Popüler Matematik

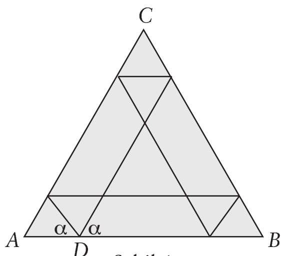
Eşkenar Üçgen Bilardo Masası

Ali Törün* / a_torun90@hotmail.com

Eşkenar üçgen biçimindeki bir bilardo masasının başında olduğumuzu düşünelim. Masanın kenarında (eşkenar üçgenin bir kenarı üzerinde) duran bir bilardo topuna hangi açıyla vurursak top başlangıç noktasına başlangıç açısının simetriğiyle geri döner ve tekrar aynı yolu kat eder? Bu yazıda bu soruyu, önce özel durumlar için ele alacağız ve sonrasında genel çözümü vereceğiz.

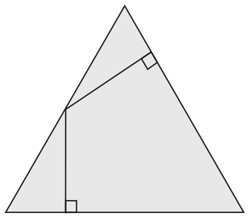
Hız, kuvvet ve sürtünmeyi dikkate almıyoruz. Topun başlangıç noktasına geri dönmesini istiyoruz ve sonrasında aynı döngüyü sonsuz kez tekrarlamasını istiyoruz. Hızı hiç azalmıyor. Bu oyuna “matematiksel bilardo” diyebiliriz. Öte yandan, optikte nasıl ki gelen ışın açısıyla yansıyan ışın açısının ölçüleri eşitse, “matematiksel bilardo”da da topun eşkenar üçgenin kenarlarına geliş açısıyla, dönüş açısının ölçüleri eşittir.

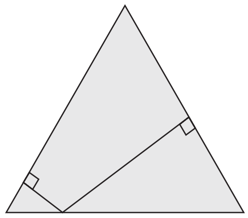
Şimdi, bir ABC eşkenar üçgeninin AB kenarı üzerindeki bir D noktasında duran bilardo topuna ölçüsü α olan bir açıyla vurduğumuzu varsayalım. Bu durumda topun izleyebileceği yollardan biri Şekil 1’de görülmektedir. Top, üçgenin kenarlarına yansıma kuralına göre altı kez vurduktan sonra D noktasına geri döner ve aynı döngü bir kez daha tekrarlanır.



Şekil 1

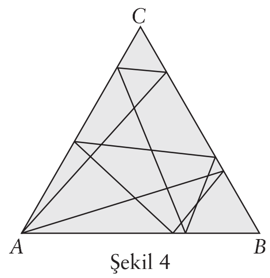
Yukarıdaki şekil problemin özel bir çözümünü göstermektedir ve $\alpha = 60°$’dir. Biz, α’nın hangi değerleri için nasıl bir döngünün gerçekleşeceğini, yani topun yansıma kuralına göre üçgenin kenarlarına vurup başlangıç noktasına başlangıç açısının simetriğiyle geri döneceğini bulmaya çalışıyoruz. Eğer $\alpha = 90°$ olursa sıradışı bir döngüyle karşılaşırız. Top, üçgenin kenarlarına iki kez vurduktan sonra gidişte izlediği yolun üzerinden geçerek başlangıç noktasına toplam dört vuruştan sonra döner (Şekil-2). Benzer bir durum $\alpha = 30°$ alındığında da gerçekleşecektir. (Şekil-3)


Şekil 2


Şekil 3

Şimdi, yazının giriş paragrafında sorduğumuz problemin genel çözümüne giden yolda zihin açıcı özel bir problemi ele alalım.

Problem. *Topu ABC eşkenar üçgeninin A köşesine koyduğumuzu varsayalım. Top, üçgenin kenarlarına sekiz kez vurduktan sonra, A köşesine geri dönüyor* (Şekil 4). *Bu döngünün gerçekleşmesi için topa kaç derecelik açıyla vurmalıyız?*

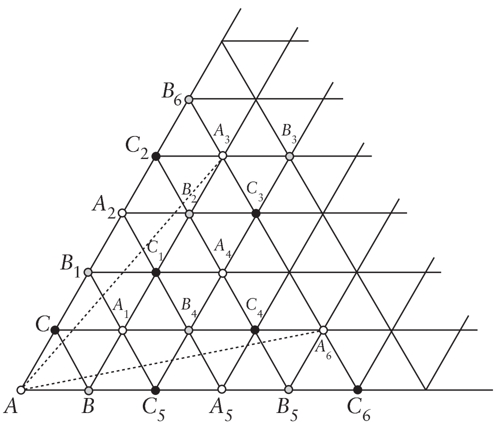


Şekil 4

Çözüm: ABC eşkenar üçgeninin BC kenarına göre simetriğini alarak BCA_1 üçgenini elde edelim. Daha sonra BCA_1 üçgeninin CA_1 kenarına göre

* Matematik öğretmeni.

