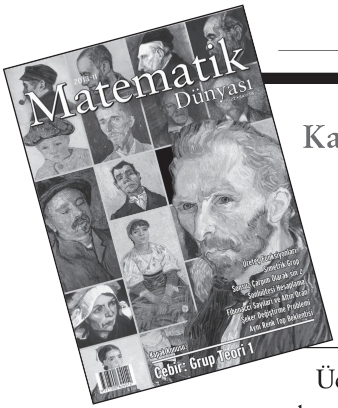


Kapak Konusu: Cebir: Grup Teori I

Grup Kavramı ve Örnekleri

Üç örnekle konuya giriş yapalım. Matematiksel tanımı daha sonra vereceğiz.

Örnekler

Örnek 1. Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$'yi ve bu küme üzerine tanımlanmış toplama işlemini ele alalım, yani $(\mathbb{Z}, +)$ yapısını ele alalım. Her şeyden önce "birleşme özelliği" adı verilen şu özellik vardır:

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Bunun dışında bir "etkisiz eleman" vardır: 0; yani her $x \in X$ için

$$x + 0 = 0 + x = x$$

olur.

Bir üçüncü özellik daha vardır: Her $x \in \mathbb{Z}$ için öyle bir $y \in \mathbb{Z}$ vardır ki

$$x + y = y + x = 0$$

olur. Bu y'nin $-x$ olduğunu bilmeyen yoktur.

İşte grup denen şey, bir küme (örnekte $\mathbb{Z}$) ve bu küme üzerinde yukardaki üç özelliği sağlayan bir işlemdir (örnekte toplama). Tam matematiksel tanım örneklerden sonra gelecek.

Bu örnekte, işlemi değiştirmeden $\mathbb{Z}$ kümesi yerine $\mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{R}$ kümesini de alabilirdik, üç özellik gene sağlanırdı. Hatta çift sayılar kümesi $2\mathbb{Z}$'yi ya da daha genel olarak bir n sayısının katlarından oluşan $n\mathbb{Z}$ kümesini de alabilirdik. Burada n, 0 dahil, herhangi bir gerçel sayı olabilir, mesela $(1/2)\mathbb{Z}$ kümesi (paydası 2 olarak yazılabilen kesirli sayılar kümesi) ve toplama işlemi yukarıdaki üç özelliği sağlar. Ama $\mathbb{Z}$ yerine $\mathbb{N}$'yi alsaydık üçüncü özellik doğru olmazdı. Ya da $\mathbb{Z}$ yerine $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ alsaydık, bu sefer ikinci özellik sağlanmazdı, çünkü etkisiz eleman ele alınan kümenin içinde olmalıdır, dışarlarda bir yerde değil.

Bu örnekte $\mathbb{Z}$ yerine $\mathbb{Z}\setminus\{3, -3\}$ alsaydık bir grup elde etmezdik, çünkü her ne kadar üç özellik doğruysa da, bu küme üzerinde toplama her zaman tanımlı değildir, örneğin 1 ile 2 bu kümededir ama toplamları olan 3 bu kümede değildir. Yani toplama $\mathbb{Z}\setminus\{3, -3\}$ kümesi üzerinde bir işlem değildir.

Örnek **2.** Bu sefer $\mathbb{R}^*$ olarak göstereceğimiz 0'dan farklı gerçel sayılar kümesini alacağız: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ama işlemimiz çarpma olacak. Yani $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ yapısını ele alacağız. Birleşme özelliği gene geçerli:

$$x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z.$$

Etkisiz eleman gene var: 1; yani her $x \in \mathbb{R}^*$ için

$$x\cdot 1 = 1\cdot x = x$$

olur. Ayrıca her $x \in \mathbb{R}^*$ için öyle bir $y \in \mathbb{R}^*$ vardır ki $x\cdot y = y\cdot x = 1$ olur. Bu y elbette $1/x$ sayısıdır.

Bu örnekte $\mathbb{R}^*$ yerine

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\setminus\{0\},$$

$$\mathbb{R}^{>0} = (0, \infty)$$

ya da

$$\mathbb{Q}^{>0} = \mathbb{R}^{>0} \cap \mathbb{Q}$$

kümelerinden birini de alabilirdik, üç özellik gene sağlanırdı. Ama $\mathbb{R}^*$ yerine $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ kümesini alsaydık üçüncü özellik doğru olmazdı, mesela 2 sayısının çarpımsal tersi olan 1/2 bu kümede değildir. Öte yandan $\{1, -1\}$ kümesi çarpma işlemi için yukardaki üç özelliği de sağlar. Tek elemanlı $\{1\}$ kümesi de çarpma altında kapalıdır ve üç özelliği sağlar. Şu örnek de ilginç: Eğer $a \in \mathbb{R}^*$ ve

$$A = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

ise, $(A, \cdot)$ yapısının yukardaki üç özelliği vardır. Eğer $a, b \in \mathbb{R}^*$ ve

$$A = \{a^n b^m : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

ise, $(A, \cdot)$ yapısının da yukardaki üç özelliği vardır. Bir de şu örneğe bakalım:

$$B = \{\pi^n q : n \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Q}^+\}.$$

Bu son küme de çarpma işlemi altında kapalıdır (yani iki elemanının çarpımı yine içindedir) ve yukarıdaki üç özelliği de sağlar.

Örnek 3. Yukardaki örnekler ***değişmeli*** grup örneğidir, yani her x, y için, birinci örnekte

$$x + y = y + x,$$

ikinci örnekte

$$x\cdot y = y\cdot x$$

olur. Değişmeli gruba daha ziyade ***Abel*** grubu denir. Bu örnekte ele alacağımız grup Abel olmayacak.

