Cebir - Grup Teori

Serbest Gruplar Üzerine

Ali Nesin* / *anesin@nesinvakfi.org*

1. Altgrupların Üreteçleri

G bir grup ve $H \le G$ bir altgrup olsun. Gerekirse Seçim Aksiyomu'nu kullanarak, H'nin G'deki her sol ötelemesinden (eş kümesinden/kosetinden) **sol temsilci** ya da kısaca **temsilci** adını vereceğimiz bir eleman seçelim ve seçilen bu temsilciler kümesini L ile gösterelim. Demek ki

$$G = \bigsqcup_{\ell \in L} \ell H$$

Yani $L \subseteq G$ öyle seçilmiş olsun ki, her $g \in G$ için

$$g \in \ell H$$

içindeliğini sağlayan bir ve bir tane $\ell \in L$ olsun. Bu $\ell \in L$ elemanını $\overline{g}$ olarak yazalım. Yani $\overline{g}$ elemanı,

$$\overline{g} \in L \text{ ve } g \in \overline{g} H$$

içindelikleriyle belirlensin. Demek ki

$$\overline{g} = g \Leftrightarrow g \in L.$$

Ayrıca H ötelemesinin temsilcisi olarak hep 1'i seçelim, yani

$$L \cap H = \{1\}$$

olsun.

Her $\ell \in L$ ve $g \in G$ için,

$$g\ell = \overline{g\ell} \cdot \delta(g, \ell) \tag{1}$$

eşitliğini sağlayan bir ve bir tane

$$\delta(g, \ell) \in H$$

vardır. Demek ki,

$$\delta(g, \ell) = \overline{g\ell}^{-1} \cdot g\ell \in H. \tag{1'}$$

Kanıtlayacağımız ilk sonuç yazımızın temel direğini oluşturacak:

Teorem 1. *G, X altkümesi tarafından üretilmiş bir grup olsun. $H \le G$ bir altgrup ve L, H'nin bir sol temsilcileri kümesi olsun. Ayrıca*

$$L \cap H = \{1\}$$

olsun. O zaman, yukardaki yazılımla,

$$H = \langle \delta(x, \ell) : \ell \in L, x \in X \rangle$$

olur.

Kanıt: $h \in H$ olsun. h'yi X'in elemanları cinsinden yazalım: Öyle bir

$$n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in X \text{ ve } \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$$

vardır ki,

$$h = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$$

olur. Şimdi hesap yapalım. (1)'e göre, bir $\ell_{n-1} \in L$ için,

$$h = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} (x_n^{\varepsilon_n} \cdot 1)$$
$$= x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} \ell_{n-1} \delta(x_n^{\varepsilon_n}, 1)$$

olur. Aynı düşünceyi kaldığımız yerden

$$x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} \ell_{n-1}$$

için tekrar ettirelim: Bir $\ell_{n-2} \in L$ için,

$$= x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_{n-2}^{\varepsilon_{n-2}} \ell_{n-2} \delta(x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}, \ell_{n-1}) \delta(x_n^{\varepsilon_n}, 1).$$

Bunu böyle devam ettirerek, $\ell, \ell_1, \ldots, \ell_{n-1} \in L$ için

$$h = \ell \cdot \delta(x_1^{\varepsilon_1}, \ell_1) \cdots \delta(x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}, \ell_{n-1}) \delta(x_n^{\varepsilon_n}, 1)$$

buluruz. δ'lar ve h elemanı H'de olduğundan

$$\ell \in H \cap L = \{1\},$$

yani $\ell = 1$ bulunur. Demek ki $\ell_n = 1 \in L$ tanımıyla

$$h = \delta(x_1^{\varepsilon_1}, \ell_1) \cdots \delta(x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}, \ell_{n-1}) \delta(x_n^{\varepsilon_n}, \ell_n)$$

bulunur. Şimdi yukardaki eşitlikten x^{-1}'leri yok etmeliyiz, yani $\delta(x^{-1}, \ell)$'leri $\delta(x, \ell)$ cinsinden yazmalıyız.

$$\ell_1 = \overline{x^{-1}\ell} \text{ ve } \ell_2 = \overline{x\ell_1}$$

için, (1') eşitliğinden dolayı

$$x^{-1}\ell = \ell_1 \delta(x^{-1}, \ell)$$

ve

$$\ell = x\ell_1 \delta(x^{-1}, \ell) = \ell_2 \delta(x, \ell_1) \delta(x^{-1}, \ell)$$

olur, yani

$$\delta(x, \ell_1) \delta(x^{-1}, \ell) = 1$$

ve dolayısıyla

* İstanbul Bilgi Üniversitesi öğretim üyesi.

$$\delta(x^{-1}, \ell) = \delta(x, \ell_1)^{-1}$$

olur. Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Sonuç 2. *Sonlu sayıda eleman tarafından üretilmiş bir grubun sonlu endisli altgrupları da sonlu sayıda eleman tarafından üretilir. Eğer grup n eleman tarafından üretilmiş ve altgrubun endisi m ise, altgrup en fazla nm eleman tarafından üretilmiştir.* □

2. Serbest Grupların Altgrupları

Teorem 3. *Serbest grupların altgrupları da serbesttir.*

Kanıt biraz zaman alacak. F, X altkümesi tarafından serbestçe üretilmiş serbest bir grup olsun.

