Kapak Konusu: Analizden Konular III

Kuvvet Serileri

Tosun Terzioğlu* / *tosun@sabanciuniv.edu*

Daha önce

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n x^k$$

şeklinde yazılan serilerle karşılaşmıştık. Bu tür serilere ***kuvvet serileri*** denir. Kuvvet serilerinde değişken olarak yer alan x'in kuvvetlerinin katsayıları olan a_n'ler gerçel veya karmaşık sayılar olabilir. Ama biz bu yazıda hemen her zaman sadece gerçel sayılarla çalışacağız. Yukarıdaki seride x'i bir gerçel sayı olarak aldığımızda elde edilen fonksiyon her x gerçel sayısında tanımlı olmayabilir ama en azından $x = 0$ noktasında tanımlı, çünkü $x = 0$ alırsak, serinin toplamı a_0 olur. Bu yazıdaki ilk amacımız bir kuvvet serisinin tanımlı olduğu kümeyi bulmak.

Geometrik seri adı verilen

$$1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

serisinin $|x| < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k\to\infty} \frac{1-x^k}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

olduğunu biliyoruz. Her $x > 1$ için $\lim x^n = \infty$ ve $x \le -1$ içinse $(x^n)_n$ dizisinin limiti yok. Eğer bir seri yakınsaksa serinin terimlerinin limiti 0 olmak zorundadır. Ama $x = 1$ için bu limit 1. Demek ki geometrik seri sadece $(-1, 1)$ aralığında yakınsak ve toplamı da $1/(1-x)$.

Genel olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

kuvvet serisinin bir $\xi > 0$ değeri için yakınsadığını varsayalım. O zaman $\lim_{n\to\infty} a_n \xi^n = 0$ olur; özel olarak $(a_n \xi^n)_n$ dizisi sınırlıdır. Şimdi

$$M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n \xi^n|$$

tanımını yapalım. $|x| < |\xi|$ ve $q = |x|/|\xi| < 1$ olsun. Bu tanımlardan $|a_n||x|^n \le q^n M$ eşitsizliğini görürüz. Ama geometrik serinin her $q \in [0, 1)$ için yakınsadığını biliyoruz. Dolayısıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \le \frac{M}{1-q} < \infty$$

olur ve karşılaştırma testi bize serinin **mutlak** yakınsak olduğunu verir.

Verilen kuvvet serisi için tanımlanan

$$P = \left\{x : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ yakınsak}\right\}$$

kümesini ele alalım. 0'ın bu kümede olduğunu biliyoruz. Şimdi $r = \sup P$ olsun. Eğer P sınırlı değilse $r = \infty$ yazacağız. Yukarıda kanıtladığımızı kullanırsak her $x \in (-r, r)$ için kuvvet serimizin mutlak yakınsak olduğunu görürüz ($r = 0$ olsa bile!) r'nin tanımı gereği, eğer $|x| > r$ ise seri ıraksaktır. Bu şekilde tanımladığımız r sayısına serinin ***yakınsaklık yarıçapı*** denir. Yakınsaklık yarıçapının sonsuz olması halinde ise serimiz her $x \in \mathbb{R}$ için mutlak yakınsaktır. Uç noktalarında, yani $x = \pm r$'de ise ne olduğunu genelde bilmiyoruz.

Yakınsaklık yarıçapını serinin katsayıları cinsinden hesaplamak için serimizin katsayılarından oluşan $(|a_n|^{1/n})_{n>0}$ dizisine bakılır. Bu dizi sınırlı değilse yakınsaklık yarıçapı 0'dır. Aslında yakınsaklık yarıçapı

$$\frac{1}{r} = \limsup |a_n|^{1/n}$$

formülüyle elde edilir. Eğer $\limsup |a_n|^{1/n} = 0$ ise $r = \infty$ olur ve eğer $\limsup |a_n|^{1/n} = \infty$ ise $r = 0$ olur. Demek ki $1/\infty = 0$ ve $1/0 = \infty$ anlaşmalarını yaparsak, yukardaki formül $\limsup |a_n|^{1/n} = 0$ ya da ∞ iken de geçerlidir.

Tabii $(|a_n|^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin limiti varsa

$$\frac{1}{r} = \limsup |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

olur. Herhangi bir $r > 0$ sayısıyla tanımlanan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} x^n$$

* Sabancı Üniversitesi öğretim üyesi.

