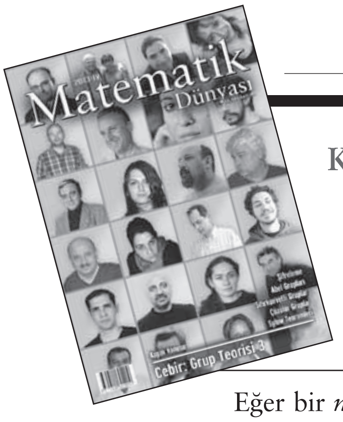

Kapak Konusu: Cebir: Grup Teorisi III

Sıfırkuvvetli Gruplar

Eğer bir n doğal sayısı için $Z_n(G) = G$ oluyorsa G'ye ***sıfırkuvvetli grup*** ya da ***nilpotent grup*** adı verilir. Eğer n, bu eşitliği sağlayan en küçük doğal sayıysa, G'ye ***n'inci dereceden sıfırkuvvetli grup*** ya da ***n-sıfırkuvvetli grup*** denir. Bu durumda $c(G) = n$ yazacağız ve n'ye G'nin ***sıfırkuvvet derecesi*** adını vereceğiz.

Sıfırkuvvetli grupların çözülür olduğu *Çözülür Gruplar* yazısındaki Önsav 2'den hemen çıkıyor, ne de olsa Z_i/Z_{i+1} grupları abel gruplarıdır. Hatta aynı önsavdan, eğer sıfırkuvvet dercesi n ise, çözülürlük derecesinin $\leq n$ olduğu çıkıyor. Ama birazdan bundan çok daha iyisini yapacağız (bkz. Teorem 4).

Sıfırkuvvetlik sınıfı üzerine tümevarım yapılıp kimileyin abel grupları için doğru olan olgular sıfırkuvvetli gruplar için genelleştirilebileceğinden önemli ve yararlı bir kavramdır.

Önsav 1. *i bir doğal sayı olsun. G'nin sıfırkuvvetli olması için yeter ve gerek koşul G/Z_i grubunun sıfırkuvvetli olmasıdır. Eğer $Z_i \neq G$ ise, $c(G) = c(G/Z_i) + i$ olur.*

Kanıt: Tanıma bakılırsa $c(G/Z_i) = c(G) - i$ olduğu hemen anlaşılır. □

Sıfırkuvvetli olmanın bir başka eşdeğer tanımı daha vardır. Merkezî serilerden biri artan, biri azalandır. $(G^i)_i$ azalır, $(Z_i(G))_i$ artar. Eğer G sıfırkuvvetliyse, $Z_i(G)$ altgruplarının G grubuna ulaşma hızı, G^i altgruplarının 1 altgrubuna ulaşma hızına eşittir. Şimdi bunu kanıtlacağız.

Teorem 2. i. *Eğer $G^n = 1$ ise, her i için*

$$G^{n-i} \leq Z_i(G)$$

olur. Dolayısıyla $Z_n(G) = G$ olur.

ii. *Eğer $Z_n(G) = G$ ise*

$$G^i \leq Z_{n-i}(G)$$

olur. Dolayısıyla $G^n = 1$ olur.

iii. *Eğer $G^n = 1$ ise G en fazla n'inci dereceden sıfırkuvvetlidir. Eğer n, bu eşitliğini sağlayan en küçük doğal sayıysa G tam n'inci dereceden sıfırkuvvetlidir.*

Kanıt: i. Eğer $i = 0$ ise, istediğimiz içindelik hipotezden çıkar. Önermeyi i için kabul edip $i + 1$ için kanıtlayalım.

$$[G^{(n+1)-i}, G] = [G^{n+1-i}, G] = G^{n-i} \leq Z_i(G)$$

olduğundan, tanıma göre

$$G^{(n+1)-i} \leq Z_{i+1}(G)$$

olur.

ii. Eğer $i = 0$ ise, istediğimiz içindelik hipotezden çıkar. Önermeyi i için kabul edip $i + 1$ için kanıtlayalım:

$$G_{i+1} = [G^i, G] \leq [Z_{n-i}(G), G] = Z_{n-i-1}(G) = Z_{n-(i+1)}(G).$$

iii. Yukarıda kanıtlananlardan çıkar. □

Sonuç 3. *$Z_i(G)$ en fazla i'inci dereceden sıfırkuvvetlidir.*

Kanıt: $[G, Z_j(G)] \leq Z_{j-1}(G)$ olduğundan,

$$[Z_i(G), Z_j(G)] \leq Z_{j-1}(G)$$

olur. Bunu tekrar tekrar kullanarak $Z_i(G)^i = 1$ buluruz. □

Teorem 4. *Sıfırkuvvetli gruplar çözülür gruplardır. Sıfırkuvvet derecesi n ise, grubun çözülürlük derecesi $n \leq 2^m - 1$ eşitsizliğini sağlayan en küçük m doğal sayısından küçükeşittir, yani çözülürlük derecesi $\leq \lceil \log_2(n + 1) \rceil$ olur*[1].