$H \le F$ olsun. S, H'nin birimli sol temsilciler kümesi olsun. Her $x_i \in X$ ve $\varepsilon_i = \pm 1$ için,

$$s = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \in S$$

olduğunda ve yazılım indirgenemez olduğunda (yani daha kısası yazılamıyorsa, yani ardışık x_i'ler arasında sadeleşme yaşanmıyorsa), her $i = 1, \ldots, n$ için

$$x_i^{\varepsilon_i} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \in S$$

oluyorsa, o zaman S'ye ***Schreier temsilcileri kümesi*** denir. Bu

$$x_i^{\varepsilon_i} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \in S$$

elemanlarına s'nin ***son dilimi*** adını vereceğiz.

Önsav 4. *Schreier temsilcileri kümesi her zaman vardır.*

Kanıt: $f \in F$ için $|f|$, f'nin X'e göre uzunluğu olsun, yani f'nin eşit olduğu indirgenemez kelimenin uzunluğu olsun. fH ötelemesinin uzunluğu $|fH|$ sayısı da,

$$|fH| = \min fH = \min\{|fh| : h \in H\}$$

olarak tanımlansın. Schreier temsilcilerini fH ötelemesinin $|fH|$ uzunluğu üzerine tümevarımla seçeceğiz. fH ötelemesinden seçilen temsilcinin uzunluğu $|fH|$'ye eşit olacak. Uzunluğu 0 olan H'den 1'i seçelim. $S_0 = \{1\}$ olsun. Tümevarımla öyle

$$S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq S_{n+1} \subseteq \ldots$$

altkümeleri bulacağız ki, eğer fH'nin uzunluğu n ise, S_n'de fH kümesinden bir ve bir tane eleman olacak ve ayrıca, S_n'nin elemanlarının son dilimleri gene S_n'de (aslında S_{n-1}'de) olacak. Tahmin edileceği ve kolayca görüleceği üzere, $S = \cup_n S_n$ istediğimiz Schreier temsilcilerini verir. Diyelim uzunluğu $\le n$ olan ötelemelerden uygun temsilcileri, yani S_n kümesini seçtik. Uzunluğu $n + 1$ olan bir fH ötelemesi alalım. Demek ki fH'nin

$$y_1 y_2 \cdots y_{n+1}$$

($y_i \in X \cup X_i^{-1}$) indirgenemez yazılımlı bir elemanı için,

$$fH = y_1 y_2 \cdots y_{n+1} H$$

olur.

$$m = |y_2 \cdots y_{n+1} H|$$

olsun. Elbette $m \le |y_2 \cdots y_{n+1}| = n$. Dolayısıyla, tümevarım varsayımına göre, bu ötelemenin S_n'de olan bir temsilcisi vardır; diyelim bu temsilci

$$z_i \in X \cup X_i^{-1}$$

için

$$z_1 \cdots z_m \in y_2 \cdots y_{n+1} H$$

olarak yazılıyor. Şimdi

$$y_1 z_1 \cdots z_m H = y_1(z_1 \cdots z_m H) = y_1(y_2 \cdots y_{n+1} H) = fH$$

olduğundan,

$$1 + m \ge |y_1 z_1 \cdots z_m| \ge |fH| = n + 1$$

ve $m = n$ olur. Demek ki $y_1 z_1 \cdots z_m$ yazılımı indirgenemezdir. Bu elemanı ve bu yöntemle elde edilen tüm elemanları S_n kümesine ekleyelim. Böylece istenen S_{n+1} kümesini elde ederiz. □

Eğer $|gh| = |g| + |h|$ ise, yani g'nin ve h'nin indirgenemez gösterimlerinde g'nin son elemanıyla h'nin ilk elemanı sadeleşmiyorsa, bunu gh yerine

$$g_\Delta h$$

yazarak göstereceğiz. Aksi halde, yani uzunluk kısalıyorsa gh yerine

$$g\_h$$

yazacağız.

Şimdi oldukça teknik ama çok önemli bir önsav.

Önsav 5. *F, X ve H yukardaki gibi olsun. S bir Schreier sol temsilciler kümesi olsun. $s, t \in S$ ve $x, y \in X$ olsun.*

i. *Eğer $\delta(x, s) \ne 1$ ise*

$$\delta(x, s) = \overline{xs}^{-1}{}_\Delta x_\Delta s.$$

ii. *Eğer $\delta(x, s) = \delta(y, t) \ne 1$ ise $x = y$ ve $s = t$.*

iii. *$h \in H = \langle \delta(x, s) : s \in S, x \in X \rangle$ olsun.* Eğer

$$h = \delta(x_1, s_1)^{\varepsilon_1} \cdots \delta(x_n, s_n)^{\varepsilon_n}, \tag{2}$$

h elemanının δ'lar cinsinden indirgenemez bir gösterimiyse, yani hiçbir $\delta(x_i, s_i)$ elemanı 1'e eşit değilse ve ardışık δ'lar bariz biçimde sadeleşmiyorsa (ki bir önceki maddeye göre bu ancak x'ler ve s'ler eşitse ve işaretleri farklıysa olabilir), o zaman

$$h = \cdots \Delta\, x_1^{\varepsilon_1} \Delta \cdots \Delta\, x_n^{\varepsilon_n} \Delta \cdots$$

olur; bir başka deyişle h'nin X cinsinden indirgenemez gösteriminde (2)'deki $\delta(x_i, s_i)$ ifadesinde beliren x_i üreteci sadeleşmez.