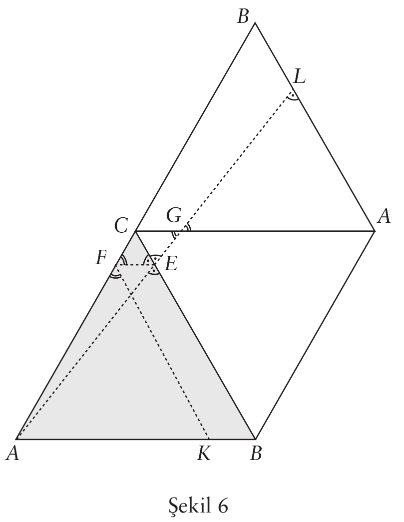
simetriğini alarak CA_1B_1 üçgenini oluşturalım. Bu şekilde üçgenleri kenarları üzerinde katlayarak sağa ve yukarıya doğru çoğaltıp aşağıdaki şekli çizelim.



Şekil 5

Yukarıdaki şekilde A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ve A_6 noktaları orijinal üçgenimiz ABC'nin A köşesine karşılık gelir. Aynı şekilde B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ve B_6 noktaları B'nin, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 ve C_6 noktaları da C'nin karşılığıdır.

Topun harekete başladığı nokta olan A noktasından A_3 noktasına çizdiğimiz kesikli doğru, topun üçgenin kenarlarına sekiz kez vurup başlangıç noktasına dönünceye kadar izlediği yola karşılık gelmektedir; bilardo masasındaki gerçek yolu bulmak için AA_3 doğru parçasını tahmin edildiği biçimde kırarak ABC üçgeninin içine yerleştirmeliyiz. Bunu şöyle de açıklayabiliriz: Düzlemin saydam bir kâğıttan olduğunu hayal edelim ve düzlemi A noktaları üstüste, B noktaları üstüste ve C noktaları üstüste gelecek biçimde katlayalım.



Şekil 6

Yukarıdaki şekil, köşegenini kesik çizgiyle gösterdiğimiz paralelkenarı oluşturan eşkenar üçgenlerin en alttaki üçünden oluşuyor. Topun üçgenin kenarlarına ilk üç vuruşunda izlediği yollar sırasıyla AE, EF ve FK'dır. Bu yolların uzunluklarının toplamının AL doğru parçasının uzunluğuna eşit olduğunun kanıtı kolaydır, zaten kanıt şekil (Şekil 6) üzerinde neredeyse gösterilmiştir.

Şimdi, topa kaç derecelik bir açıyla vurmamız gerektiğini hesaplayalım. Şekil 5'te, AA_5A_3 dik üçgenine bakalım. A_5 ve A_3 arasındaki uzaklık, ABC üçgeninin yüksekliğinin 4 katı uzunluğunda, A ve A_5 noktaları arasındaki uzaklık da ABC'nin bir kenarının 3 katı uzunlukta olduğundan, aradığımız açının tanjantı $2\sqrt{3}/3$ olur. Bu durumda aradığımız açının ölçüsü $\arctan 2\sqrt{3}/3$ bulunur, ki bu değer de yaklaşık olarak 49,1 derecedir.

Bu problemin ikinci bir yanıtının daha olduğunu Şekil 5'te sağa doğru çoğaltılmış eşkenar üçgenlere baktığımızda kolayca görebiliriz. Bu kez, A noktasıyla A_6 noktasını birleştiriyoruz. Bu doğru parçasının yatayla yaptığı açıyla topa vurduğumuzda, top, yine üçgenin kenarlarına sekiz kez vurduktan sonra başlangıç noktasına dönüyor. Bu açının ölçüsü de yukarıdaki gibi hesaplandığında yaklaşık olarak 10,9 derece olarak bulunur.

AC_3 doğru parçası da sekiz doğruyu keser, ama bu sayılmaz, çünkü bilardo topunun gerçek masada başladığı noktaya geri dönmesi için A noktasının kopyalarından biriyle birleştirmemiz lazım.

