Eğitim

Dijkstra ve Pisagor Teoremi

Çeviren: Sonat Süer* / *sonatsuer@gmail.com*

Zamanımızın en büyük bilgisayar bilimcilerinden biri 2002 yılında kaybettiğimiz Edsger W. Dijkstra'ydı. Dijkstra'nın bilgisayar bilimine yaptığı katkılar hakkında sayfalarca yazmak mümkün. Ama biz Dijkstra'nın onu ilginç kılan başka bir özelliğiyle ilgileneceğiz. Dijkstra, hakemli dergilerde basılmış makalelerinin yanında, bize EWD kısaltmasıyla numaralanmış yüzlerce el yazması bıraktı. Bu el yazmalarının büyük bölümü matematik ya da bilgisayar bilimi üzerine genelde teknik notlardan oluşuyor. Diğerleriyse Dijkstra'nın mizahi bir dille bilgisayar bilimcilerini eleştirdiği yazılar. İlgilenen okur EWD yazılarının tamamını http://www.cs.utexas.edu/~EWD/ adresinde bulabilir.

Aşağıda Dijkstra'nın EWD 975 numaralı klasik makalesinin Türkçe tercümesini bulacaksınız.

Pisagor Teoremi Üzerine (EWD 975)

Pisagor teoremine Coxeter'in formülasyonuyla (**Introduction to Geometry**, sayfa 8) başlayacağım: *Bir dik üçgende hipotenüsün üstündeki karenin alanı, komşu kenarların üstündeki karelerin alanlarının toplamına eşittir*.

Bu formülasyonla biraz oynayalım. Kenarları a, b ve c olan -açılar iyi tanımlı olsun diye hepsi sıfırdan farklı alınmış- bir üçgende standart notasyona uyarak α, β ve γ açılarını tanımlayalım. (Burada bir açıyı dik açılılığı ifade edebilmek için diğer ikisini de simetri sebebiyle tanımladık.)

Coxeter'ın formülasyonunun biçimsel bir ifadesi şöyle

$$\gamma = \pi/2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Tanımladığımız terimler dışında bu ifade (aşkın!) π sabitini de içeriyor. Neyse ki

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

eşitliğini kullanarak basit aritmetikle π'yi yok edip yukardakine eşdeğer olan

$$\alpha + \beta = \gamma \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

formülasyonunu elde edebiliriz. Bu hoş bir simetriye sahip değil mi? İnsanın aklına -en azından benim aklıma- hemen bu formülasyonun

$$\alpha + \beta = \gamma \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 \qquad (1)$$

şeklinde güçlendirilip güçlendirilemeyeceği sorusu geliyor. (Bu daha sonra bir teorem olacak.) Eğer iki tarafın olumsuzunu alırsak eşdeğer

$$\alpha + \beta \neq \gamma \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq c^2$$

formülasyonunu elde ederiz. Ama

$$x \neq y \Leftrightarrow x < y \vee x > y,$$

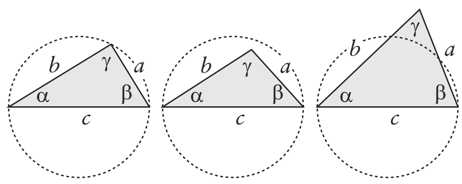
ve sondaki iki koşul birbiriyle kesişmiyor. Büyük açının karşısındaki kenarın büyük olduğunu hatırlayarak

$$\alpha + \beta < \gamma \Leftrightarrow a^2 + b^2 < c^2 \qquad (2)$$

ve

$$\alpha + \beta > \gamma \Leftrightarrow a^2 + b^2 > c^2 \qquad (3)$$

olduğunu tahmin etmek çok mu cüretkâr? Belki, ama uçuk değil.