Kanıt. i. Diyelim $xs = x\_s$. O zaman bir $t \in S$ için $s = x^{-1}{}_\Delta t$ olur. (S Schreier olduğundan t gerçekten de S'dedir.) O zaman da

$$\delta(x, s) = \overline{xs}^{-1} \cdot xs = \overline{t}^{-1} t = t^{-1} t = 1,$$

çelişki.

Şimdi diyelim

$$\overline{xs}^{-1}\_x,$$

ya da aynı anlama gelen

$$x^{-1}\_\overline{xs}.$$

O zaman bir $t \in S$ için

$$\overline{xs} = xt$$

olur. Bu durumda da,

$$\delta(x, s) = \overline{xs}^{-1} \cdot xs = (xt)^{-1} xs = t^{-1} s,$$

yani $t^{-1}s \in H$ ve $sH = tH$ ve $s = t$ ve bir satır yukardaki merkezlenmiş formülden $\delta(x, s) = 1$ olur, çelişki.

ii. $\delta(x, s) = \delta(y, t) \ne 1$ varsayımını yapalım. Demek ki (1)'e göre,

$$\overline{xs}^{-1}{}_\Delta x_\Delta s = \overline{xs}^{-1}{}_\Delta y_\Delta t.$$

Eğer $|s| = |t|$ ise $s = t$ olur ve sadeleştirmeden sonra $x = y$ elde ederiz, tam istediğimiz gibi. Eğer $|s| < |t|$ ise, $|xs| \le |t|$ olur ve yukarda merkezlenen eşitlikten dolayı, bir u için $u_\Delta xs = t$ olur. S, Schreier olduğundan, $xs \in S$. Demek ki

$$\overline{xs}^{-1}{}_\Delta x_\Delta s = (xs)^{-1} xs = 1,$$

çelişki.

iii. $x, y \in X$ ve $s, t \in S$ için, $\delta(x, s)^{\pm 1} \delta(y, t)^{\pm 1}$ ifadesini açarsak dört şıkla karşı karşıya kalırız:

$$(\overline{xs}^{-1}{}_\Delta x_\Delta s)(\overline{yt}^{-1}{}_\Delta y_\Delta t)$$
$$(\overline{xs}^{-1}{}_\Delta x_\Delta s)(t^{-1}{}_\Delta y^{-1}{}_\Delta \overline{yt})$$
$$(s^{-1}{}_\Delta x^{-1}{}_\Delta \overline{xs})(\overline{yt}^{-1}{}_\Delta y_\Delta t)$$
$$(s^{-1}{}_\Delta x^{-1}{}_\Delta \overline{xs})(t^{-1}{}_\Delta y^{-1}{}_\Delta \overline{yt})$$

Birinci durumda sadeleşmenin olması için

$$s = \overline{yt}^{-1}$$

ve $xy = 1$ olmalı, ki bu imkansız. Aynı nedenden son durum da imkânsız.

İkinci durumda sadeleşmenin olması için $s = t$ ve $x = y$ olmalı, ki bu durum varsayımdan dolayı olamaz. Üçüncü durumda sadeleşmenin olabilmesi için

$$\overline{xs} = \overline{yt} \text{ ve } x = y$$

olmalı. Demek ki

$$xsH = \overline{xs}H = \overline{yt}H = ytH = xtH$$

ve $sH = tH$ ve $s = t$. Bu da varsayımdan dolayı mümkün değil. Demek ki sadeleşme olmuyor. □

Teorem 3'ün Kanıtı: Yukardaki önsavın ikinci ve üçüncü maddesinden hemen çıkar. Hatta şu daha keskin ifadeyi kanıtladık:

Teorem 6. *Eğer F serbest grubu X altkümesi tarafından serbestçe üretiliyorsa, $H \le F$ ise ve S, H'nin bir Schreier temsilcileri kümesiyse, o zaman H altgrubu,*

$$Y = \{\delta(x, s) : x \in X, s \in S, \delta(x, s)\} \setminus \{1\}$$

altkümesi tarafından serbestçe üretilir. □

Örnekler

1. F grubu x ve y tarafından serbestçe üretilmiş olsun. $A = \{1, a\} \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ olsun. $\phi : F \to A$ homomorfisi $\phi(x) = a$ ve $\phi(y) = 1$ eşitlikleriyle tanımlanmış olsun. $H = \operatorname{Ker} \phi$ olsun. Elbette H, endisi 2 olan normal bir altgruptur. H'yi serbestçe üreten (ve yukardaki teoremin söylediği) elemanları bulalım. Önce Schreier temsilcilerini seçelim:

$$S = \{1, x\}$$

olsun. S gerçekten bir Schreier temsilcileri kümesidir.

$$X = \{x, y\}$$

alacağız elbette. Yukardaki teoremdeki Y kümesinin elemanlarını bulalım. Bunun için

$$\delta(x, 1), \delta(x, x), \delta(y, 1), \delta(y, x)$$

elemanlarını teker teker hesaplamalıyız.