Döngüsel Yollar

Yazının başlangıcındaki soruya dönersek... Bilardo topunu AB kenarı üzerindeki herhangi bir noktaya koyalım. Bu durumda topa hangi açıyla vurmalıyız ki, top başlangıç noktasına başlangıç açısının simetriğiyle geri dönsün? Bu kez topun üçgenin kenarlarına kaç kez vurduğunu bilmiyoruz ama hesaplayacağız.

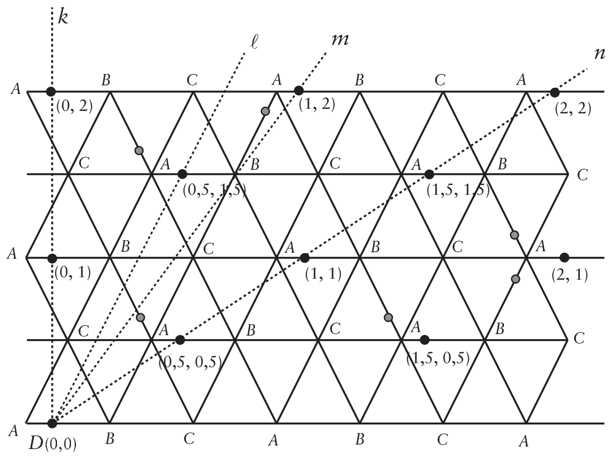
Bu soruyu yanıtlarken Amerikalı matematikçi Donald Knuth'un **Selected Papers on Fun and Games** adlı kitabındaki *Billard Balls in an Equilateral Triangle* isimli makalesinden yararlanacağız. Knuth, bu makalesini matematik oyunlarının ustası Martin Gardner'in bu problemle ilgili bir yazısında bulduğu hata üzerine kaleme aldığını belirtmiştir. Ama aynı zamanda, geçmişi 1800'lere dayanan bu problemi sıradışı bir yöntemle ele alıp, mükemmel bir çözüme ulaşmıştır.

Makalesinde kafama takılanları Knuth'a sordum, aldığım kapsamlı yanıt için kendisine teşekkür ederim.

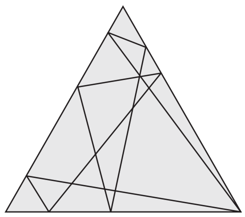
Topun başlangıç noktasına başlangıç açısının simetriğiyle geri dönüp tekrara başladığı yollara ***döngüsel yol*** adını verelim, Şekil 2 ve 3'teki yollar döngüsel yol örnekleridir.

Çözüm için ilk olarak, daha önce Şekil 5'te yaptığımız gibi *ABC* üçgeninin kenarlarına göre simetriklerini alarak çoğaltılmasından elde ettiğimiz aşağıdaki şekle (Şekil 7) bakalım. Bu şekilde *D* noktasının yatay doğrular üzerindeki kopyalarını siyah noktalarla gösterdik. *D* noktasının yatay olmayan doğrular üzerindeki kopyalarından bazılarını gri nokta olarak gösterdik.

Topu koyduğumuz *D* noktasını başlangıç noktası olarak kabul edeceğiz. Verdiğimiz örneklerde, top, yatay doğrular üzerinde bulunan *D* noktalarının (siyah noktaların) birinden geçince döngü tamamlanıyor ve tekrara başlıyor. Örneğin Şekil 2'deki döngüsel yol *k* ışını üzerinde, Şekil 1'deki döngüsel yol *ℓ* ışını üzerinde, Şekil 3'teki döngüsel yol *n* ışını üzerinde bulunuyor. *m* ışını üzerinde bulunan döngüsel yolu aşağıya çizdik (Şekil 8).



Şekil 7


Şekil 8

Acaba döngüsel yolların tamamlanıp tekrara başladığı *D*'nin kopyası olan noktalar yatay olmayan *AB* doğru parçaları üzerinde olabilir mi? Bu sorunun yanıtı "/" doğrultusundaki *AB* kenarları için olumsuz, çünkü rotamız bu doğrultudaki *AB* kenarlarını aradığımız açıyla değil, bu açıdan 120° daha fazla ölçüde bir açıyla kesiyor. Bu durumu Şekil 7'de sol alt köşedeki eşkenar dörtgenin / doğrultusundaki *AB* kenarını *n* ışınının kestiği açıya bakarak kolayca görebiliriz. Başka bir seçenek, tekrar noktasının \ doğrultusundaki *AB* kenarları üzerinde bulunmasıdır. Yazının sonunda inceleyeceğimiz bu durumda top, başlangıç noktasına başlangıç açısının simetriğiyle geri dönmüyor. Sadece topun *AB*'nin orta noktasından 60°'lik açıyla harekete başlaması halinde bir döngüsel yol gerçekleşiyor.

