Diferansiyel Geometri

Dört Verteks Teoremi

Ferit Öztürk / ferit.ozturk@boun.edu.tr*

Bu yazıda, düzlemde eğrilere ilişkin 100 yıl önce kanıtlanmış bir teoremi, Dört Verteks Teoremi'ni kanıtlayacağız.

Kapalı bir eğrinin bir noktasının bir komşuluğundan elde edilebilecek *yerel* bilgiler vardır, örneğin o noktadaki eğrilik. Bir de eğrinin *genelini* ilgilendiren bilgiler vardır, örneğin eğrinin bağlantılı parça sayısı. Dört Verteks Teoremi, bir eğrinin bu anlamda genel bilgisi hakkında bariz olmayan bir şey söyleyen tarihte ilk teoremdir.

Teoremi anmadan önce iki tanım verelim. Kendini kesmeyen bir eğriye ***basit*** diyoruz. Bir noktadaki eğriliğin, o noktada eğriyle en iyi öpüşen çemberin yarıçapının "birbölüsü" olduğunu geçen yazıda gördük. Eğriliğin tanımlı olmadığı ya da parametreye göre türevinin 0 olduğu bir noktaya eğrinin bir ***verteksi*** diyoruz. Teoremin ifadesi basit:

Teorem (Dört Verteks Teoremi). *Düzlemde kapalı, basit, sürekli türevli bir eğrinin en az* 4 *verteksi vardır.*

Eğriliğin türevinin 0 olduğu bir noktayı, yani bir verteksi şöyle hayal edebiliriz: Eğrinin her noktasına öpüşen çemberleri çizelim. Bu çember-

Şekil 1

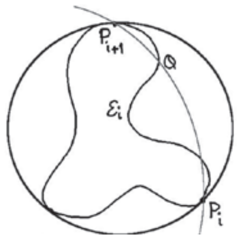
lerin yarıçapları nokta değiştikçe azalırlar ya da artarlar (Şekil 1). Yarıçapın yerel olarak en küçük (ya da en büyük) olduğu bir nokta vardır; işte bu nokta bir vertekstir.

* Boğaziçi Ü. öğretim üyesi.

Şimdi isterseniz boş bir kâğıda kapalı, basit eğriler çizmeye çalışın. Bu eğrilerin mümkün olan en az verteksi olsun. Yeterince çok uğraşınca Dört Verteks Teoremi'ne inanmaya başlayacaksınız.

Dört Verteks Teoremi geometrinin birçok alanında apansız ortaya çıkan bir teorem. Bunları konuşmak yerine bu yazıda teoremin iki güzel kanıtını sunacağız. Basit ama kolay olmayan fikirler içeren iki kanıt...

Birinci Kanıt: Düzlemde basit, kapalı, türevli, düzgün bir $\mathcal{E}$ eğrisi alalım. Eğrilik fonksiyonu κ olsun. Şimdi $\mathcal{E}$'nin en az dört verteksi olduğunu, yani κ'nın türevinin en az dört defa 0 olduğunu Robert Osserman'ın 1985'te verdiği kanıtın izinden giderek kanıtlayacağız.



Şekil 2

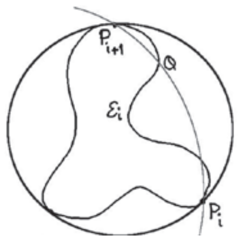
$\mathcal{E}$ eğrisini çevreleyen bir çember alalım. (Bkz. Şekil 2) Çember $\mathcal{E}$ ile kesişmiyorsa, hâlâ $\mathcal{E}$'yi çevreleyecek biçimde çemberi küçültebiliriz. Dolayısıyla $\mathcal{E}$'yi çevreleyen en küçük çaplı çember, $\mathcal{E}$ ile kesişmek zorundadır. Böyle bir çembere C, çapına da R diyelim. C ile $\mathcal{E}$'nin ortak noktaları kümesi C'nin bir yarım çemberinin içinde yatamaz. Böyle olsaydı C'yi bir yöne doğru kaydırarak $\mathcal{E}$ ile arakesitini boşküme yapabilir ve böylece daha küçük bir C seçebilirdik; bu da C'nin en küçük olmasıyla çelişirdi. Öte yandan $C \cap \mathcal{E}$ içinde yaylar varsa, eğriliğin türevinin 0 olduğu sonsuz sayıda nokta elde etmiş oluruz ki bu durumda teorem doğru olur. Öyleyse (türevin sürekli olduğunu varsaydığımızdan), $C \cap \mathcal{E}$ kesişiminde