* Bir $(b_n)_n$ dizisinin limsup'ü şöyle tanımlanmıştır: $\limsup b_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{b_k : k \ge n\}$. Eğer $\limsup b_n = r$ ise her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \ge n_0$ için $x_n < r + \varepsilon$ olur. (Burada $\infty + \varepsilon = \infty$ anlaşması yapıyoruz.) Bu son önerme limsup kavramının ikinci bir tanımı olarak algılanabilir.

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı bu r sayısı. Serimiz aynı geometrik seri gibi $\pm r$ noktalarında ıraksak. Öte yandan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n} x^n$$

serisinin yakınsaklık yarıçapı sonsuz. Serimiz her gerçel sayı için mutlak yakınsak.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^n x^n$$

kuvvet serisi ise sadece $x = 0$ noktasında yakınsaktır.

Şimdi buraya kadar yaptıklarımızı ve daha ötesini toparlayalım.

Teorem 1. *Yakınsaklık yarıçapı* $0 < r \leq \infty$ *olan*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

kuvvet serisinin toplamı $f(x)$ *olsun. Seri* $(-r, r)$ *aralığında mutlak ve düzgün olarak yakınsaktır. Toplamı veren* $f: (-r, r) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun tanımlandığı* $(-r, r)$ *aralığında türevi vardır ve türevi, yakınsaklık yarıçapı gene r olan*

$$f'(x) = \sum_{n=1} n a_n x^{n-1}$$

kuvvet serisidir. Toplam fonksiyonun integrali, yakınsaklık yarıçapı gene r olan

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

kuvvet serisidir.

Kanıt: Yakınsaklık yarıçaplarının aynı olduğunu görmek zor değil, bunun için,

$$\limsup |a_n|^{1/n} = \limsup ((n+1)|a_{n+1}|)^{1/n}$$

eşitliğini kanıtlamak gerekiyor. Okura bırakıyoruz. Kuvvet serisinin $(-r, r)$ aralığında düzgün yakınsadığını görelim. $x \in (-r, r)$ olsun. $q = |x|/r < 1$ olsun. q sayısından biraz daha büyük ama 1'den küçük bir p sayısı alalım. Mesela $p = (1 + q)/2$ olabilir.

$$\limsup |a_n x^n|^{1/n} = \frac{1}{r}|x| = q < p$$

eşitsizliğinden dolayı, öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulabiliriz ki her $n \geq n_0$ için $|a^n x^n| \leq q^n$ sağlanır. Buradan da Weierstrass M-testini kullanarak kuvvet serisinin $(-r, r)$ aralığında düzgün yakınsadığını görürüz. Öte yandan $x \mapsto x^n$ fonksiyonunun türevi vardır. Dolayısıyla sayfa 27'deki Teorem 5'ten ve bu teoremden sonra gelen iki paragraftan toplama işareti altındaki her terimin türevini alarak

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

sonucuna varırız. İntegral için de bu kez sayfa 27'deki Teorem 4'ü uygularız. □

Eğer $x \in (-r, r)$ için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ise, $f(0) = a_0$ ve $f'(0) = a_1$ eşitlikleri aşikârdır. Türev almaya devam edersek

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

sonucunu elde ederiz. Bu da bize $f''(0) = 2a_2$ verir. Bu şekilde k'ıncı türev için

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k$$

sonucunu tümevarımla kolayca kanıtlarız. *Özetlersek, bir kuvvet serisinin toplamı olan fonksiyonun her mertebeden türevi vardır ve serinin katsayıları toplamı veren fonksiyonun* 0 *noktasındaki türevleri cinsinden yazılabilir, yani*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

olur.

Bundan da hemen şu çıkar: Eğer 0'ı içeren bir açık aralıkta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

oluyorsa, o zaman her n için $a_n = 0$ olur. Ya da 0'ı içeren bir açık aralıkta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

oluyorsa, o zaman her n için $a_n = b_n$ olur. Bu söylediğimizi hiç türev konusuna girmeden şöyle de kanıtlayabiliriz. Diyelim bir $R > 0$ ve her $x \in (-R, R)$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Elbette $a_0 = 0$ olur. Şimdi $a_1 = 0$ eşitliğini gösterelim. $x \neq 0$ için,

$$-a_1 = x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^n$$

olduğundan, $a_1 = 0$ eşitliğini göstermek için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^n$$

serisinin 0 içeren bir aralıkta sınırlı olduğunu göstermek yeterli. Eğer $0 \neq x \in (-R, R)$ ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^n = -\frac{a_1}{x}$$

olduğundan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n$$

serisi de yakınsaktır; dolayısıyla mutlak yakınsaktır. Şimdi $0 < S < R$ olsun. O zaman her $0 < x < S$ için,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}|\,|x|^n$$
$$\le \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}| S^n = B$$

olur. Böylece $a_1 = 0$ eşitliği ispatlanmış oldu. Aynı yöntemle $a_2 = a_3 = \ldots = 0$ eşitlikleri gösterilebilir.