- $\delta(x, 1)$ hesabı: $x \cdot 1 = x = x \cdot 1 \in xH$. Demek ki
$$\delta(x, 1) = 1 \notin Y.$$
- $\delta(x, x)$ hesabı: $x \cdot x = x^2 = 1 \cdot x^2 \in H$ çünkü
$$\phi(x^2) = \phi(x)^2 = a^2 = 1$$
ve
$$x^2 \in H.$$
Demek ki
$$\delta(x, x) = x^2 \in Y.$$

- $\delta(y, 1)$ hesabı: $y \cdot 1 = y = 1 \cdot y \in xH$. Demek ki
$$\delta(y, 1) = y \in Y.$$
- $\delta(y, x)$ hesabı: $y \cdot x = x \cdot x^{-1} yx \in xH$. Demek ki
$$\delta(y, x) = x^{-1} yx = y^x \in Y.$$

Sonuç olarak

$$Y = \{x^2, y, y^x\}$$

bulduk ve H bu üç eleman tarafından serbestçe üretiliyor. Eğer F_n, n eleman tarafından serbestçe üretilmiş serbest grubu temsil ediyorsa, bu örnekte,

$$F_3 \simeq H \overset{2}{\trianglelefteq} F_2$$

ilişkilerini gösterdik.

2. F gene yukardaki gibi x ve y tarafından üretilen serbest grup olsun. Bu sefer

$$H = \langle f^2 : f \in F \rangle$$

olsun. Elbette $H \trianglelefteq G$ ve

$$G/H = \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \langle \overline{x} \rangle \times \langle \overline{y} \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Schreier temsilcilerini seçelim:

$$S = \{1, x, y, xy\}$$

ve teoremdeki Y'yi bulalım, yani δ'ları hesaplayalım.

- $\delta(x, 1)$ hesabı: $x \cdot 1 = x = x \cdot 1 \in xH$ olduğundan,
$$\delta(x, 1) = 1.$$
- $\delta(x, x)$ hesabı: $x \cdot x = x^2 \in H$ olduğundan,
$$\delta(x, 1) = x^2.$$
- $\delta(x, y)$ hesabı: $x \cdot y = xy \in xyH$ olduğundan,
$$\delta(x, y) = 1.$$
- $\delta(x, xy)$ hesabı: $x \cdot xy = x^{2y} = y \cdot y^{-1} x^{2y} \in yH$ olduğundan,
$$\delta(x, xy) = y^{-1} x^{2y} = x^{2y}.$$
- $\delta(y, 1)$ hesabı: $y \cdot 1 = y \in yH$ olduğundan,
$$\delta(y, 1) = 1.$$
- $\delta(y, x)$ hesabı: $y \cdot x = yx = xy \cdot y^{-1} x^{-1} yx \in xyH$ olduğundan,
$$\delta(y, x) = y^{-1} x^{-1} yx = [y, x].$$
- $\delta(y, y)$ hesabı: $y \cdot y = y^2 \in H$ olduğundan,
$$\delta(y, y) = y^2.$$
- $\delta(y, xy)$ hesabı: $y \cdot xy = yxy = x \cdot x^{-1} yxy \in xH$ olduğundan,
$$\delta(y, xy) = x^{-1} yxy.$$

Demek ki H grubu

$$x^2, x^{2y}, [y, x], y^2, x^{-1}yxy$$

elemanları tarafından serbestçe üretilmiştir. Bu örnekte,

$$F_5 \simeq H \overset{4}{\trianglelefteq} F_2$$

ilişkilerini gösterdik.

3. F gene yukardaki gibi x ve y tarafından üretilen serbest grup olsun.

$$A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

olsun. $\phi : F \to A$ homomorfisi $\phi(x) = a$ ve $\phi(y) = b$ eşitlikleriyle tanımlansın. $H = \operatorname{Ker} \phi$ olsun.

$$F/H \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

abelyen bir grup olduğundan $F' \le H$ olur. Aslında

$$H = \left\{ x^{i_1} y^{j_1} \cdots x^{i_n} y^{j_n} : n \in \mathbb{N}, i_k, j_k \in \mathbb{Z}, \sum i_k = \sum j_k = 0 \right\}$$

eşitliğini görmek zor değil. Birazdan $H = F'$ eşitliğinin doğru olduğunu göreceğiz. Önce H'yi serbestçe üreten altkümeyi bulalım.

$$S = \{x^i y^j : i, j \in \mathbb{Z}\}$$

olsun. S elbette bir Schreier temsilcileri kümesidir. H'yi üreten δ'ları hesaplayalım.

