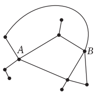
Çizgeler Kuramı

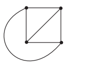
Turán Teoremi

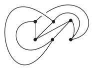
Mesut Bahtiyar, Mutlu Berhudar, Saadet Ongun

Bir çizge, içinde noktalardan (köşelerden) ve bu noktalardan bazılarının arasında kenarlardan (bağıntılardan) oluşan bir yapıdır. Bir örnek aşağıda.

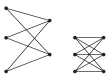


Yukardaki örnekte 10 nokta ve 11 kenar vardır. Çeşit çeşit çizge vardır ama bizim çizge tanımımıza göre bir nokta kendisiyle bağıntılı olamaz ve herhangi iki nokta arasında 1'den fazla kenarolamaz. Her çizge, yukardaki çizgede olduğu gibi kenarlar kesişmeyecek biçimde düzleme çizilemez. Örneğin dört noktadan oluşan ve her noktanın her noktayla bağıntılı olduğu çizge düzleme çizilebilir ama 6 noktanın üçünün diğer tüm üç noktaya bağıntılı olduğu bir çizge düzleme çizilemez.


Düzlemsel bir çizge


Düzlemsel olmayan bir çizge

Kenar sayısı arttıkça çizge düzleme çizilemez olur. Kenar sayısı arttıkça başka şeyler de olur, mesela çizgede üçgenler oluşmak zorunda kalır. Örneğin 4 noktamız varsa ve toplamda 5 kenar istiyorsak, çizgede mutlaka bir üçgen (yani birbiriyle bağıntılı olan üç nokta) olmak zorundadır. Eğer 5 nokta varsa 6 kenarı olan üçgensiz bir çizge vardır (aşağıda) ama 7 kenarı olan üçgensiz bir çizge yoktur. Eğer nokta sayısı 6 ise, toplam 9 kenarı olan üçgensiz bir çizge vardır da toplam 10 kenarı olan üçgensiz bir çizge yoktur.



Turán teoremi olarak adlandırılan teorem, n noktalı bir çizgenin $n^2/4$'ten fazla kenarı varsa, çizgede mutlaka bir üçgen oluşacağını söylüyor. Bu yazının amacı bu teoremi kanıtlamak.

Kanıta başlıyoruz.

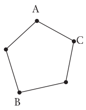
İçinde üçgen olmayan ve kenar sayısının en büyük olduğu n noktalı bir çizge alalım.

Noktalar arasında yeni bir ilişki tanımlıyorum: Eğer iki nokta arasında bağıntı (kenar) yoksa, noktalara "ilişkili" diyelim.

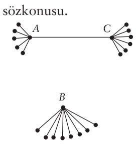
Elbette her nokta kendisiyle ilişkilidir.

Ayrıca eğer A noktası B noktasıyla ilişkiliyse, B noktası da A noktasıyla ilişkilidir.

Bu ilişki genelde geçişli olmak zorunda değildir, yani A noktası B noktasıyla ve B noktası C noktasyla ilişkiliyse (yani bağlantılı değillerse), A noktası C noktasıyla ilişkide olmayabilir (yani bağlantılı olabilirler). Örneğin aşağıdaki çizgede bu böyledir.



Öte yandan bizim özel durumumuzda geçişlilik geçerlidir, çünkü içinde üçgen olmayan maksimum sayıda kenarı olan bir çizgeyle çalışıyoruz. Nitekim diyelim A ile B ve B ile C bağıntısız ama A ile C bağıntılı, yani diyelim aşağıdaki gibi bir çizge durum sözkonusu.



Yukardaki şekilde A, B ve C noktalarını ve bu noktaların bağıntılı olduğu noktaları gösterdik.

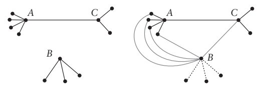
Matematik Dünyası, 2013-I

A ile C bağıntılı olduğundan ve çizgemizde üçgen olmadığından, A'nın bağıntılı olduğu hiçbir nokta C'nin bağıntılı olduğu bir noktayla bağıntılı olamaz. Öte yandan A ile B'nin ya da C ile B'nin bağıntılı olduğu ortak noktalar olabilir.