Dikkat ederseniz yukardaki iki örnekte bir küme ve bu küme üzerine bir işlem (birinci örnekte toplama, ikinci örnekte çarpma) aldık. Nitekim bir grup olması için bir küme ve bu küme üzerine tanımlı (ikili) bir işlem olmalıdır. Bu son örneğimizde herhangi bir X kümesi alacağız ve üzerine işlem tanımlayacağımız küme X'in eşleşmeleri (ya da bijeksiyonları), yani X'ten X'e giden birebir ve örten fonksiyonlar kümesi olacak. Grup teoride eşleşme ya da bijeksiyon yerine ***permütasyon*** sözcüğü kullanılır, biz de öyle yapacağız. X'in permütasyonları kümesi Sym X olarak yazılır:

$$\text{Sym } X = \{f\colon X \to X\colon f \text{ birebir ve örten}\}.$$

İşlem olarak fonksiyonların bileşkesini alacağız Anımsatalım, $f: X \to Y$ ve $g: Y \to Z$ birer fonksiyonsa, kısaca "gof" diye okunan $g \circ f: X \to Z$ fonksiyonu, her $x \in X$ için

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

olarak tanımlanır.

Birebir ve örten fonksiyonların bileşkesi de birebir ve örtendir, dolayısıyla eğer $f, g \in \text{Sym } X$ ise $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonları da Sym X kümesindedir.

İlk iki örnekte altını çizdiğimiz üç özelliği teker teker kontrol edelim. Birleşme özelliği sadece permütasyonlar için değil, bileşkesi alınabilen tüm fonksiyonlar için geçerlidir: Eğer

$$f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z,\ h\colon Z \to T$$

ise,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

olur, bunu temel kümeler kuramından biliyoruz. Birinci özellik (birleşme özelliği) sağlandı. İkinci özellik, etkisiz elemanın varlığını söylüyor. Sym X'te etkisiz eleman var mı? Özdeşlik fonksiyonu

$$\text{Id}_X: X \to X,$$

sadece eşleşmelerin değil, tüm uygun fonksiyonlar için bileşke işleminin etkisiz elemanıdır ve elbette Sym X'in bir elemanıdır. Unutanlar için anımsatalım, Id_X fonksiyonu, her $x \in X$ için

$$\text{Id}_X(x) = x$$

olarak tanımlanmıştır. Elbette her $f: X \to Y$ fonksiyonu için

$$f \circ \text{Id}_X = f \text{ ve } \text{Id}_Y \circ f = f$$

olur. Bu özellik de sağlandı. Sonuncu özelliğe gelelim. $f \in \text{Sym } X$ olsun. Acaba

$$f \circ g = g \circ f = \text{Id}_X$$

eşitliğini sağlayan bir $g \in \text{Sym } X$ var mı? Var, çünkü f birebir ve örten olduğundan, f'nin bir "ters fonksiyonu" vardır. Bunu da unutanlar için anımsatalım: Eğer $f: X \to Y$ bir eşlemeyse, o zaman

$$f^{-1}: Y \to X$$

fonksiyonu, her $y \in Y$ için

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

önermesi doğru olacak biçimde tanımlanmıştır, yani f fonksiyonu a'yı b'ye götürüyorsa, f^{-1} fonksiyonu f'nin yaptığını bozarak b'yi tekrar a'ya geri getirir. f^{-1} fonksiyonu da bir eşlemedir ve

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y \text{ ve } f^{-1} \circ f = \text{Id}_X$$

olur. Demek ki eğer $f \in \text{Sym } X$ ise f^{-1} fonksiyonu da Sym X'tedir ve

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}_X$$

olur. Önemsediğimiz üçüncü özellik de sağlandı.

Eğer $|X| > 2$ ise bileşke işlemi Sym X üzerine değişmeli değildir. Örneğin $X = \{1, 2, 3\}$ olsun ve $f, g \in \text{Sym } X$ permütasyonları şöyle tanımlansınlar:

$$f(1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3)=3$$

ve

$$g(1) = 1,\ g(2) = 3,\ g(3) = 2.$$

O zaman

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 3$$

ve

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 2$$

olur. $g \circ f$ ve $f \circ g$ permütasyonları 1'de farklı değer aldıklarından birbirine eşit değildirler.

Sonuç olarak Sym X kümesi bileşke işlemiyle birlikte bir grup olur ama bir Abel grubu değildir. Çok çok önemli bir gruptur. Hakkında çok daha fazla konuşacağız.

Örnekleri daha sonra çoğaltmak üzere, grubun tanımına gelelim.

Küme ve İşlem. Bir grubun oluşması için her şeyden önce bir küme gerekir. Kümeye G diyelim, grubun G'si. Bir grup sadece bir küme değildir yoksa grup yerine küme derdik. Bir grup bir G kümesinden ve $G \times G$ kartezyen çarpımından G'ye giden bir fonksiyondan oluşur. Bu fonksiyona "fonksiyon"dan ziyade ***işlem***, bazen de ***ikili işlem*** denir. Ayrıca eğer $(x, y) \in G \times G$ ise, fonksiyonun bu ikiliyi gönderdiği G'nin elemanını şimdilik

$$x \star y$$

olarak yazalım. Yukardaki örneklerde $x \star y$ işlemi sırasıyla $x + y$, $x \cdot y$ ve $x \circ y$ idi. İşlemde unutulmaması gereken nokta, işlemin sonucunun gene G kümesinde olma zorunluluğudur. Örneğin

$$(x, y) \mapsto x - y$$

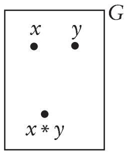
kuralı $\mathbb{N}$ üzerine bir işlem tanımlamaz, çünkü x ve y birer doğal sayıysa $x - y$ her zaman bir doğal sayı değildir; öte yandan aynı kural bize $\mathbb{Z}$ kümesi üzerine bir işlem tanımlar. Bir başka örnek:

$$(x,y) \longmapsto \frac{x}{y}$$

kuralı $\mathbb{R}$ üzerine bir işlem tanımlamaz, çünkü

$$y = 0$$

ise x/y anlamsızdır. Öte yandan bunun bir işlem olmasındaki yegâne engel 0'a bölünme engelidir, 0'ı atalım: Aynı kural bize $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesi üzerine bir işlem tanımlar.



Üzerinde ikili bir işlem tanımlanmış bir kümeyi yukarıda resmettik.