Kanıt: Azalan Merkezî ve Türev Serileri yazısındaki Önsav 4.v'i kullanacağız: $G^{(m)} \leq G^{2^m-1} \leq G^n = 1$. □

Öte yandan çözülür gruplar sıfırkuvvetli olmak zorunda değildirler, hatta çözülür grupların merkezleri 1 olabilir. MD-2013-III, sayfa 59'daki Örnek 28 böyle bir gruptur.

Eğer p bir asal sayıysa sonlu p-gruplarının sıfırkuvvetli olması çok önemlidir. Şimdi bunu kanıtlayacağız.

1 $\lceil x \rceil$ sayısı x'ten büyükeşit en küçük tamsayıdır.

Teorem 5. *Asal bir p sayısı için sonlu p-grupları sıfırkuvvetlidir. Ayrıca grubun eleman sayısı $n \geq 2$ için p^n ise sıfırkuvvet sınıfı en fazla $n - 1$'dir.*

Kanıt: Grubun eleman sayısı üzerine tümevarım yapacağız. Eğer grubun p tane elemanı varsa, grup abel grubudur, dolayısıyla 1'inci dereceden sıfırkuvvetlidir. En genel durumda: Gruba G adını verirsek, MD-2013-III, sayfa 32'deki Teorem 6'ya göre $Z(G) \neq 1$ olur. $G/Z(G)$ tümevarımla sıfırkuvvetli olduğundan, Önsav 1'e göre G sıfırkuvvetlidir.

Şimdi $|G| = p^n$ varsayımını yapalım. Eğer $n = 2$ ise grubun abel grubu olduğunu, dolayısıyla birinci sınıf sıfırkuvvetli olduğunu biliyoruz. Eğer $n > 2$ ise o zaman $|G/Z(G)| \leq p^{n-1}$ olur. Tümevarımla, $G/Z(G)$ grubunun sıfırkuvvet derecesi en fazla $n - 2$'dir. Önsav 1'e göre G'nin sıfırkuvvet derecesi en fazla $n - 1$'dir. □

Alıştırmalar

1. MD-2013-III, sayfa 59'daki Örnek 28'de tanımlanan grubun ikinci dereceden çözülür olduğunu, ama merkezinin 1 olduğunu, dolayısıyla sıfırkuvvetli olamayacağını kanıtlayın.

2. Eğer n bir tek sayıysa, D_{2n} grubunun merkezinin 1 olduğunu, dolayısıyla sıfırkuvvetli olmadığını gösterin. Bu grubun ikinci dereceden çözülür olduğunu daha önce görmüştük.

3. Eğer $n > 2$ bir çift sayıysa, D_{2n} grubunun merkezinin 2 elemanlı olduğunu kanıtlayın. Bu durumda
$$D_{2n}/Z(D_{2n}) \approx D_n$$
olduğunu kanıtlayın.

4. Önceki iki alıştırmadan hareketle, eğer n, 2'nin bir kuvveti değilse D_{2n} grubunun sıfırkuvvetli olmadığını kanıtlayın. (Bkz. Teorem 5.) Eğer bir $k > 1$ tek sayısı için $n = 2^m k$ ise, her $i \leq k$ için
$$Z_i(D_{2n}) \approx \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}$$
olduğunu, ama $i \geq m$ için
$$Z_{i+1}(D_{2n}) = Z_i(D_{2n})$$
olduğunu kanıtlayın.

5. $\langle x, y \mid [[x, y], x], [[x, y], y] \rangle$ grubunun 2-sıfırkuvvetli olduğunu kanıtlayın.

6. $G = \langle a, b \mid a^{12}, b^2, baba^5 \rangle$ grubunun sıfırkuvvetli olduğunu gösterin. İpucu: $G \approx \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$ ve eğer $u = a^3$ ve $v = a^4$ ise $\langle a \rangle \approx \langle u \rangle \oplus \langle v \rangle$ olur. Ayrıca $u^b = u^{-1}$, $v^b = v$. Şimdi
$$G \approx (\langle u \rangle \rtimes \langle b \rangle) \times \langle v \rangle \approx D_8 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$
olduğunu gösterin.

7. Eğer G_i gruplarının her biri en fazla n'inci dereceden sıfırkuvvetliyse, $\prod_I G_i$ ve $\bigoplus_I G_i$ grubunun en fazla n'inci dereceden sıfırkuvvetli olduğunu kanıtlayın.