$$P_1, \ldots, P_k$$

ile göstereceğimiz k tane yalıtılmış nokta olduğunu kabul ederek devam edelim. $k \geq 2$ olacak ve $k = 2$ durumunda arakesit noktaları C'nin merkezine göre simetrik olacaklar.

$P_1, \ldots, P_k$ noktalarında eğrilik elbette $1/R$'den büyükeşit olmalı. Şimdi bu noktalar arasında eğriliğin $1/R$'den küçük olduğu $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathcal{E}$ noktaları bulacağız. Böylece eğrilik bu $2k$ nokta arasında $1/R$'yi bir aşıp bir altına inecek, dolayısıyla eğriliğin türevi en az $2k$ defa 0 olacak. $k \geq 2$ olduğundan bu da teoremi kanıtlayacak.

Şimdi, elimizdeki noktalardan ardışık iki nokta seçelim, diyelim P_1 ile P_2. Bu iki nokta arasında kalan C'nin iki yayından kısa olanına C_1 diyelim.

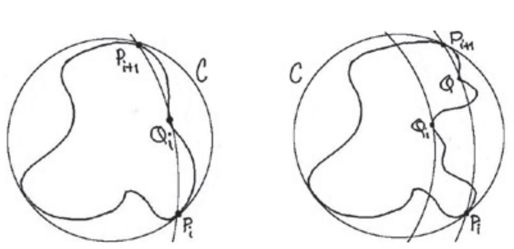


Şekil 3

$\mathcal{E}$'nin, "C_1'i takip ederek", P_1'den başlayıp P_2'de sona eren eğri parçasına $\mathcal{E}_1$ diyelim. Bir paragraf önce sözünü ettiğimiz Q_1 noktasını $\mathcal{E}_1$ eğri parçasının üstünde bulacağız. Önce, P_1P_2 doğru parçasıyla C_1 arasında kalan bölgeden $\mathcal{E}_1$ üzerinde rastgele bir Q noktası seçelim (Şekil 3). Bu durumda, P_1, Q ve P_2 noktalarından geçen çembere C', çapına R' dersek $R' > R$ olur.

Eğer C' çemberinin içinde $\mathcal{E}_1$ eğrisinin herhangi bir noktası yoksa (Şekil 4a), $\mathcal{E}_1$ ve C' eğrileri Q noktasında teğettir. Bu yüzden $\mathcal{E}_1$'in Q'daki eğriliği $\leq 1/R' < 1/R$ olur. Böylece Q_1 olarak Q noktasını seçebiliriz.

Eğer C' çemberinin içinde $\mathcal{E}_1$ eğrisinin noktaları varsa C' çemberini o tarafa doğru o kadar



Şekil 4

kaydıralım ki (Şekil 4b'de sola doğru), biraz daha aynı yöne kaydırsak $C' \cap \mathcal{E}_1 = \varnothing$ olur... Bu durumda C' ile $\mathcal{E}_1$ bir noktada teğet olmak zorundadır. Yukarıda olduğu gibi, Q_1 olarak o noktayı seçelim.