Bir grubun oluşması için bir küme ve bu küme üzerine tanımlanmış bir işlem gerekir dedik, ama bir grubun oluşması için bunlar yeterli değildir, ayrıca kümenin ve işlemin aşağıda $G1$, $G2$, $G3$ olarak listeleyeceğimiz üç özelliği sağlaması gerekir.

$G1$. Birleşme Özelliği. Bir grubun oluşması için sağlanması gereken birinci özellik, birleşme özelliğidir. Yani her $x, y, z \in G$ için

$$x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$$

olmalı. Bu çok önemli bir özelliktir. Bir işlemde bu ya da en azından buna benzer bir özellik yoksa durum umutsuz demektir, kümeyi ve işlemi erişimi zor bir kenara kaldırabilirsiniz! En azından

$$x \star (x \star x) = (x \star x) \star x$$

eşitliği doğru olmalı ki, hangi sırayla çarpacağımıza (yani işlem yapacağımıza) dair kuşkuya düşmeden x'i kendisiyle üç defa çarpabilelim ve x^3 diye bir elemandan sözedebilelim.

Birleşme özelliği sayesinde elli tane elemanı, belirlenmiş sırayı bozmamak kaydıyla istediğimiz gibi çarpabiliriz; örneğin,

$$((x \star y) \star z) \star t,\ (x \star (y \star z)) \star t,$$
$$(x \star y) \star (z \star t),$$
$$x \star ((y \star z) \star t),$$
$$x \star (y \star (z \star t))$$

çarpımlarının hepsi eşittir; dolayısıyla bu çarpımları $x \star y \star z \star t$ olarak parantezsiz yazabiliriz. Üç ve dört eleman için doğru olan bu özellik her sayıda elemanın çarpımı için de doğrudur. (Bunun kanıtlanması gerekir, ama Bourbaki dışında herhangi bir kitapta bu bariz ve sıkıcı önermenin kanıtlandığını görmedim; güzelim geleneklere uyarak biz de kanıtlamayacağız.)

Her zaman elemanların çarpım sırasını değiştiremeyebiliriz, çünkü $x \star y$ her zaman $y \star x$ elemanına eşit olmak zorunda değildir. Bu özelliğin sağlandığı gruplara ***değişmeli grup*** ya da ***Abel grubu*** denir. En basit gruplar olduklarından, Abel grupların grup teorisinde özel bir yeri vardır.

Sadece sonlu sayıda elemanın çarpımının tanımlandığını gözlemleyelim. Sonsuz sayıda elemanı çarpmak (ya da toplamak) için yakınsaklık gibi analize özgü kavramlar gerekir.

$G2$. Etkisiz Elemanın Varlığı. Bir grubun oluşması için $\star$ işleminin birleşme özelliği dışında bir de ayrıca ***etkisiz elemanı*** olmalıdır, yani üzerinde ikili bir işlem tanımlanmış G kümesinin öyle bir e elemanı olmalıdır ki, her $x \in G$ için

$$e \star x = x \star e = x$$

eşitliği sağlansın. (Dikkat: "her x için öyle bir e vardır ki..." demedik, "öyle bir e var ki her x için..." dedik.) Bu özelliği sağlayan bir elemana ***etkisiz eleman*** denir. Aslında her $x \in G$ için

$$e \star x = x$$

eşitliğini sağlayan elemana ***soldan etkisiz eleman***, her $x \in G$ için $x \star e = x$ eşitliğini sağlayan elemana ***sağdan etkisiz eleman*** denir. Ama soldan ve sağdan etkisiz elemanlar - eğer varsa - eşittirler:

Önsav 1. *Eğer $\star$, G üzerine ikili bir işlemse ve bu işlemin sağdan ve soldan etkisiz elemanları varsa, bu elemanlar eşittirler.*

Kanıt. e soldan, f de sağdan etkisiz eleman olsun. Her $x \in G$ için $e \star x = x$ olduğundan (bunu $x = f$ özeline uygulayarak) $e \star f = f$ eşitliğini elde ederiz. Her $x \in G$ için $x \star f = x$ olduğundan (bunu $x = e$ özeline uygulayarak) $e \star f = e$ eşitliğini elde ederiz. Demek ki

$$f = e \star f = e.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Demek ki bir grupta tek bir etkisiz eleman vardır.

$G3$. Elemanların Tersi. Bir grupta, grubun her x elemanı için

$$x \star y = y \star x = e$$

eşitliğini sağlayan bir y elemanı olmalıdır. Buradaki e, G2'de varlığı söylenen grubun yegane etkisiz elemanıdır. Verilmiş bir x için bu özelliği sağlayan bir y vardır ama her x için başka bir y olabilir (ve nitekim öyle de olur.) Önce verilmiş bir x için bu özelliği sağlayan y'nin biricik olduğunu kanıtlayalım.

Önsav 2. *Birleşme özelliğini sağlayan ve etkisiz elemanı e olan bir* $(G, \star)$ *yapısında (e'nin biricik olduğunu bir önceki önsavdan biliyoruz) eğer*

$$z \star x = x \star y = e$$

ise

$$z = y$$

olur.

Kanıt. Kanıtımız tek bir satırdan oluşacak:

$$y = e \star y = (z \star x) \star y = z \star (x \star y) = z \star e = z.$$

Kanıtımız bitmiştir. □

Madem ki bir grupta, verilmiş bir x için,

$$x \star y = y \star x = e$$

eşitliğini sağlayan bir ve bir tane y var, bu y elemanına özel bir ad verelim: y'ye x'in ($\star$ işlemine göre) ***tersi*** adı verilir ve bu eleman x^{-1} olarak yazılır. Yukardaki önsava göre bir grupta her x elemanı için

$$y = x^{-1} \Leftrightarrow x \star y = e \Leftrightarrow y \star x = e$$

olur. Bunun sonucu olarak, eğer y, x'in tersiyse, x'in de y'nin tersi olduğu anlaşılır; nitekim yukardaki eşdeğer koşullardan son ikisi x ve y'ye göre birbirinin simetriğidir. Yani x'in tersinin tersi x'tir: $(x^{-1})^{-1} = x$.