- $\delta(x, x^i y^j)$ hesabı: $x \cdot x^i y^j = x^{i+1} y^j \in x^{i+1} y^j H$. Demek ki
$$\delta(x, x^i y^j) = 1.$$
- $\delta(y, x^i y^j)$ hesabı: $y \cdot x^i y^j = x^i y^{j+1} \cdot y^{-j-1} x^{-i} y x^i y^j \in x^i y^{j+1} H$. Demek ki
$$\delta(x, x^i y^j) = y^{-j-1} x^{-i} y x^i y^j = y^{-1} y^{-j} x^{-i} y x^i y^j = [y, x^i y^j]$$

ve H altgrubu

$$\{[y, x^i y^j] : i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}, i \ne 0\}$$

kümesi tarafından serbestçe gerilmiştir. Bu altküme de F' altgrubunun bir altkümesi olduğundan, $H \le F'$, yani $H = F'$ çıkar. Bu örnekten de görüldüğü gibi iki elemanlı serbest grubun altgrupları her zaman sonlu sayıda eleman tarafından üretilmek zorunda değil, mesela bu örnekte gördüğümüz üzere $F_2' \simeq F_\omega$ oluyor.

Bu arada söz (yukardaki örnekte) açılmışken F grubu X ve Y altkümeleri tarafından serbestçe üretiliyorsa, F/F' grubu, abelyen grup olarak X ve Y tarafından serbestçe üretilir, yani

$$F \simeq \oplus_{x \in X} \mathbb{Z}x \simeq \oplus_{y \in Y} \mathbb{Z}y$$

olur. Abelyen grup teoriden (ya da tek üreteçli idealler bölgeleri üzerine modüllerin sınıflandırılmasından) biliyoruz ki bu durumda $|X| = |Y|$ olmalı. Demek ki serbest bir grubun serbest üreteçlerinin kümesinin kardinali değişmez ve bir κ kardinali için F_κ notasyonu caizdir.

3. Serbest Tümleyen

F, X tarafından serbestçe üretilmiş serbest grup, $X = Y \sqcup Z$, $H = \langle Y \rangle$ ve $K = \langle Z \rangle$ olsun. H ve K'ya birbirinin ***serbest tümleyeni*** diyeceğiz ve bunu göstermek için

$$F = H * K$$

yazacağız. Bu durumda F'nin her elemanı H ve K'nın elemanlarının alterne eden çarpımları olarak yazılır ve bu yazılım özünde biriciktir; bir başka deyişle F'nin her f elemanı için, öyle bir ve bir tane

$$n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ h_1 \in H,$$
$$h_2, ..., h_n \in H \setminus \{1\},$$
$$k_1, ..., k_{n-1} \in K \setminus \{1\},\ k_n \in K$$

elemanları vardır ki

$$f = h_1k_1 \cdots h_nk_n$$

olur. Bu durum başgösterdiğinde H'ye (ya da K'ya), F'nin ***serbest faktörü*** adı verilir.

Örnekler

4. F grubu x ve y elemanları tarafından serbestçe üretilsin. $H = \langle x, x^y\rangle$ ve $K = \langle y\rangle$ olsun. H'nin her $x^{n_1}y^{m_1} \cdots x^{n_k}y^{m_k}$ elemanınında

$$\sum m_i = 0$$

olur ama K'nın sadece 1 elemanında bu durum başgösterir. Dolayısıyla $H \cap K = 1$ ama

$$\langle H, K\rangle = H * K$$

olmaz çünkü

$$1 \neq h = x^y \in H,$$
$$1 \neq h_1 = x^{-1} \in H,$$
$$1 \neq k = y^{-1} \in K,$$
$$1 \neq k_1 = y \in K$$

için

$$hkh_1\, k_1 = x^y y^{-1} x^{-1} y = 1$$

olur. Demek ki eğer $F = \langle H, K\rangle$ serbest bir grupsa ve $H \cap K = 1$ ise, Y, H'yi ve Z, K'yı serbestçe üretse bile, $Y \cup Z$ kümesi F'yi serbestçe üretmek zorunda değildir.

5. F serbest bir grup olsun. Yukardaki örnekten de kolayca anlaşılacağı gibi eğer $N \trianglelefteq F$ ve $K \leq F$ ise $\langle N, K\rangle = N * K$ ancak $K = 1$ için mümkündür. Bunun sonuçlarını ileride göreceğiz.

Teorem 7. *F serbest bir grup ve $H \leq F$ olsun. Eğer H sonlu sayıda eleman tarafından üretiliyorsa, öyle bir $K \leq F$ altgrubu vardır ki,*

$$\langle H, K\rangle \simeq H * K$$

olur ve $\langle H, K\rangle$ altgrubunun F'deki endisi sonludur.

Kanıt: R, H'nin bir Schreier temsilcileri kümesi olsun. Teorem 6'dan dolayı, H'nin

$$Y := \{\delta(x,r) : x \in X, r \in R\}\setminus\{1\}$$

altkümesi tarafından serbestçe üretildiğini biliyoruz. Ama varsayıma göre H sonlu eleman tarafından üretiliyor. Demek ki Y sonlu. $|Y| = n$ olsun ve

$$Y = \{\delta(x_1,r_1),\ldots,\delta(x_n,r_n)\}$$

olsun. Öyle bir $Z \supseteq Y$ bulacağız ki, $\langle Z\rangle$ altgrubu Z tarafından serbestçe üretilecek ve bu altgrubun F'deki endisi sonlu olacak. Bunu kanıtlarsak teorem kanıtlanmış olacak çünkü bu durumda

$$K = \langle Y \setminus Z\rangle$$

almak yeterli.

$$\delta(x_i,r_i) = \overline{x_ir_i}^{-1} \cdot x_ir_i$$

eşitliğini anımsayalım. S kümesini

$$\overline{x_1r_1},\ r_1,\ \ldots,\ \overline{x_nr_n}, r_n$$

elemanlarının son dilimlerinden oluşan küme olsun. S, R'nin sonlu bir altkümesidir. Ayrıca $1 \in S$ ve S'nin elemanlarının son dilimleri de S'dedir.