Geometrik serinin toplamının $-1 < x < 1$ için $1/(1 - x)$ olduğunu, yani

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (1)$$

eşitliğini biliyoruz. Değişken değiştirip, toplama işareti altında türev veya integral alıp geometrik seriden birçok yeni ve ilginç sonuç elde edeceğiz. İlk olarak hemen $-1 < x < 1$ için x yerine $-x$ yazıp

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (2)$$

eşitliğini bulalım. Toplama işareti altında integral almamıza izin var. Her iki tarafın da integralini alarak bir c sabiti için

$$\log(1+x) = c + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

sonucuna varırız. Bu eşitliği $x = 0$'da değerlendirirsek $c = 0$ buluruz. Demek ki

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \qquad (3)$$

Bir defa daha integral alalım. Soldaki fonksiyonun integrali (integral sabitini 0 alarak),

$$\int_0^x \log(1+t)dt = (x+1)\log(1+x) - x.$$

Sağdaki sonsuz toplama altındaki her terimin integralini alarak yukarıda yaptığımız gibi

$$(x+1)\log(1+x) - x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

elde ederiz. Burada x mutlaka $(-1, 1)$ aralığında olmak zorunda. Gene geometrik seriden hareketle $-1 < x < 1$ için

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad (4)$$

serisine bakalım. İntegral alarak bu kez $-1 < x < 1$ için

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad (5)$$

açılımını elde ederiz.

Son bir örnek olarak geometrik serinin türevini alıp x ile çarpalım. Böylece

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \qquad (6)$$

sonucuna varırız. Bu işlemi tekrarlarsak

$$x\frac{1+x}{(1-x)^3} = x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

elde ederiz. Mesela (6)'da $m > 1$ için $x = 1/m$ alırsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{m^n} = \frac{m}{(m-1)^2}$$

gibi ilginç bir seri toplamına varırız. Bu yöntemle her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^j}{m^n}$$

serisinin toplamını m ve j cinsinden hesaplayabiliriz.

Bir de yakınsaklık aralığının uç noktaları için bir örnek verelim.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1'e eşit ama seri $-1 \le x \le 1$ aralığında yakınsak. Türev alarak elde ettiğimiz

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

serisi ise $-1 \le x < 1$ aralığında yakınsar. Tekrar türev alırsak

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n} x^{n-2}$$

elde ederiz. Bu seri ise sadece $(-1, 1)$ aralığında yakınsaktır.

Buraya kadar bu yazıda hep belirli bir kuvvet serisinden yola çıkarak, bu serinin yakınsaklık yarıçapını hesapladık ve geometrik seri gibi bazı hallerde serinin toplamını bulduk. Bunu başarabildiğimizde türev veya integral alarak yeni seriler ürettik. Şimdi ise $(a - r, a + r)$ aralığında istediğimiz mertebeden sürekli türevleri olan bir f fonksiyonu ile işe başlayalım. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

olarak yazılan seriye f fonksiyonunun a etrafındaki ***Taylor serisi açılımı*** denir. Bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını nasıl hesaplayacağımızı biliyoruz. Bunun için daha önce yaptıklarımızda x yerine $x - a$ almak yeterli. Ama a noktasından farklı herhangi bir $x \in (a - r, a + r)$ için Taylor serisinin toplamının $f(x)$'e eşit olup olmadığını bilmiyoruz. Örnek için $a = 0$ olsun ve

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{eğer } x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyonun 0'daki türevini bulmak için

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x}$$

limitini hesaplamamız gerekecek. Ama

$$t = \frac{1}{x}$$

yazarak

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t \to \infty} te^{-t^2} = 0$$

elde ederiz. Bu da bize

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0$$

verir. Benzer yöntemle her n için $f^{(n)}(0) = 0$ sonucuna varırız.