$e \star e = e$ olduğundan, $e^{-1} = e$ olur. Ama e kendi kendisinin tersi olan yegâne eleman olmayabilir; örneğin $\mathbb{R}^\star$ grubunda -1 elemanı da kendisinin tersidir, ya da Sym X grubunda X'in iki elemanını değiştiren ama diğer hiçbir elemanı değiştirmeyen eşleme kendi kendisinin tersidir.

Kolayca gösterilebileceği üzere bir grupta $x \star y$ elemanının tersi

$$y^{-1} \star x^{-1}$$

elemanıdır ve ($x \star y = y \star x$ olmadıkça) $x^{-1} \star y^{-1}$ değildir.

Bir grupta sadeleştirme yapılabilir, yani

$$x \star a = x \star b$$

ise $a = b$ olur. Nitekim, eşitliğin her iki tarafını da soldan x^{-1} ile çarparsak $a = b$ eşitliğini buluruz. Bu kanıtı daha formel olarak yazalım:

$$\begin{aligned} a &= e \star a = (x^{-1} \star x) \star a \\ &= x^{-1} \star (x \star a) = x^{-1} \star (x \star b) \\ &= (x^{-1} \star x) \star b = e \star b = b. \end{aligned}$$

Ve elbette $a \star x = b \star x$ ise $a = b$ olur, kanıt aynıdır. Ama dikkat, $x \star a = b \star x$ ise a ve b eşit olmak zorunda değildirler.

Bir grupta $a \star x \star b = c$ denkleminin bir ve bir tane çözümü vardır:

$$x = a^{-1} \star c \star b^{-1}.$$

Ama

$$x \star a \star x = b$$

eşitliğinin çözümü olmayabilir, ya da olduğunda birden fazla çözüm olabilir.

Grubun tanımını biçimsel olarak yazalım.

Tanım. *Bir grup, bir G kümesi ve bu G kümesi üzerine aşağıdaki G1, G2, G3 özelliklerini sağlayan bir* $\star : G \times G \to G$ *ikili işleminden oluşur.*

G1. *Her* $x, y, z \in G$ için $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$.

G2. *Öyle bir* $e \in G$ *vardır ki, her* $x \in G$ için $x \star e = e \star x = x$ *olur.* (*Bu özelliği olan e elemanı zorunlu olarak biriciktir.*)

G3. *e, bir önceki özelliği sağlayan yegâne eleman olsun. Her* $x \in G$ *için öyle bir* $y \in G$ *vardır ki* $x \star y = y \star x = e$ *eşitlikleri sağlanır.* (*Verilmiş her* $x \in G$ *için, bu özelliği sağlayan y elemanı zorunlu olarak biriciktir ve* x^{-1} *olarak yazılır.*)

Demek ki bir grup, yukarıdaki $G1$, $G2$, $G3$ özelliklerini sağlayan bir G kümesinden ve bu küme üzerine tanımlanmış bir $\star$ işleminden oluşur; yani bir grup bir $(G, \star)$ ikilisidir. Ama çoğu zaman işlemin ne olduğu ya çok barizdir ya da önemli değildir ve bu durumda $(G, \star)$ grubundan değil G grubundan sözedilir. Örneğin $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{Z}$ grubundan sözedildiğinde işlemin toplama olduğu söylenmeden varsayılır. $\mathbb{R}^\star$, $\mathbb{Q}^\star$, $\mathbb{R}^{>0}$, $\mathbb{Q}^{>0}$ grupları aksi söylenmedikçe çarpma altında bir gruptur. Sym X ise şaşmaz bir biçimde bileşke altında bir gruptur.

$x \star y$ elemanına "x ve y'nin ***çarpımı***" denir (ama işlem toplama bile olabilir!)

Örneklerimize devam edelim.

Örnekler

Örnek 4. İlk üç örneğimiz sayı ve fonksiyon kümelerinden oluşuyordu. Bu örnekte bir X kümesinin altkümelerinden oluşan $\wp(X)$ kümesine bakacağız. Bu kümeyi bir gruba dönüştüreceğiz. Önce işlemi tanımlayalım, bir gruba ulaşmanın başka yolu yok. İşlemimiz ***simetrik fark*** işlemi olarak adlandırılan Δ işlemi olacak. Bu işlemi tanımlayalım: $A, B \in \wp(X)$ için, $A \Delta B$ şöyle tanımlanmıştır:

$$A \Delta B = (A \cup B)\setminus(A \cap B).$$

Simetrik farkı şöyle de tanımlayabilirdik:

$$A \Delta B = (A\setminus B) \cup (B\setminus A).$$

İki tanımın eşdeğer olduğunun kanıtını okura bırakıyorum. Şu özellikler doğrudur:

G1. Her $A, B, C \in \wp(X)$ için

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C.$$

Bu, hemen bakınca doğruluğu anlaşılacak eşitliklerden değil, biraz uğraşmak gerekiyor. Ama bundan sonraki eşitlikler bariz.

G2. Her $A \in \wp(X)$ için

$$A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A$$

olur. Demek ki $\emptyset$, simetrik fark işleminin etkisiz elemanı.

G3. Her $A \in \wp(X)$ için

$$A \Delta A = \emptyset$$

olur. Demek ki her elemanın tersi var ve bu ters elemanın kendisi. Bir başka deyişle her A için $A^{-1} = A$.

Demek ki $(\wp(X), \Delta)$ bir gruptur. Ayrıca Abel grubudur, yani her $A, B \in \wp(X)$ için

$$A \Delta B = B \Delta A$$

olur.

