceği açık olup

$$\varphi = \frac{A+C}{2} \text{ ya da } \varphi' = \frac{B+D}{2}$$

parametresini seçelim. $\varphi + \varphi = \pi$ olup $\cos^2\varphi = \cos^2\varphi'$ dir.

Teorem : Kenar uzunlukları a,b,c,d, yarı çevresi u ve parametresi $\varphi = \frac{1}{2}$ (A+C) olan basit bir ABCD dörtgeninin alanı için

$$\boxed{S^2 = (u-a)(u-b)(u-c)(u-d) - abcd\cos^2\varphi} \quad (1)$$

formülü geçerlidir.

İspat: $2S = S_A + S_C = ad\sin A + bc\sin C$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 4S^2 &= a^2d^2\sin^2 A + b^2c^2\sin^2 C + 2abcd\sin A\sin C\\ &= a^2d^2(1-\cos^2 A) + b^2c^2(1-\cos^2 C) + 2abcd\sin A\sin C\\ &= a^2d^2 + b^2c^2 - a^2d^2\cos^2 A - b^2c^2\cos^2 C + 2abcd\sin A\sin C\end{aligned}$$

olup,

$$1 + \cos(A+B) = 2\cos^2\varphi$$

$$\Rightarrow 1 + \cos A\cos C - \sin A\sin C = 2\cos^2\varphi$$

kullanıldığında

$$\begin{aligned}4S^2 &= a^2d^2 + b^2c^2 - (a^2d^2\cos^2 A + b^2c^2\cos^2 C) + 2abcd\,(1 + \cos A\cos C - 2\cos^2\varphi)\\ &= (ad+bc)^2 - (ad\cos A - bc\cos C)^2 - 4\,abcd\cos^2\varphi\end{aligned}$$

$$16S^2 = (2ad+2bc)^2 - (2ad\cos A - 2bc\cos c)^2 - 16\,abcd\cos^2\varphi$$

elde edilir.

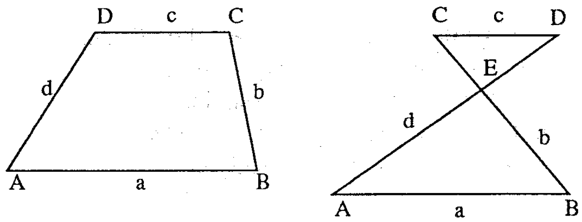
İkinci parantezde kosinüs teoremi uygulandığında $(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$ bulunur ve sağ taraftaki iki kare farkı çarpanlara ayrılıp kısaltmalar yapılırsa (1) elde edilir.

Şimdi, aynı tür elemanlar (kenarlar, köşegenler, açılar) arasına birtakım koşullar koyarak özel bazı dörtgenleri elde edeceğiz.

A. YAMUKLAR

Karşılıklı iki kenar paralel olan bir dörtgene *yamuk* denir.

Bu kenarlar [AB] ve [DC] ise bunlara *taban* adı verilir. Öteki iki kenara da yan kenarlar denir.



İçbükey bir dörtgen yamuk olamayacağından dışbükey ve kelebek yamuktan söz edilebilir.

Dışbükey bir yamukta karşılıklı öteki iki kenar paralel olabilir ya da olmayabilir. Olması halinde yamuk paralelkenar adını alır. Bunun da özel halleri dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve karedir.

Taban açıları birbirine eş olan dışbükey yamuğa ikizkenar yamuk denir. Taban açılarından biri dik olana da dikyamuk adı verilir. Herhangi bir ABCD dikyamuğunda $AB \perp BC \perp CD$ ise [DA] ya hipotenüs denilebilir.