8. Teorem 5 sonsuz p-grupları için doğru değildir, örneğin eğer $\sigma = (1\ 2\ ...\ p) \in \mathrm{Sym}\ p$ ise,
$$G = \mathbb{Z}_{p^\infty}^p \rtimes \langle \sigma \rangle$$
kümesi sayfa 23'te Örnek 12'de tanımlanan
$$G = \mathbb{Z}_{p^\infty}^p \rtimes \mathrm{Sym}\ p$$
grubunun bir p-altgrubudur ancak sıfırkuvvetli değildir. Kanıtlayın.

9. (Lineer cebir ve matris halkalarını bilenlere.) Herhangi bir K cismi üzerine (mesela $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ya da $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ olabilir), $i < j$ için (i, j)'inci girdisi 0 ve (i, i)'inci girdisi 1 olan matrisler kümesi, matris çarpımı altında bir gruptur ve sıfırkuvvetli bir gruptur.

10. (Lineer cebir ve matris halkalarını bilenlere.) Herhangi bir K cismi üzerine (mesela $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ya da $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ olabilir), $i < j$ için (i, j)'inci girdisi 0 olan tersinir (yani çaprazında 0 bulunmayan) matrisler kümesi, matris çarpımı altında bir gruptur. Bu grup çözülürdür (bkz. Çözülür Gruplar yazısındaki Alıştırma 8.) ama eğer $|K| > 2$ ise sıfırkuvvetli değildir.

11. p bir asal olsun. Sıfırkuvvetli bir p-grubun yerel sonlu olduğunu kanıtlayın. İpucu: Çözülür Gruplar yazısındaki Alıştırma 10.

Notlar ve Örnekler

12. *Eğer sıfırkuvvetli bir grubun* 1'*den farklı bir p-elemanı varsa* (*p bundan böyle hep bir asal olacak*), *o zaman grubun merkezinde* 1'*den farklı bir p-eleman vardır.*

Kanıt: Sonucu sıfırkuvvet derecesi üzerine tümevarımla kanıtlayalım. Gruba G diyelim. Grup abelse sorun yok. Bundan böyle grubun abel olmadığını varsayalım. Diyelim $Z(G)$'de 1'den farklı bir p-eleman yok. O zaman $G/Z(G)$ grubunda 1'den farklı bir p-eleman vardır. Önsav 1'e göre, tümevarımla, $Z(G/Z(G)) = Z_2(G)/Z(G)$ grubunda 1'den farklı bir p-eleman vardır, diyelim $\bar{z}$. Demek ki $z \in Z_2(G) \setminus Z(G)$ ve bir $n > 0$ için $z^{p^n} \in Z(G)$ olur. z merkezde olmadığından, $C_G(z) < G$ olur. Bir $g \in G \setminus C_G(z)$ seçelim. O zaman Artan Merkezî Seri yazısındaki Alıştırma 2'ye göre, $1 \neq [g, z] \in Z(G)$ bir p-elemandır. □

13. *G sıfırkuvvetli bir grup olsun. $G/Z(G)$'de 1'den farklı bir p-elemanı varsa, o zaman $Z(G) \cap G'$ altgrubunda 1'den farklı bir p-eleman vardır.*

Kanıt: Örnek 12'ye göre

$$Z(G/Z(G)) = Z_2(G)/Z(G)$$

grubunda 1'den farklı bir p-eleman vardır. $z \in Z_2(G) \setminus Z(G)$ elemanı $z^p \in Z(G)$ içindeliğini sağlasın. Eğer $g \in G \setminus C_G(z)$ ise, $1 \neq [g, z] \in Z(G) \cap G'$ olur. Ayrıca $[g, z]^p = [g, z^p] = 1$ olur. □

14. *G sıfırkuvvetli bir grup ve $i > 0$ olsun. Eğer $G/Z_i(G)$'de 1'den farklı bir p-elemanı varsa, o zaman $Z(G) \cap G'$ altgrubunda 1'den farklı bir p-eleman vardır.*

Kanıt: i üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $i = 1$ durumu Örnek 13'te halledildi.

$$G/Z_i \approx (G/Z_{i-1})/(Z_i/Z_{i-1}) = (G/Z_{i-1})/Z(G/Z_{i-1})$$

olduğundan, $(G/Z_{i-1})/Z(G/Z_{i-1})$ grubunda 1'den farklı bir p-eleman vardır. Örnek 12'ye göre G/Z_{i-1} grubunda 1'den farklı bir p-eleman vardır. Tümevarımla istenen sonuç kanıtlanır. □

15. *G sıfırkuvvetli bir grup ve $D \leq G$, p-bölünür bir altgrup olsun. O zaman D'nin elemanları G'nin tüm p-elemanlarıyla değişir. Hatta $G/Z(G)$ grubunun p-elemanlarıyla D'nin tüm elemanları değişir.*