Döngüsel yolların tümünü bulabilmek için Şekil 7'de yatay *AB* kenarlarına bir kez daha bakalım. *ABC* üçgeninin sağa ve yukarıya doğru kopyalanmasından elde edilen yatay ilk *AB* kenarı üzerindeki *D*'nin kopyası olan noktanın (Şekil 7'de (0,5, 0,5) olarak gösterdiğimiz noktanın) yatay ve dikey eksenlere uzaklıklarını bulalım. Bu noktanın yatay eksene uzaklığı eşkenar üçgenin yüksekliğinin uzunluğuna eşit, dikey eksene olan uzaklığı ise eşkenar üçgenin kenar uzunluğunun 3/2 katı kadardır. Eşkenar üçgenin kenar uzunluğunun 3 katına ve yükseklik uzunluğunun 2 katına 1 değerini verirsek sözünü ettiğimiz noktayı (0,5, 0,5) olarak gösterebiliriz. Elde ettiğimiz bu noktayı kartezyen koordinat sistemindeki noktalarla karıştırmayalım. Biz, döngüsel yolların tekrar noktalarından oluşan yeni bir koordinat sistemi elde ediyoruz. Bu koordinat sisteminde (1, 1) noktasının yatay eksene uzaklığı eşkenar üçgenin yükseklik uzunluğunun 2 katı, dikey eksene uzaklığı da eşkenar üçgenin kenar uzunluğunun 3 katı oluyor. Böylelikle diğer döngüsel noktaları da saptıyoruz. Örneğin oluşturduğumuz bu yeni koordinat sisteminde (2, 1) noktasının birinci bileşeni olan "2" değeri kartezyen koordinat sisteminde eşkenar üçgenin kenar uzunluğunun 6 katını gösterirken, ikinci bileşeni olan "1" değeri ise yine eşkenar üçgenin yükseklik uzunluğunun 2 katını ifade ediyor.

Şimdi de Şekil 7'ye bakarak eşkenar üçgenin *AB* kenarının yatay kopyalarının nasıl ortaya çıktığını inceleyelim. Bu kenarlar yatay doğrular üzerinde *BC* ve *CA* kenarları atlandıktan sonra beliriyor.

Bu kenarlar üzerinde ortaya çıkan D'nin kopyalarına bakarsak, bu noktaların birinci bileşeninin sağa ve yukarı doğru 0,5'lik bir artışa sahip olduğunu görürüz. Aynı durum ikinci bileşenler için de geçerlidir. Öte yandan yatay eksen paralel ilk doğru üzerindeki noktaların bileşenlerinin buçuklu, ikinci doğru üzerindeki noktaların bileşenlerinin tamsayı ve üçüncü doğru üzerindekilerin tekrar buçuklu ve bu şekilde devam ettiğine dikkat edelim.

Yukarıda çıkardığımız sonuçlar bize döngüsel yolların tekrar noktalarının oluşturduğumuz koordinat düzleminde ya (a, b) doğal sayı ikililerinden ya da Şekil 7'deki gibi $(a+1/2, b+1/2)$ noktalarından oluştuğunu gösterir. Bütün tekrar noktaları bu şekilde belirlenmiş olur. Elde ettiğimiz yeni koordinat sisteminde sadece bu noktalar vardır. Döngüsel yolların tümünü bu noktalarla $D(0, 0)$ noktasını birleştirerek gösterebiliriz. Bu doğru parçalarının yatay eksenle yaptığı açının tanjantını hesaplayalım. Oluşturduğumuz koordinat sistemindeki $(1, 1)$ noktasının birinci bileşeninin eşkenar üçgenin kenar uzunluğunun 3 katını, ikinci bileşeninin ise yükseklik uzunluğunun 2 katını gösterdiğini hatırlarsak, bizim koordinat sistemimizdeki (c, d) noktalarının Kartezyen koordinat sistemindeki karşılığı $(3c, \sqrt{3}d)$ olur. O halde (c, d) noktalarından biriyle $D(0, 0)$ noktasını birleştirerek elde ettiğimiz doğru parçalarının yatay eksenle yaptığı açının ölçüsünün tanjantı

$$\frac{\sqrt{3}\,d}{3c} = \frac{d}{\sqrt{3}\,c}$$

olarak bulunur.