Bu fonksiyonun 0'daki türevleri hep 0'a eşittir, dolayısıyla fonksiyonun 0'daki Taylor serisi açılımı 0'a eşittir, ama her $x \neq 0$ için $f(x) > 0$ olur. Bu örnek bize verilen bir fonksiyonun Taylor serisinin her zaman fonksiyona eşit olmadığını gösteriyor.

Bir fonksiyonun a etrafındaki Taylor serisi açılımının davranışını incelemek için serinin n'inci dereceye kadar olan terimlerinin toplamını

$$R_n(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

olarak yazalım. Burada bir $r > 0$ için fonksiyonumuzun ve ilk n türevinin $[a - r, a + r]$ aralığında ve $n + 1$'inci türevinin de $(a - r, a + r)$ aralığında sürekli olduğunu varsayıyoruz. İlk olarak $n = 1$ haline bakalım.

$$R_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$$

kalanını farklı bir biçimde ifade edeceğiz.

$$u = f'(t) \text{ ve } v = t$$

dersek,

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

formülü bize,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

$$= xf'(x) - af'(a) - \int_a^x tf''(t)\,dt$$

$$= \left(x\int_a^x f''(t)\,dt + xf'(a)\right) - af'(a) - \int_a^x tf''(t)\,dt$$

$$= \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt + (x-a)f'(a)$$

verir. Böylece birinci fark

$$R_1(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)$$

$$= \int_a^x (x-t)f''(t)dt$$

formülüyle ifade edilir. Artık genel hale bakalım.

Teorem 2. *Bir $r > 0$ sayısı için f fonksiyonunun n'inci türevi $[a - r, a + r]$ aralığında ve $(n + 1)$'inci türevi* de *$(a - r, a + r)$ aralığında sürekliyse*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

eşitliği $x \in (a - r, a + r)$ aralığında geçerlidir. Ayrıca bir $\xi \in [a, x]$ için,

$$R_n = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

olur.

Kanıt: Teoremimizi $n = 1$ için kanıtladık. Aynı yöntemi kullanarak tümevarımla sonuca ulaşacağız. Bir k için

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^k \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \int_a^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k dt$$

olduğunu varsayalım. Son integrali

$$dv = \frac{(x-t)^k}{k!}dt \text{ ve } u = f^{(k+1)}(t)$$

tanımlarıyla şöyle yazarız:

$$\int_a^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k dt = -\left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1}\right]_a^x + \int_a^x \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1} dt.$$

Bunu varsayımımıza yerleştirerek istediğimizi elde ederiz.

Taylor serisindeki n'inci fark

$$R_n = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

ise, integral için ortalama değer teoremi [MD-2011-II, sayfa 48-49] bize

$$R_n = f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

eşitliği sağlayan bir ξ noktasının uç noktaları a ve x olan kapalı aralıkta varolduğunu söyler. Son integrali de kolayca hesaplayarak n'inci farkı

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

şeklinde de ifade edebiliriz. □

Fonksiyonun Taylor serisine eşit olması için yukardaki teoremdeki R_n kalanının n sonsuza giderken 0'a gitmesi gerekli ve yeterlidir.

Şimdi bazı önemli fonksiyonların Taylor serisi açılımlarına bakalım. Burada hep $a = 0$ alacağız. Bu özel Taylor serisine ***MacLaurin serisi*** de denir. İlk fonksiyonumuz $f(x) = e^x$ olsun. Bu fonksiyonun açılımı

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

olarak kolaylıkla hesaplanır. Serinin yakınsaklık yarıçapı sonsuz çünkü

$$\lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0.$$

[MD-2008-II, sayfa 18] Demek ki serimiz her yerde yakınsak ama limitte toplamı e^x sayısına eşit mi sorusu hâlâ cevapsız. Bunun için Teorem 2'yi kullanarak fark teriminin n sonsuza giderken nasıl davrandığını incelememiz gerekir. Her x için

$$R_n = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

eşitliğini sağlayan bir ξ olduğunu biliyoruz. Eğer $|x| < r$ ise, ξ de 0 ile x arasında olduğundan

$$|R_n| \leq e^r \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}$$

eşitsizliği sağlanır. Ama

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

(çünkü e^r serisi yakınsak). Böylece her $x \in \mathbb{R}$ için

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \tag{7}$$

elde ederiz.