Kanıt: İkinci önermeyi kanıtlamak yeterli. $g \in G$ elemanı bir $n \in \mathbb{N}$ için $g^{p^n} \in Z(G)$ içindeliğini sağlasın. Sıfırkuvvet derecesi üzerine tümevarımla $\overline{G} = G/Z(G)$ grubunda $[\overline{D}, \overline{g}] = \overline{1}$, yani $[D, g] \leq Z(G)$ olur. Rastgele bir $d \in D$ alalım ve $e^{p^n} = d$ eşitliğini sağlayan bir $e \in D$ elemanı bulalım. Komütatör Altgrupları yazısındaki Örnek 9'a göre

$$[d, g] = [e^{p^n}, g] = [e, g^{p^n}] = 1$$

olur. □

16. *p-bölünür ve sıfırkuvvetli bir p-grup abel grubu olmak zorundadır.*

Kanıt: Bir öncekinden çıkar. □

17. Sıfırkuvvetli grupların şu özelliği de çok önemlidir:

Teorem 6. Normalleme Koşulu. *Eğer G sıfırkuvvetli bir grupsa ve $H < G$ ise $H < N_G(H)$ olur.*

Kanıt: Kanıtı grubun sıfırkuvvetlilik sınıfı üzerine tümevarımla yapacağız. Grup abel olduğunda, sorun yok. Bundan böyle grubun abel olmadığını varsayalım. Eğer $Z(G) \not\leq H$ ise, $H < HZ(G) \leq N_G(H)$ olduğundan, önermenin doğruluğu bariz. Bundan böyle $Z(G) \leq H$ varsayımını yapalım. Önsav 1'e göre $c(G/Z(G)) = c(G) - 1 < c(G)$ olduğundan, eğer $\overline{G} = G/Z(G)$ ve $\overline{H} = H/Z(G) < \overline{G}$ ise, tümevarımla,

$$H/Z(G) = \overline{H} < N_{\overline{G}}(\overline{H})$$

elde ederiz. Ama

$$N_{\overline{G}}(\overline{H}) = N_G(H)/Z(G).$$

eşitliğini kanıtlamak zor değil (okura alıştırma). Demek ki $H/Z(G) < N_G(H)/Z(G)$, dolayısıyla $H < N_G(H)$. □

İkinci Kanıt: Elbette $Z(G) \leq N_G(H)$ olur. $H_0 = H$ ve $H_{i+1} = N_G(H_i)$ tanımlarını yapalım. Tümevarımla $Z_i(G) \leq H_i$ olduğunu kanıtlamak zor değil: $[Z_{i+1}(G), H_i] \leq Z_i(G) \leq H_i$ olduğundan, bundan kolaylıkla $Z_{i+1}(G)$'nin H_i'yi normalleştirdiği, yani $Z_{i+1}(G) \leq H_{i+1}$ çıkar. Dolayısıyla $H_n = G$ olur. Buradan da $N_G(H) < H$ çıkar (aksi halde normalleyicilerle G'ye kadar çıkamazdık). □

Üçüncü Kanıt: Öyle bir j vardır ki $G^{j+1} \leq H$ ama $G^j \not\leq H$. Elbette $H/G^{j+1} \lhd G^j/G^{j+1}$ olur, çünkü G^j/G^{j+1} bir abel grubudur. Demek ki $H \lhd G^j$ olmalı. Bundan da $H \lhd HG^j$ çıkar. Ama $H < HG^j$ olduğundan, istediğimiz kanıtlanmıştır. □

18. *Sıfırkuvvetli bir G grubunun maksimal bir altgrubu normaldir ve indeksi bir asaldır. Dolayısıyla maksimal altgrup G' altgrubunu içermek zorundadır.* (Eğer maksimal bir altgrup varsa tabii; olmayabilir de.)

Kanıt: Grup G, maksimal altgrup da M olsun. $M < N_G(M)$ olduğundan, $N_G(M) = G$, yani $M \lhd G$ olur. Demek ki M ile G arasında başka bir altgrup yoktur, yani G/M'nin sadece iki altgrubu vardır. Bu da bir p asalı için $G/M \approx \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ demektir. G/M abel grubu olduğundan, $G' \leq M$ olur. □

19. Aşağıdaki teoremin iki farklı kanıtını sunacağız. İlk kanıtımız (eğer grup sonsuzsa) Zorn Önsavı'nı kullanacak ve standart argüman tiplerinden şaşmayacak. İkinci kanıtımız Zorn Önsavı'nı kullanmayacak.