Döngüsel Yolların Tümü

Yukarıda tanjantını hesapladığımız açılar sayesinde bütün döngüsel yolları belirleyebiliriz. Şöyle ki: Topun yatay eksenle yaptığı açının ölçüsü α ve $0 < \alpha < 90°$ olsun. t pozitif bir rasyonel sayı olmak üzere

$$\tan\alpha = t/\sqrt{3}$$

eşitliğini sağlayan α ölçüsündeki bütün açılar için topun izleyeceği yol döngüseldir, yani top başlangıç noktasına geri döner. Bu durumda $t = d/c$'dir. O halde Şekil 7'de de görüldüğü gibi döngüsel yolları veren tüm rotalar (c, d) noktalarından geçecektir. Bu koşullara uyan ilk noktayı şu şekilde belirleyebiliriz: c ve d'nin tam katlarında döngüsel yollar tekrara başladığından c ve d aralarında asal sayılar olmalı. Şimdi, her iki bileşeni de buçuklu olan noktalara bakalım. Bu noktalardan geçen rotanın daha sonra bileşenleri tek sayı olan noktalardan geçerek tekrara başladığını görüyoruz. O halde c ve d aralarında asal ve tek sayılar ise döngüsel yolun geçtiği ilk nokta $(c/2, d/2)$ olacaktır, diğer durumlarda ise (c, d)'dir.

Döngüsel yolların uzunluğu

Döngüsel yolların geçtiği ilk noktaları belirlediğimize göre bu yolların uzunluklarını hesaplamak oldukça kolay: c ve d aralarında asal sayılar ve $c \geq 0$, $d > 0$ olsun. c ve d'nin ikisi de tek sayı ise döngüsel yolun uzunluğu Pisagor teoremiyle

$$\frac{\sqrt{9c^2 + 3d^2}}{2}$$

ve diğer durumlarda ise

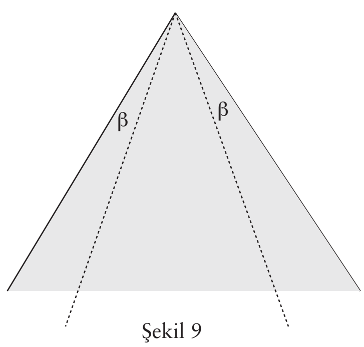
$$\sqrt{9c^2 + 3d^2}$$

bulunur. Bu hesaplamayı yaparken $(c/2, d/2)$ ve (c, d) noktalarının birinci bileşenlerini 3'le, ikinci bileşenlerini de $\sqrt{3}$'le çarparak bu noktaların Kartezyen koordinat sisteminde karşılıklarını bularak Pisagor teoremini uyguladığımızı belirtelim.

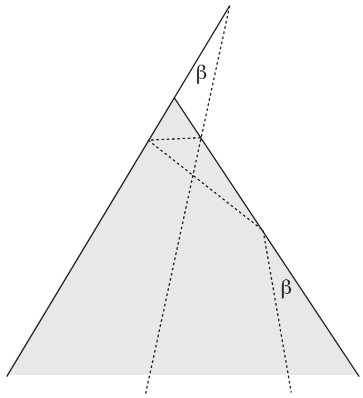
Yaptığımız hesapların dışında kalan tek istisnai durum topun AB kenarının orta noktasından 60° lik açıyla harekete başlamasıdır. Ki bu durumda döngüsel yolun uzunluğu 3/2 olur.

Top üçgenin kenarlarına kaç kez vurur?

Topun bir döngüsel yolu tamamladığında üçgenin kenarlarına kaç kez vuracağını hesaplayalım. Aşağıdaki şekilde (Şekil 9) top doğrudan üçgenin köşesine gidiyor. Bu özel durumda topun üçgenin kenarlarına 3 kez vurduğunu kabul edeceğiz, çünkü top köşeye yakın noktalara geldiğinde kenarlara hep 3 kez vurur. (Şekil 10) O halde limit durumunda da, yani köşede de kenarlara 3 kez vurması gerekir.