İkinci olarak $f(x) = \sin x$ fonksiyonunu ele alalım. Bu halde

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x,$$
$$f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x$$

olduğunu biliyoruz. Demek ki açılımımız

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

olacak. Fonksiyonumuzun her türevi ya $\pm\sin x$, ya da $\pm\cos x$. Öyleyse n'inci fark terimi

$$|R_n| \leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}$$

eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla gene her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{8}$$

elde ederiz. Aynı sinus fonksiyonunda olduğu gibi $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun Taylor açılımının her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{9}$$

olduğunu kanıtlarız.

Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ verildiğinde $(x + b)^n$ ifadesini binom katsayılarını kullanarak

$$(x+b)^n = b^n + nb^{n-1}x + \cdots + \binom{n}{k} b^{n-k} x^k + \cdots + x^n$$

yazabileceğimizi biliyoruz. Buradaki açılım sonlu. Şimdi n yerine herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ alalım ve

$$f(x) = (x + b)^{\alpha}$$

fonksiyonunun açılımına bakalım. Ama

$$(x+b)^{\alpha} = b^{\alpha}\left(1 + \frac{x}{b}\right)^{\alpha}$$

yazıp, biraz daha basit olan

$$f(x) = (1 + b)^{\alpha}$$

fonksiyonunun Taylor açılımını incelemek yeterli olacak. Bu halde $x > -1$ ise

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1},$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2}$$
$$\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha-n}$$

olduğunu görmek kolay. Öyleyse fonksiyonumuzun Taylor açılımındaki n'inci katsayı

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

olacak. Bu katsayıyı, binom açılımındaki notasyondan esinlenerek,

$$\binom{\alpha}{n}$$

olarak göstereceğiz. Eğer α bir doğal sayıysa, bu aynen binom katsayısıdır. Serimizin yakınsaklık yarıçapını hesaplamak kolay, çünkü

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(0)\, n!}{f^{(n)}(0)\,(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = 1.$$

Demek ki $f(x) = (x + 1)^{\alpha}$ fonksiyonunun Taylor serisi $(-1, 1)$ aralığında yakınsak ama hâlâ serinin toplamı fonksiyonumuza mı eşit bilmiyoruz. Bunun için gene Teorem 2'yi kullanmayı deneyebiliriz ama bu yolla sonuca ulaşmak hiç de kolay değil. Başka bir yöntem deneyelim. $(-1, 1)$ aralığında g fonksiyonunu

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

olarak tanımlayalım. $(-1, 1)$ aralığında bu fonksiyonun türevini serideki her terimin türevini alıp toplayarak buluruz ve sonucu $1 + x$ ile çarparak şöyle elde ederiz:

$$(1+x)g'(x) = (1+x)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

Sağdaki iki seriyi bir kuvvet serisi olarak yazalım. İlk terim α'dan başka birşey değil. n'inci terim ise

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}.$$

Kısacası

$$(1+x)g'(x) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right)x^n.$$

Ama kolay bir hesapla görüleceği üzere

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n} = \alpha\binom{\alpha}{n}.$$

Yani

$$(1+x)g'(x) = \alpha + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

Sağdaki serinin toplamı $\alpha g(x)$. Demek ki $(-1, 1)$ aralığında

$$(1+x)\,g'(x) = \alpha g(x)$$

sağlanır. Şimdi yeni bir fonksiyon tanımlayalım.

$$h(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^{\alpha}}$$

olsun. Türev alarak

$$h'(x) = \frac{(1+x)^{\alpha}g'(x) - \alpha(1+x)^{\alpha-1}g(x)}{(1+x)^{2\alpha}}$$

elde ederiz. Ama $(1+x)g'(x) = \alpha g(x)$ öyleyse $(-1, 1)$ aralığındaki her x için $h'(x) = 0$, yani bu aralıkta h fonksiyonu sabit olacak. Bu fonksiyonun 0'daki değeri ise $h(0) = g(0) = 1$. Böylece

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

elde ettik. ***Binom serisi*** denilen ve Newton'un bulduğu bu önemli sonucun birçok uygulaması olduğunu göreceğiz.