İlk olarak F'den Sym S'ye giden bir ϕ homomorfisi bulacağız, yani F grubunun S kümesi üzerine bir etkimesini bulacağız. Bir paragraf önce bulmaya söz verdiğimiz Z üreteç kümesi,

$$\mathrm{Stab}_F(1) = F_1 = \{f \in F : \psi_f(1) = 1\}$$

altgrubunu serbestçe üretecek. $[F : F_1] \leq |S|$ olduğundan bu da teoremi kanıtlayacak. Aslında

$$[F : F_1] = |S|$$

eşitliğini bulacağız. ϕ homomorfisini bulmak için X'ten Sym S'ye giden bir fonksiyon bulmak yeterli. İstediklerimizin yerine gelmesi için bu fonksiyonu dikkatlice seçeceğiz. Her $x \in X$ için,

$$S(x) = \{s \in S : \overline{xs} \in S\}$$

olsun. $S(x)$, elbette S'nin bir altkümesidir (ama boşküme de olabilir). Böylece her $x \in X$ için

$$\phi_x(s) = \overline{xs}$$

kuralıyla tanımlanmış bir

$$\phi_x : S(x) \to S$$

fonksiyonu bulmuş olduk. ϕ_x'in birebir olduğunu savlıyoruz. Nitekim, diyelim

$$\phi_x(s) = \phi_x(t),$$

yani

$$\overline{xs} = \overline{xt}$$

o zaman

$$xsH = xtH \text{ ve } sH = tH$$

olur ve bundan da $s = t$ çıkar. Demek ki ϕ_x birebirmiş. Şimdi ϕ_x'i rastgele bir biçimde S'den S'ye giden bir eşleşmeye tamamlayalım[1]. Bu genişlemeye de ϕ_x adını verelim. Demek ki $\phi_x \in$ Sym S ve her $s \in S(x)$ için

$$\phi_x(s) = \overline{xs}.$$

Böylece $\phi(x) = \phi_x$ kuralıyla verilmiş bir

$$\phi : X \to \mathrm{Sym}\ S$$

fonksiyonu bulunur. F, X tarafından serbestçe üretildiğinden, bulduğumuz (ya da seçtiğimiz) bu ϕ fonksiyonunu genişleten bir ve bir tane

$$F \to \mathrm{Sym}\ S$$

homomorfisi vardır. Bu homomorfiyi de ϕ ile gösterelim. Son olarak

$$\mathrm{Stab}_F(1) = F_1 = \{f \in F : \phi_f(1) = 1\}$$

tanımını yapalım. Şimdi her $t \in S$ için $\phi_t(1) = t$ eşitliğini kanıtlayacağız[2]. Bunun için iki teknik hesap yapacağız.

Birinci teknik hesap: $s \in S$ ve $x \in X$ olsun. $xs \in S$ varsayımını yapalım. Demek ki

$$\overline{xs} = xs \in S$$

ve $s \in S(x)$. Dolayısıyla

$$\phi_x(s) = \overline{xs} = xs. \tag{3}$$

İkinci teknik hesap: $s \in S$ ve $x \in X$ olsun. Ama bu sefer $x^{-1}\, s \in S$ varsayımını yapalım. Demek ki

$$\overline{x^{-1}s} = x^{-1}s \in X(s)$$

ve dolayısıyla

$$\phi_x(x^{-1}\, s) = x(x^{-1}\, s) = s.$$

Son eşitlikte ϕ_x'i sol taraftan sağ tarafa geçirirsek,

$$\phi_x{}^{-1}(s) = x^{-1}s$$

buluruz. Demek ki

$$s \in S,\ y \in X \cup X^{-1} \text{ ve } ys \in S$$

ise,

$$\phi_y(s) = ys$$

olur. Bunu temel alarak, $t \in S$ için $\phi_t(1)$'i hesaplayalım. t'yi $X \cup X^{-1}$ kümesinin elemanları cinsinden yazalım: Diyelim $y_1, ..., y_k \in X \cup X^{-1}$ için

$$t = y_1 \cdots y_k$$

olsun. S'nin elemanlarının son dilimleri de S'de olduğundan, yukarda yaptıklarımızdan,

$$\phi(1) = \phi_{y_1\cdots y_2}(1) = \phi_{y_1}\cdots\phi_{y_{k-1}}\phi_{y_k}(1)$$
$$= \phi_{y_1}\cdots\phi_{y_{k-1}}(y_k)$$
$$= \phi_{y_1}\cdots\phi_{y_{k-2}}(y_{k-1}y_k)$$

olur. Demek ki her $t \in S$ için

$$\phi_t(1) = t.$$

Bundan da S kümesinin F_1'in F'deki temsilcileri kümesi olduğu çıkar. Nitekim, eğer $f \in F$ ise,

$$\phi_f(1) = t \in S$$

tanımını yaparak, sırasıyla,

$$\phi_f(1) = \phi_t(1),$$
$$\phi_{t-1}f(1) = 1,$$
$$t{-1}f \in F_1$$

ve

$$f \in tF_1$$

bulunur. Ayrıca $s, t \in S$ için $sF_1 = tF_1$ ise, sırasıyla,

$$t^{-1}s \in F_1,\ \phi_{t-1}s\ (1) = 1,\ s = \phi_s(1) = \phi_t(1) = t$$

olur.