Örnek 5. X tercihan sonsuz bir küme olsun ve X'in sonlu altkümelerinden oluşan $\wp^{<\omega}(X)$ kümesine bakalım. Eğer A ve B bu kümedelerse, $A \Delta B$ de elbette bu kümededir. Demek ki Δ, $\wp^{<\omega}(X)$ kümesi üzerine bir işlemdir. $G1$ elbette sağlanıyor. Boşküme sonlu bir küme olduğundan $\wp^{<\omega}(X)$ kümesinin bir elemanıdır, dolayısıyla $G2$ de sağlanıyor. Yukardaki örnekte de gördüğümüz üzere bir $A \in \wp^{<\omega}(X)$ elemanının Δ işlemi için tersi gene kendisi olduğundan, $G3$ özelliği de sağlanıyor. Demek ki $(\wp^{<\omega}(X), \Delta)$ ikilisi bir gruptur. Bu tür durumlarda $\wp^{<\omega}(X)$ grubunun (bir önceki örnekte tanımlanan) $\wp(X)$ grubunun bir ***altgrubu*** olduğu söylenir. Ama altgruplar çok önemli bir kavram olduğu için bu kavramı apayrı bir yazıda ele alacağız.

Bu iki örneğin oldukça egzotik olduğunu söyleyebiliriz. Aşağıda daha klasik grup örnekleri vereceğiz.

Örnek 6. (**Kartezyen Çarpım 1.**) G ve H iki grup olsun. G ve H farklı kümeler ve işlemleri de farklı olabilir ama biz gene de G'nin ve H'nin işlemlerini aynı simgeyle, $\star$ ile gösterelim. $G \times H$ kartezyen çarpımı kümesi,

$$(g_1, h_1) \star (g_2, h_2) = (g_1 \star g_2, h_1 \star h_2)$$

formülüyle tanımlanan işlemle "doğal olarak" bir grup olur. $G1$'in basit kanıtı:

$$\begin{aligned}((g_1, h_1) \star (g_2, h_2)) \star (g_3, h_3) &= (g_1 \star g_2, h_1 \star h_2) \star (g_3, h_3)\\ &= ((g_1 \star g_2) \star g_3, (h_1 \star h_2) \star h_3)\\ &= (g_1 \star (g_2 \star g_3), h_1 \star (h_2 \star h_3))\\ &= (g_1, h_1) \star (g_2 \star g_3, h_2 \star h_3)\\ &= (g_1, h_1) \star ((g_2, h_2) \star (g_3, h_3)).\end{aligned}$$

Diğer iki özelliğin de kanıtı kolay: Eğer e_G ve e_H sırasıyla G ve H gruplarının etkisiz elemanıysa, (e_G, e_H) elemanı $G \times H$ grubunun etkisiz elemanıdır. Ayrıca, eğer

$$(g, h) \in G \times H$$

ise, kolayca kontrol edilebileceği üzere

$$(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$$

olur.

$G \times H$ grubuna G ve H gruplarının ***kartezyen çarpımı*** adı verilir. Eğer G ve H Abel gruplarıysa, $G \times H$ grubu da bir Abel grubudur. Ve bu önermenin diğer istikameti de doğrudur.

İki grubun kartezyen çarpımı gibi, sonlu sayıda grubun da kartezyen çarpımı alınabilir. Sonraki örneklerde sonsuz sayıda grubun kartezyen çarpımını almayı göreceğiz.

Örnek 7. (**Kartezyen Çarpım 2.**) I herhangi bir küme ve G bir grup olsun. Fonk(I, G), I'dan G'ye giden foksiyonlar kümesi olsun. G'yi grup yapan işlemi $\star$ olarak yazalım. G'nin etkisiz elemanı da e olsun. Şimdi Fonk (I, G) üzerinde bir işlem tanımlayalım. Bu işlem de genellikle $\star$ olarak yazılır. Eğer

$$f, g \in \text{Fonk}(I, G)$$

ise

$$f \star g: I \to G$$

fonksiyonu şöyle tanımlanır: Her $i \in I$ için,

$$(f \star g)(i) = f(i) \star g(i).$$

$f \star g$ fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının ***noktasal çarpımı*** adı verilir. Fonk(I, G) kümesi bu işlemle birlikte bir grup olur. $G1$ özelliğinin kanıtını okura bırakıyoruz; nitekim G bu özelliği sağladığından Fonk(I, G) de sağlar. I'nın her noktasında e değerini alan sabit e fonksiyonu Fonk(I, G) grubunun etkisiz elemandır. Ve son olarak eğer $f \in$ Fonk(I, G) ise, her $i \in I$ için $f^{-1}(i) = f(i)^{-1}$ kuralıyla tanımlanan fonksiyon f'nin tersidir; nitekim, her $i \in I$ için,

$$(f \star f^{-1})(i) = f(i) \star f^{-1}(i) = f(i) \star f(i)^{-1} = e$$

olur, yani $f \star f^{-1}$ fonksiyonu sabit e değerini alan fonksiyondur; benzer şekilde $f^{-1} \star f$ fonksiyonunun sabit e fonksiyonu olduğu gösterilebilir.

Bu grup genelde Fonk(I, G) olarak değil de $\prod_I$ G olarak, bazen de G^I olarak yazılır ve G grubunun kendisiyle I defa ***kartezyen çarpımı*** olarak adlandırılır. Ve bir fonksiyon aldığı değerler tarafından belirlendiğinden,

$$f \in \text{Fonk}(I, G)$$

fonksiyonu $f = (f(i))_i$ olarak yazabilir ve bu yazılım tercih edilir. Hatta Çoğu zaman $f(i)$ yerine f_i yazılır, o zaman $f = (f_i)_i$ olur. Bu yazılımla fonksiyonların çarpımı,

$$(f_i)_i \star (g_i)_i = (f_i \star g_i)_i$$

şeklini alır.

Eğer I sonluysa, diyelim 3 elemanı varsa, bir

$$G \times G \times G$$

yazılımı tercih edilebilir ve elemanları (g_1, g_2, g_3) olarak yazılabilir. Eğer I'nın n tane elemanı varsa G^n ya da

$$G \times G \times \cdots \times G$$

yazılır. $n = 2$ olduğunda bir önceki örneğin $G = H$ durumuna çok benzer bir örnek elde ettiğimize dikkat edin.