Dışbükey bir yamuğun alanı

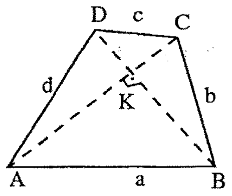
$$S = |ABCD| = |EAB| + |ECD| = \frac{1}{2}\,\frac{a^2+c^2}{a+c}\,h$$

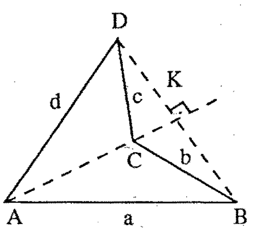
olduğu gösterilebilir (Bkz. Alıştırma 2).

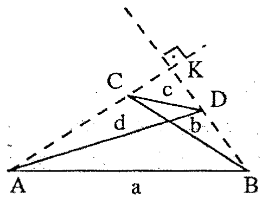
B. DİKGEN DÖRTGENLER

Köşegenleri birbirine dik olan bir dörtgene *dikgen dörtgen* deriz.

Üç sınıfta da dikgen dörtgen var.







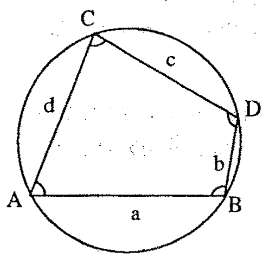
Teorem: Dikg ABCD $\Leftrightarrow a^2+c^2=b^2+d^2$

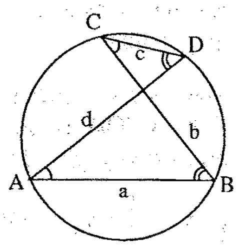
İspat: B ve D nin AC üzerindeki dik izdüşümleri B′, D′ ise $a^2-b^2=|AB'|^2-|CB'|^2$, $d^2-c^2=|AD'|^2-|CD'|^2$ den dikg ABCD $\Leftrightarrow a^2+c^2=b^2+d^2$

C. KİRİŞ DÖRTGENLERİ

Köşeleri bir çember üzerinde bulunan bir dörtgene *kirişler dörtgeni* diyoruz.

Sadece dışbükey ve kelebek dörtgenler kirişler dörtgeni olabilir.





A+C=B+D (2) A=C, B=D (3)

Kirişler dörtgeninde açılar için (2) ve (3) bağıntıları sırasıyla dışbükey ve kelebek dörtgenler için geçerli olup gerek ve yeter koşullardır.

Kirişler dörtgeninde ilginç bir teorem Batlamyus (M.S. 130) teoremidir:

Teorem: (Batlamyus) Dışbükey bir kirişler dörtgeninde, karşılıklı kenarların uzunluklarının çarpımlarının toplamı köşegen uzunluklarının çarpımına eşittir.

$$ac + bd = ef \qquad (4)$$

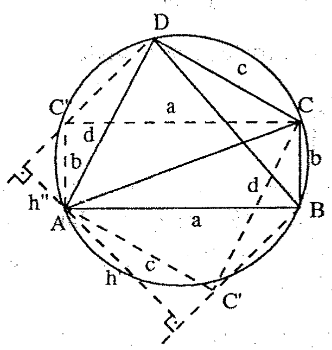
İspat: İspatta, kenar uzunlukları a,b,c olan bir üçgende

$$bc = 2Rh_a \qquad (5)$$

bağıntısından yararlanacağız. Bu amaçla C den DA ya paralel [CC′] kirişini çizip [DC] yi [AC′] ye taşıyalım. AC′B üçgeninde (5) i kullanarak

$$ac = 2Rh' \qquad (5')$$

yazalım.



Bu sefer C den BA ya paralel [CC″] kirişini çizip [BC] yi |AC″| ye taşıyalım ve ADC″ üçgenine (5) i uygulayalım. Şu eşitlik elde edilir:

$$bd = 2Rh'' \qquad (5'')$$

BC′ //DC″ olduğu BCD ve C′AC″ yaylarının eşliğinden kolayca görülür. (5′) ve (5″) nün taraf tarafa toplanmasıyla

$$ac + bd = 2R\,(h' + h'') = 2Rh$$

çıkar. Burada h uzunluğu, paralel olan BC′ , DC″ doğrularının uzaklığıdır.