Böylece $k \geq 2$ olmak üzere $2k$ tane noktamız oldu.

$$\kappa(P_i) \geq 1/R,\ \kappa(Q_i) < 1/R,\ \kappa(P_{i+1}) \geq 1/R$$

olduğundan, Rolle Teoremi'ne göre, P_i ile P_{i+1} arasında, κ'nın türevinın 0 olduğu bir nokta vardır. (Son nokta için $P_{k+1} = P_1$ alın.) Benzer biçimde ardışık her Q_i, Q_{i+1} çifti arasında da κ'nın türevinin 0 olduğu bir nokta vardır. $k \geq 2$ olduğundan teorem kanıtlanmıştır. □

İkinci Kanıt: Şimdi Dört Verteks Teoremi'nin tamamen başka bir kanıtını yapacağız. Estetik değeri olan bu kanıt ne yazık ki sadece dışbükey eğriler için işe yarayacak. Kanıt, bir öncekinden daha dolambaçlı görünebilir ama geometrinin iştah açıcı yollarında dolanıyor.

Verilen $\mathcal{E}$ eğrisinin bir noktasında $\mathcal{E}$ ile en iyi öpüşen çember C olsun. *Düzlemde Eğriler ve Eğrilikleri* adlı bir önceki yazıdaki en genel durumun basitleştirilmiş halini ele almıştık. Oradan devam edelim. Eğer x noktanın ilk koordinatıysa ve eğri bu nokta civarında $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğiyse,

$$\kappa(x) = \frac{|f''|}{\left(1 + f'^2\right)^{3/2}}$$

bulmuştuk (bkz. önceki yazı, (4) numaralı denklem). x_0 çukur noktasında $f'(x_0) = 0$ ve yakın çevresinde $f''(x) > 0$ olduğundan, yukarıdaki eşitliğin türevini alarak,

$$\kappa'(x) = \frac{f'''}{\left(1 + f'^2\right)^{3/2}} - \frac{3}{2}\frac{f}{\left(1 + f'^2\right)^{5/2}} \cdot 2f'f''$$

buluruz ve böylece x_0 noktasında değerlendirerek

$$\kappa'(x_0) = f'''(x_0)$$

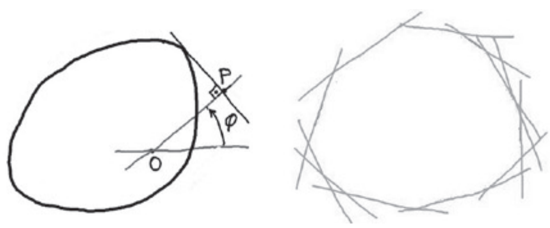
elde ederiz. Öte yandan, öpüşen çemberi tarif eden $g(x)$ fonksiyonunun geçen yazının son sayfasında açık bir formülünü vermiştik. Biraz hesapla, $g'''(x) = 0$ buluruz. Dolayısıyla, x_0'a karşılık gelen nokta $\mathcal{E}$'nin bir verteksi ise, $\kappa'(x_0) = 0$ olacağından $f'''(x_0)$ ile $g'''(x_0)$ eşittir; ikisi de 0'dır. Geneli temsil eden bu durum şunu kanıtlamış oldu: $\mathcal{E}$'nin bir verteksinde $\mathcal{E}$ ile en iyi öpüşen çember C ise, $\mathcal{E}$ ve C'yi tarif eden fonksiyonlar 3'üncü dereceye kadar eşittirler, daha matematiksel bir deyişle eğriler o noktada 3'üncü dereceden teğettirler.