Teorem 3. *Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $(-1, 1)$ aralığında*

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \tag{10}$$

sağlanır. □

Binom serisi açılımının ilk uygulaması olarak $b \neq 0$ için $(x+b)^{\alpha}$ fonksiyonuna bakalım.

$$(x+b)^{\alpha} = b^{\alpha}\left(1+\frac{x}{b}\right)^{\alpha} = b^{\alpha}\sum\binom{\alpha}{n}\frac{x^n}{b^n}$$

yazarak $|x| < |b|$ için

$$(x+b)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}b^{\alpha-n}x^n \tag{11}$$

sonucunu kolayca elde ederiz. Geometrik seriyi incelerken $\alpha = -1$ ve $\alpha = -2$ halindeki sonuçları zaten bulmuştuk. $\alpha = 1/2$ ve $b = 1$ için

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots \tag{12}$$

serisini elde ederiz. Diğer bir ilginç örnek ise $\alpha = -1/2$ hali. Bu durumda

$$\frac{1}{(1+x)^{1/2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots \tag{13}$$

sonucuna ulaşırız. Eğer x yerine $-x$ alırsak,

$$\frac{1}{(1-x)^{1/2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots \tag{14}$$

buluruz. Son olarak x yerine x^2 alalım:

$$\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots \tag{15}$$

çıkar. Serimiz $-1 \leq x \leq 1$ aralığında yakınsak ama eşitlik sadece $-1 < x < 1$ için geçerli. İntegral alarak buradan, bir c sabiti için,

$$\arcsin x = c + x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots$$

eşitliğini elde ederiz. İki tarafı da $x = 0$ değerinde değerlendirirsek c sabitinin 0 olduğu görülür. Demek ki

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots \tag{16}$$

$(-1, 1)$ aralığında geçerli olan bu sonuca bu yoldan değil de doğrudan ulaşmak istersek, $f(x) = \arcsin x$ fonksiyonunun ardarda türevleri almamız ve Taylor açılımındaki fark teriminin davranışını incelememiz gerekirdi. Bu ise oldukça zordur.

Binom serisinin bakacağımız son özel hali

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots \tag{17}$$

eşitliği olacak. Bu eşitlik (13)'te x yerine x^2 alınarak hemen çıkar. Sol tarafın integralini biliyoruz:

$$\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Öyleyse bir c sabiti için, $x \in (-1, 1)$ ise

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = c + x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

eşitliği geçerlidir. Eğer $x = 0$ alırsak sabitin gene 0'a eşit olduğunu görürüz. Demek ki,

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

olur.

Bu yazının başında sadece geometrik serinin toplamını bulduk. Daha sonra e^x, sin x, cos x gibi fonksiyonların Taylor serisi açılımlarını yazdık. Binom serisi bize $(1 + x)^\alpha$ fonksiyonunu değişik α değerleri için kuvvet serisi olarak yazma olanağını sağladı. Elde ettiğimiz hemen her serinin türevini veya integralini alarak yeni ilginç seri açılımları elde ettik. Bilinen seri açılımlarından yeni seriler elde etmenin bir başka yolu da yakınsak serilerin çarpımlarını gene bir seri olarak yazmaktır. Yakınsaklık yarı çapları $0 < r_1 \le \infty$ ve $0 < r_2 \le \infty$ olan iki kuvvet serisi alalım. Eğer

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ ve } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

ise $h(x) = f(x)g(x)$ fonksiyonunun Taylor serisi açılımını bulmaya çalışalım. Bunun için h fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türevlerini hesaplamamız gerekecek.

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

olduğunu biliyoruz. Tekrar türev alırsak kolayca

$$h''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

elde ederiz. Aslında bir çarpımın tüm türevlerini veren

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

Leibniz formülünü n üzerinden tümevarımla kanıtlamak hiç de zor değil. Leibniz formülü bize

$$h^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} n! \frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$$

verir. Ama

$$\frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = a_{n-k} \text{ ve } \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = b_k.$$

Demek ki

$$\frac{h^{(n)}(0)}{n!} = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \cdots + a_0 b_n = \sum_{i+j=n} a_i b_i$$

olacak. Ama bu ise h fonksiyonunun açılımındaki n'inci katsayı. Öyleyse

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \cdots + a_0 b_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

dersek

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

sonucuna varırız. Bazen h serisine f ve g serilerinin ***Cauchy çarpımı*** denir. Bu yeni kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının $\ge \min\{r_1, r_2\}$ olduğunu kanıt vermeden belirtelim [2].