Şekil 9



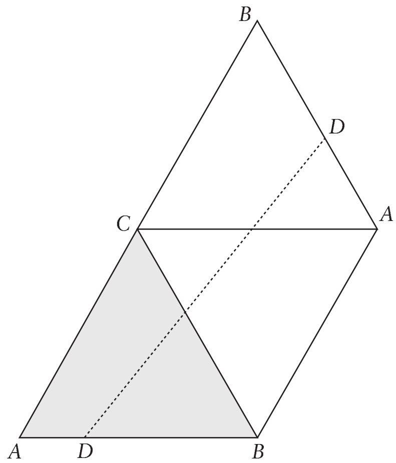
Şekil 10

Şimdi, Şekil 7'ye tekrar bakalım. $D(0, 0)$ noktasından (c, d) noktasına giden her rotada yatay kenar sayısı $2d$'dir, çünkü (c, d) noktalarının ikinci bileşenlerini eşkenar üçgenin yükseklik uzunluğunun 2 katına "1" değerini vererek belirlemiştik. Öte yandan / şeklindeki kenar sayısı $|3c - d|$ olacaktır, çünkü (c, d) noktalarının birinci bileşenlerini eşkenar üçgenin kenar uzunluğunun 3 katına "1" değerini vererek belirledik. Bu yüzden $D(0, 0)$ noktasından itibaren yatay eksene çizilecek her paralel doğru / şeklindeki kenarları $3c$ kez keser, ama rota d kadar yukarıya çıkacağından rotanın / şeklindeki kenarları kestiği nokta sayısı $|3c - d|$ olur. Aynı düşünceyle rotanın \ şeklindeki kenarları kestiği nokta sayısı da $3c + d$ olarak hesaplanabilir.

Yukarıdaki sonuçlara göre, döngüsel bir yolda topun üçgenin kenarlarına kaç kez vuracağını şöyle hesaplayabiliriz: Döngüsel bir rotanın üçgenin yatay kenarlarını $2d$, / şeklindeki kenarlarını $|3c - d|$, \ şeklindeki kenarlarını da $3c + d$ sayıda kestiğini biliyoruz. Bu sayıları toplarsak $2d + 6c$ veya $2d + 2d$ sonuçlarını elde ederiz. Burada $6c$ ile $2d$ sayılarını karşılaştırıp büyük olanını alarak döngüsel bir yolda topun kenarlara kaç kez vurduğunu bulmuş oluruz. Sonuç olarak: c ve d aralarında asal ve $c \geq 0$, $d > 0$ olsun. Bu durumda c ve d'nin ikisi de tek sayı ise döngüsel yol (c, d) noktasından önce tekrarlayacağından top üçgenin kenarlarına $d + \max(3c, d)$ kez, diğer durumlarda $2d + \max(6c, 2d)$ kez vuracaktır.

Simetrik olmayan döngüsel yollar

Knuth'un makalesinin izini sürerek ele aldığımız bu problemle ilgili Martin Gardner'in bir hatasından söz etmiştik. Knuth, Gardner'in 1963'te Scientific American'da yayımlanan makalesinde saptadığı hatayı Gardner'e mektupla bildirir. Gardner'in yanılgısı daha önce değindiğimiz tekrar noktalarının "\" doğrultusundaki AB kenarları üzerinde bulunması durumuyla ilgilidir. Gardner aşağıdaki şekilde görülen rotanın daima döngüsel olduğunu yazmış, ama Knuth bu rotanın döngüsel bir yolu gösterebilmesinin topun AB üzerindeki bulunduğu yere bağlı olduğunu kanıtlayarak göstermiş. Şimdi bu kanıtı inceleyelim.



Şekil 11

Top, yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi önce BC kenarına, daha sonra AC kenarına vurarak AB kenarındaki başlangıç noktasına dönüyor. Bu rotanın döngüsel bir yolu göstermediği Şekil 11'e bakıldığında açıkça görülür, çünkü top başlangıç noktasına başlangıç açısıyla geri dönmüyor. Sadece AB kenarının orta noktasından 60°'lik açıyla hareket ederse başlangıç noktasına başlangıç açısının simetriğiyle geri döndüğünü daha önce söylemiştik. Ama Şekil 11'deki rota bazı koşullarda simetrik olmayan bir döngüsel yolu gösterebilir. Bu da topun AB üzerinde nereye koyulacağına bağlıdır. Bunun için şu hesapları yapmamız gerekiyor: Eğer $k = AD/AB$ ise

$$\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(1+k)}{\frac{3}{2}(1-k)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1+k}{1-k}\right)$$

olur. $\frac{1+k}{1-k} = t$ dönüşümünü yaparsak $k = \frac{t-1}{t+1}$ olur ki, bu da bize Şekil 11'deki rotanın sadece AD/AB rasyonel sayı ise simetrik olmayan döngüsel bir yolu gösterdiğini söyler. ◆