S kümesi bir Schreier temsilcileri kümesi olduğundan, Teorem 6'ya göre, F_1 altgrubu

$$Z = \{\varepsilon(x,s) : x \in X, s \in S, \varepsilon(x,s)\}\setminus\{1\}$$

tarafından serbestçe üretilir. Buradaki $\varepsilon(x, s) \in F_1$ elemanı, Teorem 6'daki F_1 ve S'ye tekabül eden elemanlardır, yani $\varepsilon(x, s) \in F_1$ ve

$$\widehat{xs} \in S$$

olmak üzere,

$$\varepsilon(x,s) = \widehat{xs}^{-1} \cdot xs$$

olarak tanımlanmıştır.

Son olarak $Y \subseteq Z$ içindeliğini kanıtlayalım. Bunun için her $i = 1, ..., n$ için,

$$\overline{x_ir_i} = \widehat{x_ir_i}$$

eşitliğini kanıtlamak yeterli. Bunun için iki küçük olguya ihtiyacımız var: $f \in F$ olsun. Demek ki bir

$$t = \widehat{f} \in S$$

için $f \in tF_1$. Dolayısıyla

$$\phi_f(1) = \phi_t(1) = t = \widehat{f}.$$

Ayrıca S'nin tanımı gereği $x_ir_i \in S$; ve elbette $r_i \in S$. Yani $r_i \in S(x_i)$. Buradan da (3)'ten dolayı

$$\phi_{x_i}(r_i) = x_ir_i$$

çıkar.

Bunlardan hareketle hesaplayalım:

1 Bu seçimi Seçim Aksiyomu kullanmadan yapmak için, Sym S'nin elemanlarını bir biçimde tamsıralamak ve ϕx'i genişleten Sym S'nin ilk elemanını seçmek yeterli.

2 Böylece F serbest grubunun S kümesini geçişli etkidiği kanıtlanmış olacak.

$$\widehat{x_ir_i} = \phi_{x_ir_i}(1) = \phi_{x_i}\phi_{r_i}(1) = \phi_{x_i}(r_i) = x_ir_i = \overline{x_ir_i}.$$

Böylece $Y \subseteq Z$ içindeliği kanıtlandı. □

4. Birkaç Sonuç

Bu bölümde serbest gruplarla ilgili birkaç sonuç kanıtlayacağız. Her biri yukarda yaptıklarımızdan çıkacak.

Sonuç 8. *Serbest bir grubun sonlu eleman tarafından üretilmiş bir altgrubu normalse ya* 1*'dir ya da sonlu endislidir.*

Kanıt: F serbest grup olsun. $H \trianglelefteq F$ sonlu eleman tarafından üretilmiş olsun. O zaman Teorem 7'ye göre, bir $K \leq F$ için

$$\langle H, K\rangle = H * K$$

grubunun F'de endisi sonlu olur. Ama $H \trianglelefteq F$ olduğundan $K = 1$ olmalıdır. □

Eğer bir grubun sonlu endisli altgruplarının kesişimi 1 ise, gruba ***kalıntısal sonlu grup*** adı verilir. Bir G grubunun kalıntısal sonlu olması şöyle de ifade edilir: Her $1 \neq g \in G$ için g'yi içermeyen sonlu endisli bir altgrup vardır. Örneğin, sonlu üreteçli abelyen gruplar, döngüsel grupların direkt toplamı olduklarından, kalıntısal sonludurlar.

Teorem 9. [F. W. Levi] *Serbest gruplar kalıntısal sonludur.*

Kanıt: F serbest bir grup olsun. $1 \neq f \in F$ olsun. Theorem 7'ye göre, $\langle f, K\rangle = \langle f\rangle * K$ eşitliğini sağlayan sonlu endisli bir K altgrubu vardır.

$$J = \langle f\rangle * K$$

olsun. K, Y altkümesi tarafından serbestçe üretilmiş olsun. Son olarak, $L = \langle J', Y, f^2\rangle$ olsun. Elbette $[J : L] = [J/J' : L/J'] = 2$ ve $f \notin L$ olur. □

Bir G grubunun ***Hopfiyan*** olması demek, her $1 \neq N \trianglelefteq G$ için $G/N \not\simeq G$ demektir. Örneğin sonlu gruplar Hopfiyan'dır, ama Prüfer p-grupları Hopfiyan değildirler, hatta antihopfiyandırlar diyebiliriz!

Teorem 10. *Sonlu eleman tarafından üretilmiş serbest gruplar Hopfiyandırlar.*

Bu teorem, Teorem 9'un ve bir sonrakinin sonucu.

Teorem 11 [I.A. Mal'cev]. *Sonlu eleman tarafından üretilmiş kalıntısal sonlu gruplar hopfiyandırlar.*

Mal'cev'in teoremini kanıtlamak için önce kendi başına önemli bir önsav kanıtlayalım.