Teorem 7. *Eğer G sıfırkuvvetli bir grupsa ve p bir asalsa, G'nin p-elemanları (mecburen karakteristik) bir altgrup oluşturur. Dolayısıyla sıfırkuvvetli ve burulmalı bir grup, asal p sayıları için maksimal p-altgruplarının direkt toplamıdır.*

Birinci Kanıt: Bunun bir kanıtı şöyle yapılabilir: Zorn Önsavı'nı kullanarak G'nin maksimal bir p altgrubunu bulabiliriz. (Eğer grup sonluysa maksimal p altgrubu bulmak için Zorn Önsavı'na gerek yok.) Bu p-altgruba P adını verelim. Eğer P'nin normal bir altgrup olduğunu kanıtlarsak, P mecburen G'nin tüm p-elemanlarından oluşur ve böylece MD-2013-III, sayfa 61'deki Teorem 4'e göre ikinci önerme de kanıtlanmış olur.

Diyelim P, G-normal değil. O zaman Teorem 6'ya göre, $P \le N_G(P) < N_G(N_G(P))$ olur. P elbette $N_G(P)$ altgrubunun p-elemanlarının kümesidir, dolayısıyla $N_G(P)$'nin bir otomorfisi altında değişmez, yani $N_G(P)$'nin karakteristik altgrubudur. Ama eğer $g \in N_G(N_G(P))$ ise, $x \mapsto x^g$ fonksiyonu $N_G(P)$'nin bir otomorfisidir, dolayısıyla $P^g = P$ ve $g \in N_G(P)$ olur; buradan da $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$ çıkar, çelişki. □

Yukarıdaki teoremi kanıtlamak için maksimal p-altgrupların varlığına ihtiyacımız vardı ve bu altgrupların varlığını kanıtlamnak için Zorn Önsavı'nı kullandık. Ama kanıtın sonunda bu maksimal p-altgruptan tek bir tane olduğunu gördük (p-elemanlar kümesi). Dolayısıyla bu önsav Zorn Önsavı kullanılmadan da kanıtlanabilmeli, çünkü varlığı Zorn Önsavı'yla kanıtlanan bir nesneden bir tane olmamalı, hatta ne olduğu anlaşılamamalı bile; oysa biz maksimal p-altgrubun p-elemanlar kümesi olduğunu kanıtladık.

Şimdi aynı teoremi Zorn Önsavı'nı kullanmadan kanıtlamaya koyulacağız.

İkinci Kanıt: Bu sefer Zorn Önsavı'nı kullanmayacağız. P, G'nin p-elemanlarından oluşan altküme olsun. Eğer G bir abel grubuysa, P elbette bir altgruptur. Gerisini grubun sıfırkuvvet derecesine göre tümevarımla kanıtlayacağız. Tümevarımla $P_1 = P \cap G' \le G$ olur. Elbette $P \cap G' \triangleleft G$, hatta bu altgrup G'de karakteristiktir. Şimdi P_1'in sıfırkuvvet sınıfı üzerinden tümevarım yapacağız. Önce $P_1 = 1$ durumunu, yani $P \cap G' = 1$ durumunu ele alalım. P'nin merkezî olduğunu göstereceğiz, bu da istediğimizi kanıtlamış olacak. Örnek 13'e göre $G/Z(G)$'de 1'den farklı bir p-eleman yoktur. Demek ki $P \subseteq Z(G)$. Şimdilik tümevarım adımını yapalım. Elbette $P/Z(P_1)$, $G/Z(P_1)$ grubunun p-elemanlarından oluşan kümedir ve

$$\begin{aligned}(G/Z(P_1))' \cap P/Z(P_1) &= G'Z(P_1)/Z(P_1) \cap P/Z(P_1)\\ &= G'/Z(P_1) \cap P/Z(P_1)\\ &= (G' \cap P)/Z(P_1) = P_1/Z(P_1)\end{aligned}$$

olur. Demek ki tümevarım varsayımımızı $G/Z(P_1)$ grubuna uygulayabiliriz: $P/Z(P_1) \le G/Z(P_1)$ olur. Ama $Z(P_1) \subseteq P$ olduğundan, bundan $P \le G$ çıkar. Böylece tümevarım adımı da tamamlanmış oldu. □

Sonuç 8. *Sıfırkuvvetli bir grupta burulmalı elemanlar bir altgrup oluşturur ve bu altgrup (maksimal) p-altgruplarının direkt toplamıdır.* □

Sonuç 9. *p ve q iki farklı asal olsun. Sıfırkuvvetli bir grupta p-elamanların çarpımları ve komütatörleri de p elemanlardır. Ayrıca p-elemanlarla q-elemanlar birbirleriyle değişirler.* □

Sonuç 10. *Burulmalı bir sıfırkuvvetli grup maksimal p-altgruplarının direkt toplamıdır, dolayısıyla yerel sonludur.* □