Dört Verteks Teoremi'nin bu kanıtı şöyle ilerleyecek. Öncelikle kapalı, basit, dışbükey bir $\mathcal{E}$ eğrisine karşılık gelen bir $\rho_{\mathcal{E}}$ ***omurga fonksiyonu*** tanımlayacağız. $\mathcal{E}$'nin bir verteksinde $\mathcal{E}$ ile en iyi öpüşen C çemberi, eğriye 3'üncü dereceden teğet olmalı. Bu koşulun, (birazdan tanımlayacağımız) ρ_C ve $\rho_{\mathcal{E}}$ omurga fonksiyonlarının 3'üncü dereceye kadar örtüşmeleriyle aynı olduğunu söyleyeceğiz. Çemberlerin omurga fonksiyonlarının tam tamına 3'üncü dereceden bir diferansiyel denklemle verildiğini görüp, verekslerde $\rho_{\mathcal{E}}$'nin de bu denklemi sağlaması gerektiği sonucuna varacağız. Buradan basit bir hesapla verteks sayısının en az dört olması gerektiğini çıkaracağız.

Kapalı, basit, dışbükey bir $\mathcal{E}$ eğrisinin çevrelediği bölgeden herhangi bir O noktası alalım. O noktasından başlayan bir ışının yatay pozitif eksenle pozitif yönde yaptığı açı φ olsun (Şekil 5a). Işının üstünde öyle bir P noktası bulalım ki, P'den ışına çizilen dik doğru $\mathcal{E}$'ye teğet olsun. $\mathcal{E}$ dışbükey olduğundan böyle bir nokta vardır ve tektir (Kanıtlayabilir misiniz?) Omurga fonksiyonunu her bir $\varphi \in (0, 2\pi)$ için,

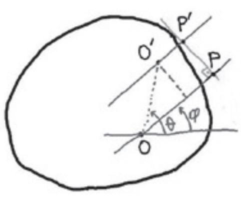
$$\rho_{\mathcal{E}}(\varphi) = |OP|$$

olarak tanımlayalım. Böylece $\mathcal{E}$'ye teğet bir doğru ailesi elde ettik (Şekil 5b). Her bir doğru $\mathcal{E}$'ye bir noktasında teğet. Bu aile $\mathcal{E}$'yi belirlediğinden, $\mathcal{E}$'ye bu doğru ailesinin ***zarfı*** denir.



Şekil 5a ve 5b

Peki O noktası yerine içerde başka bir nokta seçseydik, diyelim O', omurga fonksiyonu nasıl değişecekti? $O' = O + (a, b)$ olsun. Şekil 6'dan izleyin. O zaman



Şekil 6

$$\rho_{\mathcal{E}}(\varphi) - \rho'_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta - \varphi)$$

olur. Ama

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ ve } \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Böylece

$$\rho'_{\mathcal{E}}(\varphi) = \rho_{\mathcal{E}}(\varphi) - a\cos\varphi - b\sin\varphi$$

eşitliğini elde ederiz.

Çemberin Omurga Fonksiyonları. Örnek olarak çemberin omurga fonksiyonlarını hesaplayalım, çünkü birazdan gerekecek. r yarıçaplı ve M merkezli bir C çemberinin M'ye göre omurga fonksiyonunun sabit r fonksiyonu olduğunu hemen görüyoruz. Başka bir

$$O' = M + (a, b)$$

noktası seçimine göreyse

$$\rho'_C = r - a\cos\varphi - b\sin\varphi$$

oluyor. Şimdi kritik gözlem: Rastgele a ve b sayıları için

$$a\cos\varphi - b\sin\varphi$$

türünden fonksiyonlar,

$$\frac{d^2 f}{d\varphi^2} + f = 0$$

diferansiyel denkleminin tüm çözümleridir. Dolayısıyla çemberin ($r - a\cos\varphi - b\sin\varphi$ formunda olduğunu bildiğiniz) tüm omurga fonksiyonları,

$$\frac{d^3 f}{d\varphi^3} + \frac{df}{d\varphi} = 0 \qquad (1)$$

diferansiyel denkleminin tüm çözümleridir (bir önceki denklemin çözümünün integralini alın). Bu gözlemi biraz sonra kullanacağız.