Öte yandan e = |AC| = |DC′| olup DC′B üçgenine (5) uygulandığında

$$ef = 2Rh$$

bulunur ki ac + bd = ef eşitliği ispatlanmış olur.

Batlamyus'tan çok sonraki matematikçiler şu genel teoremi elde etmişlerdir :

Teorem: Basit bir ABCD dörtgeninde

$$ac + bd \geq ef \qquad (6)$$

eşitsizliği geçerli olup eşitlik ancak dörtgenin kirişler dörtgeni olması halinde sağlanır.

Bu teoremin evirtimle yapılan ispatı dergimizde yer almıştır [Cilt II, Sayı 2, s. 8].

Batlamyus teoreminin en basit uygulaması olarak şu teoremi elde edebilirsiniz:

Teorem: Eşkenar bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin A karşısındaki yay üzerinde alınan bir P noktasının A dan uzaklığı, B ve C den olan uzaklıklarının toplamına eşittir.

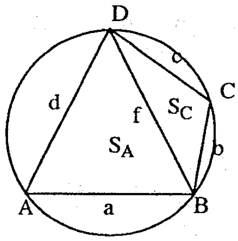
Şimdi bir kirişler dörtgeninde köşegen uzunluklarının e/f oranı ile ilgili teoremi verelim :

Teorem: Bir kirişler dörtgeninde

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd} \qquad (7)^*$$

eşitliği geçerlidir. (Burada sağ taraftaki oranda pay ve payda, ilgili köşegenin uçlarından geçen kenarların uzunluklarının çarpımının toplamını ifade etmektedir.)

İspat: [BD] köşegeninii çizmekle oluşan üçgenlerin alanları



$4RS_A = daf$, $4RS_C = bcf$

olarak bilinmekte olup

$$4RS = 4R\,(S_A + S_C) = (ad + bc)\,f$$

Benzer olarak

$$4RS = 4R\,(S_B + S_D) = (ad + bc)\,e$$

olup her iki eşitlik taraf tarafa bölünerek (7) elde edilir.

Sonuçlar: Yukarıda elde edilen formülleri kullanarak

$$e^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$$

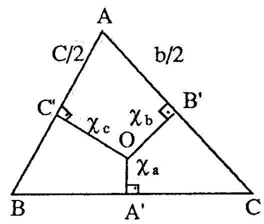
$$f^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc} \qquad (8)$$

eşitliklerini buluruz.

Uygulama: Batlamyus teoremini kullanarak üçgenler için bilinen (Carnot teoremini ispatlayabiliriz.

Teorem: (Carnot) Bir ABC üçgeninde çevrel merkezin kenarlardan olan yönlü uzaklıkları toplamı, çevrel ve iç yarıçapların toplamına eşittir.

$$\chi_a + \chi_b + \chi_c = R + r \qquad (9)$$



(**Not:** Örneğin A açısı genişse çevrel O merkezi üçgenin dışında ve A açısı içinde olup $\chi_a$uzaklığı negatif alınır.)

İspat: Üçgenin kenarlarının orta noktaları A′, B′, C′ ise AC′OB′ kirişler dörtgenine Batlamyus teoremini uygulayalım.:

$$\frac{1}{2}c\chi_b + \frac{1}{2}b\chi_c = \frac{1}{2}aR$$

$$\Rightarrow c\,\chi_b + b\,\chi_c = aR$$

elde edilir. Benzer olarak

$$a\chi_c + c\chi_a = bR$$

$$b\chi_a + a\chi_b = cR$$

geçerli olup üçünün taraf tarafa toplanmasıyla

* *Acaba (4)'ün bir genellemesi olan (6)'da olduğu gibi burada da (7) nin bir genellemesi söz konusu olabilir mi? Bu konu üzerinde Cem Tezer çalışmaktadır.*