Sonuç 11. *Sıfırkuvvetli ve burulmalı bir grupta bölünür altgruplar merkezîdir.*

Kanıt: Örnek 15'ten ve yukarıdaki sonuçlardan çıkar. □

20. (Chernikov [Ch1, Ch2]). *G sıfırkuvvetli ve p-bölünür bir grup olsun. O zaman grubun merkezi $Z(G)$ grubun tüm p-elemanlarını içerir ve p-bölünürdür. $i \ge 1$ için $G/Z_i(G)$ ve $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ grupları p-bölünürdür ve etkisiz elemandan başka p-elemanları yoktur.*

Kanıt: Örnek 15'e göre, grubun p-elemanları merkezîdir. Aynı örneğe göre $G/Z(G)$ grubunun etkisiz elemandan başka p-elemanı yoktur. Buradan $Z(G)$ altgrubunun p-bölünür olduğu çıkar. $G/Z_i(G)$ grupları elbette p-bölünürdür. Biraz önce kanıtladığımız üzere bu grupların merkezi olan $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ grupları da p-bölünürdür. Ve gene biraz önce kanıtladığımız üzere, $i \ge 0$ için

$$\begin{aligned}(G/Z_i(G))/Z(G/Z_i(G)) &= (G/Z_i(G))/(Z_{i+1}(G)/Z_i(G))\\ &\approx G/Z_{i+1}(G)\end{aligned}$$

grubunun etkisiz elemandan başka p-elemanı yoktur. Dolayısıyla, $G/Z_{i+1}(G)$ grubunun bir altgrubu olan $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ grubunun da etkisiz elemandan başka p-elemanı yoktur. □

21. *Eğer $A \le Z(G)$ ise ve G/A grubu n'inci dereceden sıfırkuvvetliyse, G ya n ya da $(n + 1)$'inci dereceden sıfırkuvvetlidir.*

Kanıt: Azalan Merkezî ve Türev Serileri yazısındaki Önsav 3'e göre $\overline{1} = (G/A)^n = G^nA/A$ ve dolayısıyla $G^n \le A \le Z(G)$ olur. Buradan da G^{n+1}

$= [G, G^n] \leq [G, Z(G)] = 1$ çıkar. Teorem 2'ye göre G en fazla $(n + 1)$'inci dereceden sıfırkuvvetlidir. G'nin sıfırkuvvet sınıfının n'den küçük olamayacağını zaten biliyoruz. □

22. *G bir grup ve H, $K \leq G$, birbirini normalize eden iki nilpotent altgrup olsun. O zaman HK de nilpotent bir altgruptur.*

Kanıt: G yerine $\langle H, K\rangle$ alarak, H ve K'nın G'de normal olduklarını varsayabiliriz. Eğer G bir abel grubuysa, sonuç bariz. Gerisini G'nin sıfırkuvvet derecesi üzerine tümevarımla yapalım. Tümevarım varsayımına göre

$$\langle HZ(G)/Z(G), KZ(G)/Z(G)\rangle = HKZ(G)/Z(G) \approx HK/(HK \cap Z(G))$$

nilpotent bir gruptur. $HK \cap Z(G) \leq Z(HK)$ olduğundan, sonuç Örnek 21'den çıkar. □

23. *Sonlu bir grubun normal sıfırkuvvetli altgruplarının maksimali vardır ve bu altgrup biriciktir.*

Kanıt: Örnek 22'ye göre tüm normal sıfırkuvvetli altgruplar tarafından üretilmiş altgrup maksimal sıfırkuvvetli normal altgruptur. □

$F(G)$ olarak yazılan bu altgrup ***Fitting altgrubu*** olarak bilinir. Sonlu grup teorisinde çok önemlidir.

24. *G sıfırkuvvetli bir grup ve $i \geq 1$ bir doğal sayı olsun. Eğer G/G^i grubu p-bölünürse G/G^{i+1} grubu da p-bölünürdür. Demek ki G/G' grubu p-bölünürse G de p-bölünür.*