Şimdi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{eğer } x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyonun Taylor serisi açılımını

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

olarak yazalım. Buradaki B_n katsayılarına ***Bernoulli sayıları*** denir. f fonksiyonunun sonsuz türevli olduğu ve Tayfor serisinin fonksiyona eşit olduğu çok bariz değil. Bu olguyu kabul edip devam edelim. Tabii $B_n = f^{(n)}(0)$ olmak zorunda ama bu yoldan Bernoulli sayılarını hesaplamak hiç de kolay değil. Biz bambaşka bir yol deneyeceğiz. Önce her x için geçerli olan

$$x = (e^x - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \qquad (18)$$

formülünü yazalım. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

olduğunu biliyoruz. Tabii

$$x = 0 + x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots$$

Demek ki

$$0 + x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right).$$

Öyleyse iki serinin çarpımının katsayıları hakkında daha önce Leibniz formülü yardımıyla bulduğumuzu bu özel duruma uygulayalım.

$$0 = 0 \cdot \frac{B_0}{0!}$$

$$1 = 0 \cdot \frac{B_1}{1!} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{B_0}{0!}$$

$$0 = 0 \cdot \frac{B_2}{2!} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{B_1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{B_0}{0!}$$

$$0 = 0 \cdot \frac{B_3}{3!} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{B_2}{2!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{B_1}{1!} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{B_0}{0!}$$

$$\cdots$$

$$0 = \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!} \frac{B_j}{j!}$$

İlk denklem birşey vermiyor. İkincisinden $B_0 = 1$ elde ederiz. Bunu üçüncü denklemde kullanarak $B_1 = -1/2$ buluruz. Dördüncü ise bize

$$B_2 = -2\left(\frac{B_1}{2} - \frac{B_0}{6}\right) = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

verir. Bu yolla

$$B_3 = 0, B_4 = \frac{-1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \ldots$$

değerlerini buluruz. Demek ki

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{30} + \frac{x^6}{42} + \cdots$$

Bernoulli sayılarını bu yöntemle hesaplamak için kullandığımız denklemlere dikkatlice bakarsak, her Bernoulli sayısının rasyonel olduğunu kolayca kanıtlayabiliriz. Ayrıca $B_1 = -1/2$ ancak hesapladığımız diğer tek indeksli katsayılar $B_3 = B_5 = 0$. Bu durumu incelemek amacıyla

$$h(x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$
$$= \frac{x}{2}\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) = \frac{x}{2} \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}}$$

fonksiyonuna bakalım. Her x için $h(x) = h(-x)$ olduğu hemen görülüyor. Öyleyse her $k \in \mathbb{N}$ için

$$B_{2k+1} = 0.$$

Sonuç olarak

$$h(x) = \frac{x}{2} \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

eşitliğini buluruz. Bu aşamada hiperbolik kotanjan fonksiyonunun tanımını anımsayalım:

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Böylece hiperbolik kotanjan fonksiyonunu kullanarak

$$\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

sonucunu buluruz. Burada x yerine $2x$ koyarak

$$x \coth x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \qquad (19)$$

serisine varırız. Şimdi karmaşık sayılar ve

$$\coth x = i \cot ix$$

eşitliğini kullanacağız. Yukarıda x yerine $-ix$ yazarsak hiperbolik kotanjan yerine normal kotanjan'a geçip

$$x \cot x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \qquad (20)$$

elde ederiz. Bu açılım $(-\pi, \pi)$ aralığında geçerli.Bir de $2 \cot 2x = \cot x - \tan x$, yani

$$\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$$

özdeşliğini uygularsak, biraz hesapla, tanjan fonksiyonunun açılımını Bernoulli sayıları yardımıyla

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1} \qquad (21)$$

yazarız. Bu eşitlik ise $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında geçerli.

Hazır karmaşık sayılara geçmişken e^x fonksiyonunun açılımında x yerine ix koyalım. Tabii

$$i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = i, \ldots$$

olduğunu biliyoruz. Elde ettiğimizi gerçel ve karmaşık kısımlara ayırarak

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

sonucuna varalım. Ama sağ taraftaki serileri tanıyoruz. Böylece her $x \in \mathbb{R}$ için geçerli olan

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad (22)$$

formülünü elde ettik.

Euler formülü olarak bilinen bu çarpıcı formül trigonometrideki birçok özdeşliği içinde barındırmakta. Bir örnek görelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

geçerli; ama aynı zamanda

$$e^{inx} = (e^{ix})^n = (\cos x + i \sin x)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k} x \sin^k x$$

var. Böylece $\cos nx$ ve $\sin nx$ fonksiyonlarını $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonlarının kuvvetleri olarak ifade ederiz. Bu yolla, $n = 3$ için

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x - 3 \cos x \sin^2 x$$
$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$$

elde etmek çok kolay.