$\prod_I G$ grubunun abelyen olması için G'nin abelyen olması yeter ve gerek koşuldur. Ayrıca, bir X kümesinin kardinalitesini $|X|$ olarak yazarsak,

$$\left|\prod_I G\right| = |G|^{|I|}$$

eşitliği geçerlidir.

Örnek 8. (**Kartezyen Çarpım 3.**) I bir küme ve $(G_i)_{i\in I}$ bir grup ailesi olsun. Her G_i grubunun işlemini aynı simgeyle, $\star$ ile gösterelim.

$$\prod_I G_i = \left\{f : I \to \bigcup_{i\in I} G_i : \text{her } i \in I \text{ için } f(i) \in G_i\right\}$$

olsun. $f \in \prod_I G_i$ için $f(i)$ yerine f_i yazalım ve f elemanını (ya da fonksiyonunu) $(f_i)_i$ olarak gösterelim. Şimdi $\prod_I G_i$ kümesinde

$$(f_i)_i \star (g_i)_i = (f_i \star g_i)_i$$

tanımını yapalım. Bu işlemle $\prod_I G_i$ kümesi bir grup olur. Bunun kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır. $\prod_I G_i$ grubuna $(G_i)_i$ grup ailesinin ***kartezyen çarpımı*** adı verilir. Kartezyen çarpımın Abel olması için yeter ve gerek koşul her G_i grubunun Abel olmasıdır.

Eğer her G_i grubu G grubuna eşitse, bir önceki örneği buluruz.

Eğer I sonluysa, mesela $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ ise $\prod_I G_i$ yerine

$$G_1 \times \cdots \times G_n$$

ya da

$$\prod^n{}_{i=1} G_i$$

yazılımları da kullanılır.

Örnek 9. (**Direkt Toplam ya da Kısıtlanmış Çarpım.**) Yukarıda, bir $(G_i)_{i\in I}$ grup ailesi için $\prod_I G_i$ kümesini bir fonksiyon kümesi olarak tanımladık: $(G_i)_{i\in I}$ kümesinin bir g elemanı I kümesinden $\cup_{i\in I} G_i$ kümesine giden ve her $i \in I$ için $g_i = g(i) \in G_i$ özelliğini sağlayan bir fonksiyondu.

$$\text{Supp } g = \{i \in I : \text{her } i \in I \text{ için } g_i \neq e_i\}$$

olsun. (Küme parantezi içindeki e_i, G_i grubunun etkisiz elemanıdır.) Supp g kümesine g'nin ***kaidesi*** adı verilir. Şimdi şu kümeye bakalım:

$$\prod_I G_i = \left\{f : I \to \bigcup_{i\in I} G_i : \text{her } i \in I \text{ için } f(i) \in G_i\right\}$$

Bu kümenin çarpma altında kapalı olduğunu, $\prod_I G_i$ grubunun etkisiz elemanını içerdiğini ve içerdiği her elemanın tersini de içerdiğini kanıtlamak zor değil. Dolayısıyla $\oplus_{i\in I} G_i$ kümesi $\oplus_I G_i$ grubunda tanımlanan işlemle birlikte bir grup olur. Bu gruba ***kısıtlanmış çarpım*** ya da ***direkt toplam*** adı verilir.

Eğer I sonluysa, $\oplus_{i\in I} G_i$ ile $\prod_{i\in I} G_i$ arasında bir fark yoktur. Eğer $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ ise $\oplus_I G_i$ yerine $G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$, $G_1 \times \cdots \times G_n$ ya da $\prod^n{}_{i=1} G_i$. yazılımları da kullanılır.

Örnek 10. Her grup matematiksel bir yapı örneğidir. Bu yazılarda ileride çok daha başka matematiksel yapı örnekleri göreceğiz. M herhangi bir matematiksel yapı olsun. M bir çizge, bir topolojik uzay, bir metrik uzay, bir grup, bir halka, bir cisim, bir modül, bir vektör uzayı, bir cebir ya da yazarın ya da okurun adını duymadığı, varlığını bilmediği matematiksel bir yapı olabilir. Her matematiksel yapının otomorfizmaları bir biçimde tanımlanır. Otomorfizması tanımlanmamış matematiksel yapı nerdeyse düşünülemez. Otomorfizmalar, M'den M'ye giden ve bazı özellikleri olan fonksiyonlardır. Otomorfizma kavramı yapıya göre değişir ama otomorfizma kavramı istisnasız her zaman, otomorfizmalar kümesi Aut M bileşke altında grup olacak biçimde tanımlanır. Dolayısıyla otomorfizmalar her zaman eşleşme olmak zorundadırlar ve

a. İki otomorfizmanın bileşimi otomorfizma,

b. Özdeşlik fonksiyonu Id_M otomorfizma,

c. Bir otomorfizmanın tersi de otomorfizma olacak biçimde tanımlanırlar.

Örnek 11. Analizden biraz grup örneği verelim. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlar (toplama işlemi altında) bir grup oluştururlar. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden sürekli fonksiyonlar (gene toplama altında) bir grup oluştururlar. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden türevlenebilir ya da integrallenebilir fonksiyonlar bir grup oluştururlar. Aşağıdaki fonksiyon kümeleri de toplama işlemi altında bir grup oluştururlar:

$$\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\lim_{x\to 5} f(x)=0\},$$
$$\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\lim_{x\to 3^-} f(x)=0\},$$
$$\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\lim_{x\to\infty} f(x)=0\},$$
$$\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f'(5)=0\},$$
$$\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\int_0^1 f(x)\,dx=0\right\},$$
$$\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\int_0^1 f(x)\,dx\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Örnek 12. Analizden biraz daha grup örneği verelim. Bir $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ elemanı için

$$(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$$

kuralıyla verilmiş $\mathbb{R}^2$'nin dönüşümlerine bakalım. Bu tür dönüşümlere ***öteleme*** adı verilir. Bu dönüşümü $\tau_{(a,b)}$ olarak gösterelim. Demek ki tanım gereği her $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$\tau_{(a,b)}(x, y) = (x + a, y + b)$$

olur.

$$T = \{\tau_{(a,b)} : (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

olsun. T, bileşke işlemi altında bir gruptur. Nitekim, kolayca kontrol edilebileceği üzere,

$$\tau_{(a,b)} \circ \tau_{(c,d)} = \tau_{(a+c,b+d)} \qquad (1)$$

olur, $\tau_{(0,0)}$ etkisiz elemandır, yani özdeşlik fonksiyonudur ve

$$\tau^{-1}{}_{(a,b)} = \tau_{(-a,-b)}$$

olur. (1)'den dolayı bu grupla $\mathbb{R}^2$ grubu arasında pek bir fark yoktur.

