Kapak Konusu: İntegral IV

Köklü İfadelerin İntegrali

$R(x, y)$ rasyonel bir polinom olsun (yani bir polinomun bir başka polinoma bölümü olsun). Sık sık, (tersinir olan) bir f fonksiyonu için,

$$\int R(x, f(x))\,dx$$

gibi bir integral almak zorunda kalabiliriz. Mesela

$$f(x) = \sqrt{a+bx}$$

olabilir. Bu durumda

$$y = \sqrt{a+bx}$$

değişikliğiyle,

$$x = \frac{y^2 - a}{b} \text{ ve } 2y\,dy = b\,dx$$

olur ve

$$\int R(x, \sqrt{a+bx})\,dx = \frac{2}{b}\int R\left(\frac{y^2-a}{b}, y\right) y\,dy$$

elde ederiz. Rasyonel bir polinomun integrali olduğundan sağdaki integralle başa çıkabiliriz.

Eğer

$$f(x) = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

gibi bir fonksiyonsa, o zaman

$$y = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

değişken değişikliğine gidilir. Buradan x'i y cinsinden yazabiliriz:

$$x = \frac{dy^q - b}{a - cy^q}.$$

Dolayısıyla dx de rasyonel bir polinomla dy'nin çarpımı olarak ifade edilir. Böylece bu durumda da

$$\int R(x, f(x))\,dx$$

integralini bulabiliriz.

Bu yazıda buna benzer köklü ifadelerin integralini bulacağız.

Örnekler

1. *Aşağıdaki integrali hesaplayın.*

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{3-x}}\,dx$$

Çözüm: Söylenen yöntemi uygulayalım:

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{3-x}}$$

olsun. O zaman,

$$y^2 = \frac{1+x}{3-x}$$

ve buradan hareketle küçük bir hesapla

$$x = \frac{3y^2-1}{1+y^2}$$

çıkar. Demek ki,

$$dx = \frac{6y(1+y^2) - (3y^2-1)2y}{(1+y^2)^2}dy = 8\frac{y}{(1+y^2)^2}dy.$$

Dolayısıyla

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{3-x}}\,dx = 8\int \frac{y^2}{(1+y^2)^2}dy = 8\int \frac{(1+y^2)-1}{(1+y^2)^2}dy$$
$$= 8\left(\int \frac{1}{1+y^2}dy - \int \frac{1}{(1+y^2)^2}dy\right)$$

ve MD-2011-III, sayfa 57'den ya da bu sayının sayfa 58'indeki Örnek 6'dan bu son integrali almayı biliyoruz.

2. *Aşağıdaki integrali hesaplayın.*

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}dx$$

Çözüm: Bütün köklerin derecesini eşit yapmak amacıyla

$$y = (x+1)^{1/6}$$

yani

$$y^6 = x+1$$

tanımını yapalım. Böylece $6y^5dy = dx$ ve

$$I = \int \frac{y^3-y^2}{y^3+y^2}6y^5dy = 6\int \frac{y^5(y-1)}{y+1}dy$$

olur. $y^6 - y^5$ polinomunu $y + 1$ polinomuna bölerek integrali kolaylıkla bulabiliriz:

$$I = y^6 - \frac{12y^5}{5} + 3y^4 - 4y^3 + 6y^2$$
$$- 12y + 12\ln|1 + y| + C$$

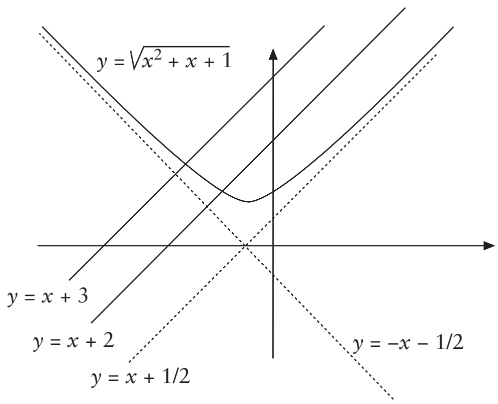
bulunur. y yerine x'li ifadeyi koymayı okura bırakıyoruz! □

3. *Bazı durumlarda biraz geometri bilgisi işe yarar. İşte buna bir örnek*:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

integralini çözün.

Birinci Çözüm: $y = \sqrt{(x^2 + x + 1)}$ bir hiperbolün bir dalıdır (pozitif dalıdır). Şekil aşağıda.



Bu hiperbolün iki asemptotu vardır:

$$y = \pm x \pm 1/2.$$

Bu asemptotlara paralel, yani eğimi ±1 olan doğrular eğriyi tek bir noktada keserler. Eğriyi, bir $t \in \mathbb{R}$ için denklemi $y = x + t$ olan doğrularla kesiştirelim:

$$(x + t)^2 = y^2 = x^2 + x + 1$$

ve

$$x = \frac{1 - t^2}{2t - 1}$$

ve

$$y = x + t = \frac{1 - t^2}{2t - 1} + t = \frac{t^2 - t + 1}{2t - 1}$$

buluruz. Şimdi de dx'i bulalım. İki satır yukarda bulduğumuz

$$(2t - 1)x = 1 - t^2$$

eşitliğinden

$$2x\,dt + (2t - 1)\,dx = -2t\,dt$$

ve

$$(2t - 1)\,dx = -2(x + t)\,dt = -2y\,dt$$

ve

$$\frac{dx}{y} = -2\frac{dt}{2t - 1}$$

çıkar. Dolayısıyla

$$I = \int \frac{dx}{y} = -2\int \frac{dt}{2t - 1} = -\ln|2t - 1| + C$$
$$= -\ln|2(y - x) - 1| + C$$
$$= -\ln\left|\sqrt{x^2 + x + 2} - 2x - 1\right| + C$$

bulunur.