Logaritma fonksiyonunu kuvvet serisi olarak (3)'te yazmıştık:

$$\log(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Bu eşitlik $(-1, 1)$ açık aralığında geçerli ama $x = 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

yakınsak bir seri. Acaba bu serinin toplamı log 2 olabilir mi? Bunun gibi soruların yanıtı kanıtı biraz uzun olan Abel teoreminde veriliyor.

Teorem 4. [Abel]. *Yakınsaklık yarıçapı* $0 < r < \infty$ *olan kuvvet serisinin toplamı*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

olsun. Eğer

$$\sum a_n r^n$$

yakınsak bir seriyse

$$\lim_{x\uparrow r} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

doğrudur.

Kanıt: İlk olarak $r = 1$ ve her $x \in (-1, 1)$ için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

olduğunu varsayalım. Ayrıca

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

yakınsak bir seri olsun. Eğer $k \geq 1$ için

$$t_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

tanımını yaparsak, $a_n = t_n - t_{n-1}$ eşitliğini kullanarak

$$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{k} (t_n - t_{n-1}) x^n$$
$$= a_0 + a_k x^k - a_0 x - \sum_{n=1}^{k-1} t_n (x^{n+1} - x^n)$$

yazalım. Buradan haraketle a_0 yerine t_0 yazarak

$$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n = (1-x) a_0 + a_k x^k - \sum_{n=1}^{k-1} t_n (x^{n+1} - x^n)$$
$$= a_k x^k + (1-x) \sum_{n=0}^{k-1} t_n x^n$$

elde ederiz. $(-1, 1)$ aralığındaki her x için

$$\lim a_k x^k = 0.$$

Dolayısıyla k'yı sonsuza götürürsek

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$$

sonucuna varırız. Şimdi

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

olsun. Herkesin bildiği geometrik serinin toplamını kullanırsak $-1 < x < 1$ için

$$t \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{t}{1-x}$$

buluruz. Böylece

$$f(x) - t = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (t_n - t) x^n$$

sağlanır. Amacımız $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = t$ olduğunu göstermek. Herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ verildiğinde yukarıdaki seriyi iki parçaya ayırıp

$$|f(x) - t| \leq |1-x| \left(\sum_{n=0}^{m-1} |t_n - t| |x|^n + \sum_{n=m}^{\infty} |t_n - t| |x|^n \right)$$

eşitsizliğine varırız. Ama $\lim t_n = t$ ve dolayısıyla bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $m \in \mathbb{N}$ sayısını öyle seçeriz ki her $n \geq m$ için $|t_n - t| < \varepsilon/2$ sağlanır. Öyleyse

$$|f(x) - t| \leq |1-x| \left(\sum_{n=0}^{m-1} |t_n - t| |x|^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=m}^{\infty} |x|^n \right)$$

elde ettik. Amacımız x alttan 1'e yaklaşırken limit almak. Onun için sadece $(0, 1)$ aralığına bakalım. Sağdaki ikinci terimde geometrik serinin toplamını kullanırsak

$$\sum_{n=m}^{\infty} |x|^n = \frac{x^m}{1-x} \leq \frac{1}{1-x}$$

elde ederiz. Demek ki elimizde

$$|f(x) - t| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} |t_n - t| x^n$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \left(\sum_{n=0}^{m-1} |t_n - t| + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

var. Şimdi

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{n=0}^{m-1} |t_n - t| \right)^{-1}$$

ise $1 - \delta < x < 1$ aralığında

$$|f(x) - t| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

sağlanır. Öyleyse

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

olacak. Genel halde ise

$$f(x) = g(rx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n x$$

yazarız. Daha önce kanıtladığımız özel hal bize

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \lim_{x\uparrow r} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

verir. □

Abel teoremini $\log(1 + x)$ fonksiyonuna uygularsak

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (22)$$

gibi çarpıcı bir sonuç elde ederiz. Bir de $\arctan x$ fonksiyonuna bakalım. $(-1, 1)$ aralığında

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

olduğunu (5)'ten biliyoruz. Ama $\arctan 1 = \pi/4$ ve

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

serisi de yakınsak. Öyleyse şu sonuca vardık:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \quad (23)$$

İlginç bir sonuç olduğunu düşünüyoruz... ♠

Kaynaklar

[1] R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, Blackie 1934.

[2] Ali Nesin, *Analiz I*, Nesin Yayınevi, Nesin Matematik Köyü serisi, 2'nci basım, 2011.