Bir $r \in \mathbb{R}^*$ elemanı için $\mathbb{R}^2$'nin

$$(a, b) \mapsto (ra, rb)$$

kuralıyla verilmiş μ_r dönüşümlerine bakalım. Bu tür dönüşümlere ***homoteti*** denir. Homotetiler kümesi M olsun. M, fonksiyonların bileşkesi altında bir gruptur. Nitekim,

$$\mu_r \circ \mu_s = \mu_{rs} \qquad (2)$$

olur, μ_1 etkisiz elemandır ve $\mu_r^{-1} = \mu_{r^{-1}}$ olur. (2)'den dolayı bu grupla $\mathbb{R}^*$ grubu arasında pek bir fark yoktur.

Bir α açısı için, $\mathbb{R}^2$ düzlemini $O(0, 0)$ noktası etrafında α derece döndürelim. Bu döndürüyü ρ_α olarak gösterelim. Bu tür dönüşümlerin kümesi R olsun. R, fonksiyonların bileşkesi altında bir gruptur. Nitekim,

$$\rho_\alpha \circ \rho_\beta = \rho_{\alpha+\beta} \qquad (3)$$

olur, ρ_0 etkisiz elemandır ve $\rho_\alpha^{-1} = \rho_{-\alpha} = \rho_{2\pi-\alpha}$ olur. Bu arada $\rho_{2\pi} = \rho_0 = \mathrm{Id}$ eşitliğini farkedelim.

Örnek 13. Daha sonra matematiksel olarak tanımlayacağımız ama okurun lise yıllarından bilmesi gereken "modülo n" sayılar kümesi toplama altında bir grup oluşturur.

Örneklerimizi şimdilik burada bitirelim.

Bundan böyle, $(\mathbb{Z}, +)$ ve $(\mathrm{Sym}\ X, \circ)$ örneklerinde olduğu gibi somut bir gruptan sözedilmiyorsa, sözkonusu olan rastgele bir grupsa, dolayısıyla $\star$ işlemi belirtilmemişse, $\star$ yerine $\cdot$ ve $x \star y$ yerine $x{\cdot}y$, hatta hiç noktasız xy yazacağız. Ayrıca e yerine 1 yazacağız. Tabii bu 1, bildiğimiz 1 doğal sayısı olmayabilir. Bu yazıda kanıtladığımız

$$y = x^{-1} \Leftrightarrow x \star y = e \Leftrightarrow y \star x = e$$

eşdeğerlikleri bir defa daha bu dilde yazalım, önemliler çünkü:

$$y = x^{-1} \Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow yx = 1.$$

Alıştırmalar

1. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}: a, b \in \mathbb{Q}\}$ olsun. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesinin toplama işlemi altında, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}$ kümesinin çarpma işlemi altında birer grup olduğunu gösterin. (İkincisi birincisi kadar kolay olmayabilir.)

2. G bir grup, X bir küme olsun. $f : G \to X$ herhangi bir eşleme olsun. $x, y \in X$ için

$$x \star y = f(f^{-1}(x)\ f^{-1}(y))$$

tanımını yapalım. $(X, \star)$ ikilisinin bir grup olduğunu kanıtlayın. Her $a, b \in G$ için

$$f(ab) = f(a) \star f(b)$$

eşitliği kanıtlayın.

3. G bir grup ve $c \in G$ olsun. Eğer $x \in G$ için $xc = cx$ eşitliği doğruysa x'in c'yi ***merkezlediği*** ya da c ile x'in ***birbiriyle değiştiği*** söylenir.

$$C_G(c) = \{x \in G: xc = cx\}$$

olsun. Şunları kanıtlayın:

a. G'nin etkisiz elemanı $C_G(c)$'dedir.

b. Eğer $x, y \in C_G(c)$ ise $xy \in C_G(c)$ olur.

c. Eğer $x \in C_G(c)$ ise $x^{-1} \in C_G(c)$ olur.

Demek ki $C_G(c)$ kümesi G grubunun işlemi altında kendi başına bir gruptur. (Bu tür gruplara

G'nin altgrubu denir. İlerde bunlardan çok sık sözedeceğiz.) $C_G(c)$ kümesine c'nin (G'de) ***merkezleyicisi*** adı verilir.

4. G bir grup ve $C \subseteq G$ olsun. Eğer $x \in G$ elemanı her $c \in C$ için $xc = cx$ eşitliğini sağlıyorsa x'in C'yi ***merkezlediği*** ya da x ile C'nin elemanlarının ***birbiriyle değiştiği*** söylenir.

$$C_G(C) = \{x \in G\text{: her } c \in C \text{ için } xc = cx\}$$

olsun.

$$C_G(C) = \cap_{c \in C} C_G(c)$$

eşitliğine dikkat edelim.

Şunları kanıtlayın:

a. G'nin etkisiz elemanı $C_G(C)$'dedir.

b. Eğer $x, y \in C_G(C)$ ise $xy \in C_G(C)$ olur.

c. Eğer $x \in C_G(c)$ ise $x^{-1} \in C_G(c)$ olur.

d. $C \subseteq C_G(C_G(C))$.

e. $C \subset D$ ise $C_G(D) \subseteq C_G(C)$.

f. $C_G(C_G(C_G(C))) = C_G(C)$.