Kanıtımıza geri dönelim. $\mathcal{E}$'nin verekslerini aradığımızı anımsayalım. $\mathcal{E}$ ve öpüşen çemberi C, vertekslerde 3'üncü mertebeden teğet olmalı; yani, o nokta çevresinde bu eğrileri tarif eden fonksiyonların Taylor açılımları 3'üncü dereceye kadar aynı olmalı; yani o noktalarda $\mathcal{E}$'nin omurga fonksiyonuyla C'nin omurga fonksiyonu 3'üncü dereceye kadar örtüşmeli. Dolayısıyla, eğer ρ_C, 3'üncü dereceye kadar türevleri içeren bir diferansiyel denklemin çözümüyse, bu diferansiyel denklem vertekslerde $\rho_{\mathcal{E}}$ tarafından da sağlanmalı. Dahası, bir noktada $\rho_{\mathcal{E}}$'nin 3'üncü türevlere kadar ρ_C ile aynı olduğunu göstermek için $\rho_{\mathcal{E}}$'nin yukardaki (1) diferansiyel denklemini sağlaması yeterli; hatırlayın, o diferansiyel denklemi ρ_C'giller dışında hiçbir fonksiyon sağlayamıyordu.

Öyleyse, $f = \rho_{\mathcal{E}}$ gibi, periyodu 2π olan türevli bir fonksiyonun (1) diferansiyel denklemini kaç noktada sağladığını bulmalıyız. Bu sayı verteks sayısı olacak. Adım adım gidelim.

1. Aradığımız noktalar kümesi sonlu olsun. Aksi durumda kanıtlanacak bir şey yok.

2. $g = f''' + f'$ olsun. $g = (f'' + f)'$ olduğu için Analizin Temel Teoremi'ni kullanarak g'nin ortalamasını 0 buluyoruz:

$$\int_0^{2\pi} g d\varphi = (f'' + f)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

3. g'nin sıfırlarını saymak istiyoruz. g'nin de periyodu 2π olduğundan, yukardaki gözlem sayesinde g'yi 0 yapan φ'lerin sayısının çift ve en az 2 olduğunu anlıyoruz.

4. Bir çelişkiye varmak amacıyla g'nin p_1 ve p_2 olmak üzere sadece 2 tane sıfırı olduğunu varsayalım.

$$h(\varphi) = \cos\left(\frac{p_1 - p_2}{2}\right) - \cos\left(\varphi + \frac{p_1 + p_2}{2}\right)$$

fonksiyonunun da aynı yerlerde tam 2 sıfırı vardır. Gerekirse h'nin ikinci terimini (eksili ifadeyi) alarak g ile h'nin her yerde aynı işarete sahip olmasını sağlayabiliriz. Bu durumda

$$\int gh\, d\varphi > 0$$

olmalı. Ama şimdi bu integralin 0'a eşit olması gerektiğini gösterip kanıtı bitiriyoruz.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} gh\, d\varphi &= \int (f''' + f')h d\varphi \\ &= (f'' + f'h)\Big|_0^{2\pi} - \int (f'' + f)h' d\varphi \\ &= -\int (f''h' + fh')d\varphi \\ &= \int (f'h'' + fh')d\varphi \\ &= -\int (fh''' + fh')d\varphi \\ &= -\int f(h''' + h')d\varphi = 0\end{aligned}$$

Bu hesapta ikinci satıra geçerken parçalı integral alma yöntemini kullandık. Dördüncü ve beşinci satırlarda da öyle. Tüm hesap boyunca integrallerin limitlerini ortalık karışmasın diye yazmadık. ♦

Kaynaklar:

[1] Dmitry Fuchs ve Serge Tabachnikov, **Mathematical Omnibus, thirty lectures on classic mathematics**, AMS 2007.

[2] DeTurck, Dennis; Gluck, Herman; Pomerleano, Daniel; Vick, David Shea, *The four vertex theorem and its converse*, Notices AMS 54 (2007) no. 2, 192–207.