$a(\chi_b + \chi_c) + b(\chi_c + \chi_a) + c(\chi_a + \chi_b) = 2uR$

çıkar. Öte yandan

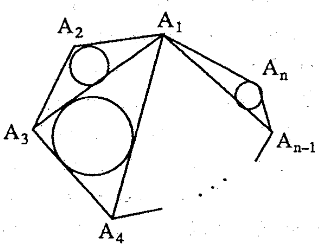
$a(\chi_a + \chi_b + \chi_c) + b(\chi_a + \chi_b + \chi_c) +$
$c(\chi_a + \chi_b + \chi_c) = 2u(R+r)$

$2u(\chi_a + \chi_b + \chi_c) = 2u(R + r)$

çıkar ki (9) elde edilmiş olur.

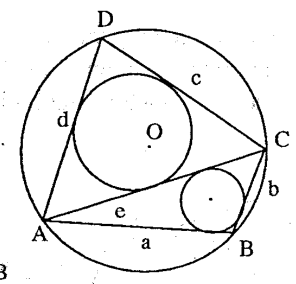
Şimdi kirişler çokgeni için Japon teoremini yazalım.

Teorem : (Japon) Bir kirişler $A_1A_2 \ldots A_n$ çokgeninde A_i kirişinden geçen köşegenlerin çizilmesiyle oluşan üçgenlerin iç yarıçapları toplamı i den bağımsızdır.



Teoremi dörtgenler için ispatlayacağız. Bu genel teorem tümevarımla ispatlanabilir.

İspat: (n = 4) A dan geçen köşegeni çizdiğimizde ABC, ACD üçgenleri oluşur. Bunlara Carnot eşitliği uygulandığında



$\chi_a + \chi_b - \chi_e = R + r_B$

$\chi_c + \chi_d + \chi_e = R + r_D$

$\chi_a + \chi_b + \chi_c + \chi_d = 2R + R_B + R_D$

Buradan $r_C + r_D = (\Sigma\chi_a) - 2R$

çıkar. Öteki köşegeni çizmekle benzer olarak

$(r_A + r_C) = (\Sigma\chi_a) - 2R$

bulunur. Böylece iddia ispatlanmış olur.

Sonuç: Basit dörtgenlerden kenar uzunlukları verilen en büyük alanlısı kirişler dörtgenidir:

$S^2 = (u - a)(u - b)(u - c)(u - d) - abcd\cos^2\varphi$

olup

$\max S \Rightarrow \min \cos^2\varphi \Rightarrow \cos^2\varphi = 0 \Rightarrow$

$\varphi = \frac{A + C}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A + C = \pi.$

O halde ABCD kirişler dörtgeninin alan formülü

$$S = \sqrt{(u - a)(u - b)(u - c)(u - d)} \text{ (Brahmagupta)} \qquad (10)$$

olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Dışbükey bir ABCD dörtgeninde

$$S_aS_c = S_bS_d \qquad (11)$$

nin geçerli olduğunu gösteriniz.

2. Taban uzunlukları a,c yüksekliği h olan kelebek bir yamuğun alanının (kanatların alanları toplamının)

$$\frac{1}{2}\frac{a^2 + c^2}{a + c}h \qquad (12)$$

olduğunu gösteriniz.

3. Dışbükey bir yamukta

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_a} + \sqrt{S_c} \qquad (13)$$

olduğunu gösteriniz.

4. Kenar uzunlukları 4,3,5,2 ve parametresi $\varphi = 60$ olan dışbükey dörtgenin alanını hesaplayınız.

5. Ardışık kenar uzunlukları $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{5}$, x olan bir dörtgen x in hangi değeri için dikgendir?

6. Dikgen bir ABCD dörtgeninde

$r_a + r_b + r_c + r_d = e + f - u$

eşitliği geçerlidir. (Alasia)

Devamı sayı 2'de