Kanıt: $G/G^i \approx (G/G^{i+1})/(G^i/G^{i+1})$ olduğu için, G yerine G/G^{i+1} grubunu alarak $G^{i+1} = 1$ varsayımını yapabiliriz. O zaman $G^i \leq Z(G)$ ve $G^{i-1} \leq Z_2(G)$ olur. Demek ki G^i bir abel grubu olur. Diyelim G^i grubunun p-bölünür olduğunu kanıtladık. Bir $g \in G$ alalım. Hipoteze göre öyle bir $h \in G$ vardır ki G/G^i grubunda $\overline{g} = \overline{h}^p$ olur, yani $gh^{-p} \in G^i$ olur. Ama G^i'nin p-bölünür olduğunu varsaymıştık. Demek ki bir $k \in G^i \leq Z(G)$ için $gh^{-p} = k^p$ ve dolayısıyla $g = (kh)^p$ olur ve böylece istediğimiz kanıtlanır. Demek ki G^i altgrubunun p-bölünür olduğunu kanıtlamak yeterli. G^i bir abel grubu olduğu için, üreteçlerinin p-bölünür olduğunu kanıtlamalıyız. Demek ki $g \in G$ ve $h \in G^{i-1} \leq Z_2(G)$ için G^i'nin rastgele bir üreteci olan $[g, h]$ elemanının p-bölünür olduğunu kanıtlamalıyız. G/G^i grubunda $\overline{g} = \overline{x}^p$ eşitliğini sağlayan bir $x \in G$ alalım. Bir $y \in G^i \leq Z(G)$ için $gx^{-p} = y$ olur. Bu durumda, Artan Merkezî Seriler yazısındaki Alıştırma 1'e göre, $[g, h] = [x^p y, h] = [x^p, h] = [x, h]^p$ olur. İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

25. *Sıfırkuvvetli grupların yegâne en büyük p-bölünür altgrupları vardır. Bu altgrup biricik olduğundan normal, hatta karakteristiktir.*

Kanıt: Gruba G diyelim. $\mathcal{D}$, G'nin p-bölünür altgruplarından oluşan küme olsun. $\mathcal{D}$'nin elemanları tarafından üretilen altgrup da D olsun. Örnek 24'e göre, D/D' grubunun p-bölünür olduğunu kanıtlamak yeterli. Kolayca gösterilebileceği üzere, D/D' abel grubu,

$$\{HD'/D' : H \in \{\mathcal{D}\}\}$$

kümesinin elemanları tarafından üretilmiştir. Ama bu kümenin elemanları D/D' grubunun p-bölünür altgruplarıdır, dolayısıyla D/D' grubu p-bölünürdür. □

26. *G sıfırkuvvetli bir grup olsun. Eğer bir $D \lhd G$ için, D ve G/D grupları p-bölünürse, G grubu da p-bölünür.*

Kanıt: Örnek 24'e göre, G/G' grubunun p-bölünür olduğunu kanıtlamak yeterli.

$$(G/D)/(G/D)' = (G/D)/(G'D/D) \approx G/G'D$$

grubunun p-bölünür olduğunu biliyoruz. Ayrıca D/D' grubu p-bölünür olduğundan,

$$(D/D')/((G' \cap D)/D') \approx D/(G' \cap D)$$

grubunun p-bölünür olduğunu biliyoruz. Ama

$$G'D/G' \approx D/(G' \cap D)$$

olduğundan, bundan $G'D/G'$ grubu da p-bölünür olduğu çıkar.

$G/G'D$ ve $G'D/G'$ gruplarının p-bölünür olduğunu kanıtladık. G/G' bir abel grubu olduğundan, bundan kolaylıkla G/G' grubunun p-bölünür olduğu çıkar.

27. *G, sıfırkuvvet derecesi $n \geq 2$ olan bir grup olsun. Her $g \in G$ için $\langle G', g\rangle$ altgrubunun sıfırkuvvet derecesi en fazla $n - 1$'dir.*

Kanıt: Eğer $n = 2$ ise, o zaman $G' \leq Z(G)$, dolayısıyla $\langle G', g\rangle \leq \langle Z(G), g\rangle$ olur. Ama $\langle Z(G), g\rangle$ elbette bir abel grubudur. Demek ki $\langle G', g\rangle$ grubu da abeldir, yani en fazla 1'inci dereceden sıfırkuvvetlidir. Şimdi $n > 2$ durumunu tümevarımla ele alalım. $H = \langle G', g\rangle$ olsun. $G/Z(G)$ grubu $(n - 1)$'inci dereceden sıfırkuvvetlidir. Ayrıca $(G/Z(G))' = G'Z(G)/Z(G)$

olduğunu biliyoruz (Azalan Merkezî ve Türev Serileri yazısındaki Önsav 3). Böylece, tümevarımla

$$\begin{aligned}\langle (G/Z(G))', \overline{g}\rangle &= \langle G'Z(G)/Z(G), \overline{g}\rangle \\ &= \langle G', g\rangle Z(G)/Z(G) \\ &= HZ(G)/Z(G)\end{aligned}$$

grubunun sıfırkuvvet derecesinin en fazla $n - 2$ olduğunu anlamış oluruz. Elbette

$$Z(G) \le Z(HZ(G))$$

olur. Örnek 21'e göre $HZ(G)$ grubunun sıfırkuvvet derecesi en fazla $n - 1$ olur. H bu grubun bir altgrubu olduğundan, onun da sıfırkuvvet derecesi en fazla $n - 1$ olur. □