Önsav 12. *$n \in \mathbb{N}$ olsun. Sonlu (diyelim m tane) eleman tarafından üretilmiş bir grubun endisi n olan sonlu sayıda (en fazla $n!^m$ tane) altgrubu vardır.*

Kanıt: Gruba G diyelim. G, eleman sayısı m olan X altkümesi tarafından üretilmiş olsun. $H \leq G$, endisi n olan bir altgrup olsun.

$$G/H = \{xH : x \in G\},$$

olsun. G, G/H kümesini soldan bilinen şekilde soldan ötelemeyle etkisin: Yani $g \in G$ ve $xH \in G/H$ için,

$$g\cdot(xH) = gxH$$

olsun. Böylece

$$\psi(g)(xH) = gxH$$

formülüyle verilmiş bir

$$\psi : G \to \mathrm{Sym}(G/H)$$

grup homomorfisi buluruz. Elbette,

$$G_H := \{g \in G : gH = H\} = H$$

olur.

$|G/H| = n$ olduğundan

$$G/H \text{ ile } \{1, 2, ..., n\}$$

kümeleri arasında birebir bir eşleme vardır.

$$f(H) = 1$$

eşitliğini sağlayan böyle bir eşleme seçelim. Bu f eşlemesi sayesinde

$$\phi_f(\sigma) = f \circ \sigma \circ f^{-1}$$

formülüyle verilen bir

$$\phi_f : \mathrm{Sym}(G/H) \to \mathrm{Sym}\ n$$

grup izomorfisi bulunur ve böylece bir

$$\psi_f := \phi_f \circ \psi : G \to \mathrm{Sym}\ n$$

grup homomorfisi elde ederiz. Böylece G grubu

$$\{1, ..., n\}$$

kümesini etkiler:

$$g * i = (\psi_f(g))\ (i).$$

Bu etkilemeyle,

$$G_1 := \{g \in G : g * 1 = 1\}$$
$$= \{g \in G : (\psi_f g)(1) = 1\} = H$$

olur. Demek ki endisi n olan $H \leq G$ sayısı, olası

$$\psi_f : G \to \mathrm{Sym}\ n$$

homomorfizma sayısından daha fazla olamaz. Ama G, X tarafından üretildiğinden G'den Sym n'ye giden homomorfi sayısı X'ten Sym n'ye giden

fonksiyon sayısından fazla olamaz. Bundan da en fazla $n!^m$ tane vardır[3]. □

Teorem 11'in Kanıtı: G teoremdeki gibi bir grup olsun. Diyelim bir $N \trianglelefteq G$ için $G/N \simeq G$. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ sabitleyelim. Önsav 12'ye göre G'nin endisi n olan sonlu sayıda altgrubu olduğundan, G/N'nin de endisi n olan aynı sayıda altgrubu vardır. Ama G/N'nin altgrupları, bir ve bir tane $N \leq H \leq G$ için G/H biçiminde yazılırlar ve $[G/N : H/N] = [G : H]$ olur. Demek ki G'nin endisi n olan tüm altgrupları N'yi içermek zorundadır. n rastgele olduğundan, bundan da G'nin endisi sonlu olan her algrubunun N'yi içerdiği çıkar. Demek ki G'nin sonlu altgruplarının kesişimi N'yi içeriyor. Dolayısıyla $N = 1$. □

Teorem 13 [J. Nielsen, 1918]. *Eğer F grubu n elemanlı X altkümesi tarafından serbestçe üretilmiş bir grupsa ve $Y \subseteq F$, n elemanlı ve F'yi üreten bir altkümeyse, o zaman Y, F'yi serbestçe üretir.*

Kanıt: $f : X \to Y$ herhangi bir eşleme olsun. Bu eşleme sayesinde $\psi_f : F \to F$ homomorfisi elde ederiz. Y, X'i gerdiğinden, ψ_f örtendir. Demek ki $F/\mathrm{Ker}\ \psi_f \simeq F$ olur. Teorem 10'a göre Ker $\psi_f = 1$'dir. Demek ki ψ_f birebirdir. Bu da aynen F'nin Y tarafından serbestçe üretildiği anlamına gelir (Y'nin elemanları tarafından sağlanan herhangi bir eşitlik, Ker ψ_f'te 1 olmayan bir eleman yaratır). □

3 Bu kanıtta her $H \leq G$ için bir $f : G/H \to \{1, ..., n\}$ eşlemesi seçerek, daha sonra sonlu olacağını kanıtlayacağımız G/H kümesi için Seçim Aksiyomu'nu kullanmış olduk! Aslında Seçim Aksiyomunu kullanmak zorunda değildik. Her $H \leq G$ için $f(H)$=1 eşitliğini sağlayan bir $f : G/H \to \{1, ..., n\}$ eşlemesi seçeceğimize, bu eşitliği sağlayan tüm f eşlemelerini alalım. Ardından, tüm bu f'ler için tüm ψ_f'leri alalım. Böylece Seçim Aksiyomu'nu kullanmadan aynı sonucu elde ederiz.

Kaynak
Gilbert Baumslag, *Topics in Combinatorial Group Theory*, Birkhäuser, Lectures in Mathematics 1993.