A'nın bağıntılı olduğu nokta sayısına a diyelim. b ve c sayılarını da benzer şekilde tanımlayalım.

İki durum var: Ya b sayısı a ve c sayılarından birinden küçüktür ya da her ikisinden de büyükeşittir.

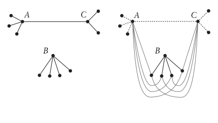
Birinci durumu ele alalım. Diyelim $b < a$. Aşağıdaki şekilden izleyin. Bu durumda, B noktasının tüm bağıntılarını silelim ve A noktasının bağıntılı olduğu her noktayı B noktasına bağlayalım. Aşağıda sağdaki çizgeyi elde ederiz. Bu şekilde, sildiğimiz bağıntıları noktalı, eklediğimiz bağıntıları gri yaptık. Elde ettiğimiz yeni çizgede nokta sayısı değişmedi, hâlâ daha n. Ama kenar sayısı $a - b$ arttı. Ve yeni çizgede hâlâ daha üçgen yok çünkü olası A ve B noktaları bağıntılı değil. Böylece birinci durumda bir çelişki ettik.



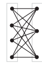
İkinci durumu ele alalım: $b \geq a$ ve $b \geq c$. Aşağıdaki şekilden izleyin. Bu durumda A ve C noktalarının bağıntılarını silelim ve A ve C noktalarını B'nin bağıntılı olduğu noktalara bağlayalım. Nokta sayısı gene değişmedi. Kenar sayısına bakalım. A ve C noktalarının toplam $a + c - 1$ tane olan bağıntılarını sildik ve yerine $2b$ tane bağıntı ekledik. Demek ki kenar sayısındaki artış

$$2b - (a + c - 1) = 1 + (b - a) + (b - c) \geq 1 > 0.$$

Kenar sayımız artmış. Elde ettiğimiz çizgede hâlâ daha üçgen yok. İkinci durumda da bir çelişki ettik.



Demek ki tanımladığımız ilişki bir denklik ilişkisiymiş. Denklik sınıflarını ele alalım. Aynı denklik sınıfındaki noktalar birbirleriyle bağıntılı olamazlar ama diğer tüm noktalarla bağıntılılar. Çizgede üçgen olmadığından en fazla iki sınıf olabilir. (Bkz. aşağıdaki şekil.) Hatta $n \geq 3$ ise tam tamına iki sınıf olmalı. Bundan da bu çizgenin "iki parçalı bir tamçizge" olduğu ortaya çıkar, yani çizgede iki (ayrık) nokta kümesi vardır ve bir kümedeki noktalar arasında hiç bağıntı yoktur ama bir kümedeki her nokta diğer noktadaki tüm noktalara bağıntılıdır.



Eğer kümelerdeki nokta sayısına a ve b dersek (eski a ve b'yi unutun),

$$a + b = n$$

ve çizgedeki bağıntı sayısı

$$ab = a(n - a)$$

olur. Bu sayının maksimal olması için ise a (dolayısıyla b de) aşağı yukarı n'nin yarısı olmalıdır; Bir başka deyişle

$$|a - b| \leq 1,$$

yani eğer n çiftse

$$a = b = n/2,$$

eğer n tekse

$$a = \frac{n \pm 1}{2},\ b = \frac{n \mp 1}{2}$$

olur. Kolayca görüleceği üzere, her iki durumda da ab sayısı, yani ilişki sayısı $n^2/4$'ün tamkısmına eşittir.

Ve böylece Turán teoremini üçgenler için kanıtlamış olduk.

Teorem. *İçinde üçgen olmayan n noktalı bir çizgenin kenar sayısı en fazla $n^2/4$ olabilir.* □

Aynı yöntemle aşağıdaki teorem de kanıtlanabilir:

Teorem. *İçinde $r + 1$ noktalı bir tamçizge barındırmayan n noktalı bir çizgenin en fazla*

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$$

tane kenarı olabilir. ♠