28. *G sıfırkuvvetli bir grup olsun. Eğer G/G' döngüsel bir grupsa G de döngüsel bir gruptur.*

Kanıt: G'nin abel olmadığını varsayalım. O zaman sıfırkuvvet derecesi $n \ge 2$ olur. $\overline{g}$ elemanı G/G' grubunun bir üreteci olsun. Demek ki $G = \langle G', g\rangle$ olur. Örnek 27'ye göre G'nın sıfırkuvvet derecesi $n - 1$ olur. Bir çelişki. Demek ki G bir abel grubu ve $G' = 1$. □

29. Aşağıdaki teorem de sıfırkuvvetli gruplarda önemlidir. Teorem, sıfırkuvvetli grupların merkezinin her normal altgrupla kesiştiğini, yani merkezin bayağı büyük olduğunu söylüyor.

Teorem 12. *Eğer G sıfırkuvvetliyse ve $1 \ne A \lhd G$ ise, $A \cap Z(G) \ne 1$ olur.*

Kanıt: Sıfırkuvvet derecesi üzerine tümevarım yapacağız. Eğer G bir abel grubuysa önerme bariz. Genel durumu ele alalım. Tümevarımla

$$AZ(G)/Z(G) \cap Z(G/Z(G)) \ne \overline{1},$$

yani

$$AZ(G)/Z(G) \cap Z_2(G)/Z(G) \ne 1,$$

yani

$$Z(G) < AZ(G) \cap Z_2(G),$$

yani

$$A \cap Z_2(G) \not\le Z(G).$$

Madem öyle, bir

$$z \in A \cap Z_2(G) \setminus Z(G)$$

elemanı alalım. Bir de z ile değişmeyen bir $g \in G$ elemanı alalım. O zaman $z \in Z_2(G)$ olduğundan, $[z, g] \in Z(G)$ olur ve $z \in A \lhd G$ olduğundan, $[z, g] \in A$ olur. Demek ki $1 \ne [z, g] \in A \cap Z(G)$. □

Bunun sonucu olarak, sıfırkuvvetli grupların minimal normal altgrupları merkezî olmak zorundadır.

Alıştırmalar

30. G sıfırkuvvetli bir grup ve $A \le G$ minimal normalse $A \le Z(G)$ ve $A \approx \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ olduğunu kanıtlayın.

31. p bir asal olsun. Eleman sayısı p^n olan bir grubun her $i = 0, 1, ..., n$ için p^i elemanlı normal bir altgrubu olduğunu kanıtlayın. Bu normal altgrupların birbirini kapsayacak biçimde seçebileceğinizi kanıtlayın.

32. G sıfırkuvvetli bir grup olsun. Bir $N \lhd G$ için $G = G'N$ ise $N = G$ eşitliğini kanıtlayın. ıpucu: i üzerine tümevarımla $G^i \le G^{i+1}N$ içindeliğini kanıtlayın.

33. G sıfırkuvvetli bir grup olsun. $\exp(G/G') = n$ varsayımını yapalım.

a. Her i için $\exp(G^i/G^{i+1}) | n$ olduğunu gösterin.

b. c, grubun sıfırbölenlik sınıfıysa, $\exp(G) | n^c$ olduğunu gösterin.

34. **(I. Schur).** $G/Z(G)$ grubunun sonlu olduğunu varsayalım. G' altgrubunun sonlu olduğunu göstereceğiz. $|G/Z(G)| = n$ olsun.

a. $G'/(G' \cap Z(G))$ grubunun sonlu olduğunu kanıtlayın. Demek ki istediğimizi kanıtlamak için $G' \cap Z(G)$ grubunun sonlu olduğunu göstermek yetecek.

b. $X = \{[g, h] : g, h \in G\}$ kümesinin en fazla n^2 elemanı olduğunu gösterin.

c. $X = \{x_1, ..., x_k\}$ olsun. $G' \cap Z(G)$ grubunun her elemanının $m_1, ..., m_k \in \mathbb{N}$ için

$$x_1^{m_1} \cdots x_k^{m_k}$$

biçiminde yazılacağını gösterin.

d. Her $g, h \in G$,

$$\begin{aligned}[g, h]^{n+1} &= g^{-1}[g, h]^n g[g, h] \\ &= g^{-1}[g, h]^{n-1}[g^2, h]^{g^{-1}} g\end{aligned}$$

eşitliklerini gösterin.

e. (c) ve (d)'den $G' \cap Z(G)$ grubunun her elemanının X'in en fazla n^3 elemanının çarpımı olarak yazıldığını gösterin. Demek ki $G' \cap Z(G)$ sonlu bir gruptur.

Bunu bir teorem olarak yazalım:

Teorem 13. [I. Schur]. *$G/Z(G)$ grubu sonluysa G' grubu sonludur.* □