Genel olarak, eğer integralde $a > 0$ için

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

ifadesi varsa, o zaman

$$y = \sqrt{a}\,x + t$$

biçiminde yazılan doğrular

$$y^2 = ax^2 + bx + c$$

hiperbolünün iki asemptotundan birine paraleldirler, dolayısıyla hiperbolü tek bir noktada keserler. Bu durumda x ve y değişkenleri t'nin rasyonel bir fonksiyonu olarak ifade edilirler ve bu değişikliği yapmak integrali çözebilir.

Daha standart bir çözüm aşağıda:

İkinci Çözüm:

$$y = x + \frac{1}{2},\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}z,\ z = \tan\alpha \text{ ve } u = \sin\alpha$$

değişikleriyle,

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4}}}$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \frac{3}{4}}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dz}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{z^2 + 1}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}}$$
$$= \int \frac{\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}}{\sqrt{\tan^2\alpha + 1}} = \int \frac{\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha}}$$
$$= \int \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \int \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\cos^2\alpha} = \int \frac{d\sin\alpha}{1 - \sin^2\alpha}$$
$$= \int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1 + u} + \frac{1}{1 - u}\right)du$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + u}{1 - u}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha} + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(1 + \sin\alpha)^2}{1 - \sin^2\alpha} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{(1 + \sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha} + C$$
$$= \ln\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} + C = \ln\frac{1 + \sin\arctan z}{\cos\arctan z} + C$$
$$= \ln\frac{1 + \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}} + C = \ln\left(\sqrt{1 + z^2} + z\right) + C$$

$$= \ln\left(\sqrt{1+\frac{4}{3}y^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}y\right)+C$$
$$= \ln\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{3}{4}+y^2}+y\right)+C$$
$$= \ln\left(\sqrt{\frac{3}{4}+y^2}+y\right)+C$$
$$= \ln\left(\sqrt{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}+x+\frac{1}{2}\right)+C$$
$$= \ln\left(\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

Burada bulduğumuz yanıt (bir sabitle toplamak dışında) yukarda bulduğumuz yanıta eşittir. Birinci yöntemin çok daha az hesap gerektirdiği açık olmalı. Bir sonraki alıştırmada $a < 0$ ise yapılması gerekeni göreceğiz.

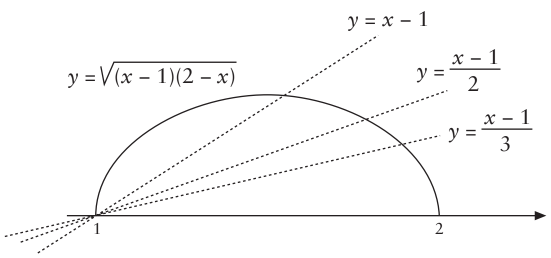
6. *Aşağıdaki integrali hesaplayınız.*

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$$

Birinci Çözüm: Bu sefer

$$y = \sqrt{(x-1)(2-x)}$$

denklemi bize bir elipsin pozitif tarafını verir. x ekseni elipsin eksenlerinden biridir ve elips x eksenini $(1, 0)$ ve $(2, 0)$ noktalarında keser. $(1, 0)$'dan geçen doğruları ele alalım. Bu doğruların denklemi bir t sayısı için $y = t(x-1)$biçimindedir ve eğer $t \geq 0$ ise eğriyi tek bir noktada keserler.



Parametre olarak kesişimin t'sini, yani elipsin (x, y) noktasıyla $(1, 0)$doğrusunun eğimini kullanalım. x ve y'yi t cinsinden bulmaktan çok, integrali alınan dx/y ifadesini t cinsinden yazalım.

$$t^2(x-1)^2 = y^2 = (x-1)(2-x)$$

ve dolayısıyla

$$t^2(x-1) = 2-x$$

olduğundan, diferansiyelleri alarak,

$$2t(x-1)\,dt + t^2\,dx = -dx$$

yani

$$2y\,dt + t^2\,dx = -dx$$

ve

$$\frac{dx}{y} = \frac{-2dt}{1+t^2}$$

bulunur. Böylece,

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = \int \frac{dx}{y}$$
$$= -2\int \frac{dt}{1+t^2} = -2\arctan t + C$$
$$= -2\arctan\frac{y}{x-1}+C$$
$$= -2\arctan\frac{\sqrt{(x-1)(2-x)}}{x-1}+C$$
$$= -2\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}+C$$

elde edilir. □

İkinci Çözüm: $y = x - 3/2$, $y = z/2$, $z = \sin\alpha$ tanımlarıyla

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-3x+2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-((x-3/2)^2+2-9/4)}}$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1/4-(x-3/2)^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1/4-y^2}}$$
$$= \int \frac{dz}{2\sqrt{1/4-z^2/4}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$
$$= \int \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \int d\alpha = \alpha + C$$
$$= \arcsin z + C = \arcsin 2y + C$$
$$= \arcsin(2x-3) + C$$

elde ederiz. İki çözümün farklı görünüyor olması sizi şaşırtmasın, aslında pek farklı değiller. Nitekim her $x \in [1, 2]$ için

$$2\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} + \arcsin(2x-3) = \frac{\pi}{2}$$

olur. (Bu eşitliği kanıtlamak için sol tarafın türevinin 0 olduğunu ve sol tarafın $x = 3/2$'de $\pi/2$ değerini aldığını göstermek yeterli.) ♦

Kaynakça:

G. Bouligand ve J. Rivaud, **L'Enseignement des Mathématiques Générales par les Problèmes,** Librarirle Vuibert 1968.