$C_G(C)$ kümesine C'nin (G'de) ***merkezleyicisi*** adı verilir.

5. G bir grup olsun. $a, b \in G$ için

$$[a, b] = a^{-1} b^{-1} ab \text{ ve } a^b = b^{-1} ab$$

tanımlarını yapalım. Her $a, b, c \in G$ için,

$$[a, b]^c = [a^c, b^c],\ [a, bc] = [a, c]\ [a, b]^c$$

ve

$$[ab, c] = [a, c]^b[b, c]$$

eşitliklerini kanıtlayın. $[a, b]$ türünden yazılan elemanlara ***komütatör*** adı verilir. Eğer $a^b = c$ ise a ve b elemanlarının ***eşlenik*** oldukları söylenir.

6. G bir grup olsun. $a \in G$ için λ_a: $G \to G$ fonksiyonu her $x \in G$ için $\lambda_a(x) = ax$ formülüyle tanımlanmış olsun. λ_a'nın birebir ve örten olduğunu, yani $\lambda_a \in \text{Sym } G$ olduğunu kanıtlayın.

$$\lambda_a \circ \lambda_b = \lambda_{ab},\ \lambda_1 = \text{Id}_G$$

(buradaki 1, grubun etkisiz elemanıdır) ve

$$(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$$

eşitliklerini kanıtlayın. $a \to \lambda_a$ kuralıyla tanımlanmış $\lambda : G \to \text{Sym } G$ fonksiyonunun birebir olduğunu kanıtlayın.

7. G bir grup olsun. $a \in G$ için ρ_a: $G \to G$ fonksiyonu her $x \in G$ için $\rho_a(x) = xa^{-1}$ formülüyle tanımlanmış olsun. ρ_a'nın birebir ve örten olduğunu, yani $\rho_a \in \text{Sym } G$ olduğunu kanıtlayın.

$$\rho_a \circ \rho_b = \rho_{ab},\ \rho_1 = \text{Id}_G$$

(buradaki 1, grubun etkisiz elemanıdır) ve

$$(\rho_a)^{-1} = \rho_{a^{-1}}$$

eşitliklerini kanıtlayın. $a \mapsto \rho_a$ kuralıyla tanımlanmış ρ: $G \to \text{Sym } G$ fonksiyonunun birebir olduğunu kanıtlayın.

8. G bir grup ve $\lambda : G \to \text{Sym } G$ ve

$$\rho : G \to \text{Sym } G$$

yukardaki iki alıştırmada verilen fonksiyonlar olsun. Her $a, b \in G$ için $\rho_a \circ \lambda_b = \lambda_b \circ \rho_a$ olduğunu kanıtlayın. $\rho(G)$, ρ fonksiyonunun Sym G'deki imgesi olsun, yani $\rho(G) = \{\rho_g : g \in G\}$ olsun.

$$\rho(G) = \{f \in \text{Sym } G : \text{her } a \in G \text{ için } f \circ \lambda_a = \lambda_a \circ f\}$$

eşitliğini kanıtlayın. Aynı şeyi ρ ve λ'nın yerlerini değiştirerek yapın.

9. G bir grup olsun. $a \in G$ için ϕ_a: $G \to G$ fonksiyonu her $x \in G$ için $\phi_a(x) = axa^{-1}$ formülüyle tanımlanmış olsun.

a. $\phi_a \in \text{Sym } G$ olduğunu gösterin.

b. Her $x, y \in G$ için $\phi_a(xy) = \phi_a(x) \circ \phi_a(y)$ eşitliğini kanıtlayın.

c. $\phi_a \circ \phi_b = \phi_{ab}$, $\phi_1 = \text{Id}_G$ ve $(\phi_a)^{-1} = \phi_{a^{-1}}$ eşitliklerini kanıtlayın.

10. G bir grup, $X \subseteq G$ ve $a \in G$ olsun. Yukarıdaki alıştırmalardan yararlanarak aX, Xa ve $a^{-1} Xa$ kümelerinin eleman sayılarının (X sonsuzsa kardinalitelerinin) eşit olduğunu kanıtlayın.

11. G bir grup ve $A \subseteq G$ olsun. Eğer

$$AA^{-1} \subseteq A$$

ise, A'nın G grubunun işlemi altında kapalı olduğunu ve eğer $A \neq \emptyset$ ise A'nın bu işlemle birlikte bir grup olduğunu kanıtlayın. (AA^{-1} kümesi, $a, b \in A$ için ab^{-1} olarak yazılan elemanlardan oluşan kümedir.)

12. G bir grup ve $A \subseteq G$ olsun. Eğer her $x \in G$ için $x^{-1}Ax \subseteq A$ ise her $x \in G$ için $x^{-1} Ax = A$ eşitliğini kanıtlayın.

13. G bir grup olsun. Eğer her $x \in G$ için $x^2 = 1$ ise her $x, y \in G$ için $xy = yx$ eşitliğini kanıtlayın. Aynı şeyin $x^3 = 1$ doğru olduğunda geçerli olmadığını gösterin. (Bu son soru matris bilmeyenler için zor olabilir. Matris bilenler, girdileri modülo 3 sayılar olan, 3×3 boyutlu, çaprazında 1 olan, çaprazın altında 0 olan matrisler kümesini alsınlar.)

13. G ve H birer grup ve $f : G \to H$ fonksiyonu, her $x, y \in G$ için $f(xy) = f(x)f(y)$ eşitliğini sağlasın. $f(1) = 1$ eşitliğini kanıtlayın. (Soldaki 1, G'nin; sağdaki 1 de H'nin etkisiz elemanıdır.) Her $x \in G$ için $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$ eşitliğini kanıtlayın. $f(G)$ kümesinin H'nin işlemi altında bir grup olduğunu kanıtlayın.

$$f^{-1}(1) = \{x \in G : f(x) = 1\}$$

kümesinin G'nin işlemi altında bir grup olduğunu kanıtlayın. Her $g \in G$ için $g^{-1}f^{-1}(1)g = f^{-1}(1)$ eşitliğini kanıtlayın. ♥