$\alpha + \beta = \gamma$ $\qquad$ $\alpha + \beta \leq \gamma$ $\qquad$ $\alpha + \beta \geq \gamma$

(Orijinal elyazısı metinde olmayan bir şekil)

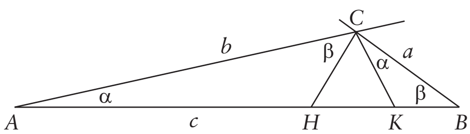
Elimizdeki (1), (2) ve (3) ifadelerinin birbirinden bağımsız olmadığına okurun dikkatini çekelim: Herhangi ikisinden kalan üçüncüsü elde edilebiliyor. Bu üç ifadeyi

$$\operatorname{sgn} 0 = 0 \wedge (\operatorname{sgn} x = 1 \Leftrightarrow x > 0) \wedge (\operatorname{sgn} x = -1 \Leftrightarrow x < 0)$$

kuralıyla tanımlanmış sgn -signum diye okunur- fonksiyonunu kullanarak tek bir ifadede toplayabiliriz:

$$\operatorname{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = \operatorname{sgn}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Şimdi şu şekle bakalım:



* İstanbul Blgi Üniversitesi öğretim üyesi.

1 Dekstra diye okunur.

Ayrık ΔCKB ve ΔAHC üçgenlerinin ΔACB üçgeninin tamamını kaplamadığı

$$\alpha + \beta < \gamma$$

durumunu çizdik. Eğer ΔXYZ üçgeninin alanını XYZ ile gösterirsek bu durumda elimizde

$$CKB + AHC < ACB$$

eşitsizliği var. $\alpha + \beta = \gamma$ durumunda H ve K noktaları üstüste biniyor ve

$$CKB + AHC = ACB$$

eşitliğini elde ediyoruz. $\alpha + \beta > \gamma$ durumunda ise iki üçgen kesişiyor ve

$$CKB + AHC > ACB$$

eşitsizliğini elde ediyoruz. Özetle

$$\operatorname{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = \operatorname{sgn}(CKB + AHC - ACB).$$

Sağ taraftaki üç alan benzer üçgenlere ait ve dolayısıyla üçgenlerin karşılıklı denk gelen kenarlarına oranları aynı. Özel olarak

$$\frac{CKB}{a^2} = \frac{AHC}{b^2} = \frac{ACB}{c^2} > 0$$

ve dolayısıyla

$$\operatorname{sgn}(CKB + AHC - ACB) = \operatorname{sgn}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Yani

$$\operatorname{sgn}(a^2 + b^2 - c^2) = \operatorname{sgn}(\alpha + \beta - \gamma)$$

eşitliğini, Coxeter'ın alıntıladığının diyelim 4 katı zengin bir teorem kanıtladık.

Bu notun başlığını gören okur, Pisagor teoremi gibi ölü bir konuyla uğraşmanın havanda su dövmek olduğunu düşünebilir. O yüzden bu alıştırmadan neler öğrenebileceğimizi özetlemeye çalışalım.

• Formalizasyona kocaman bir alkış! Kanıtı bir dik üçgende $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini kanıtlayacak şekilde düzenlemek yerine, $\gamma = \pi/2$ eşitliğini kanıtlamak istediğimiz ifadenin önceline dahil ettik. Ancak π'yi ifadeye dahil ettikten sonra π'den kurtulup hoş biçimde simetrik bir formülasyonla karşılaştık.

• Eşdeğerliğe kocaman bir alkış! Net bir biçimde gördük ki teorem dik üçgenlerle değil genel anlamda üçgenlerle ilgili.

• sgn fonksiyonunun sağladığı notasyon kolaylığına kocaman bir alkış! Eğer dikkatli olmasaydık, R ilişkisi $=, \neq, <, \leq, >, \geq$ ilişkilerinden biri olabilir ve

$$(\alpha + \beta) R \gamma \Leftrightarrow (a^2 + b^2)\, R c^2$$

önermesini kanıtlayabilirdik.

• Kanıtın aksiyomatizasyon yetersizliği yüzünden resme başvurmak zorunda kaldığımız kısmına alkış yok! Resimler neredeyse önlenemez biçimde gereğinden fazla özeldirler ve bu yüzden bizi bir durum analizine zorlarlar. Kanıtta $\alpha + \beta > \gamma$ durumuna denk gelen dokuz resmi çizmediğime dikkatinizi çekerim: K noktası A noktasının sağında, üzerinde ve solunda olabilir; aynı şey H ve B noktaları için de geçerli. Kanıt açısından bu ayrımların hiçbir önemi yok ama resim çizerken olası durumlardan birini seçmemek neredeyse mümkün değil.

• Günün birinde gençlerin hâlâ daha Pisagor teoreminin Coxeter'daki seyreltilmiş haliyle eğitilmelerine yol açan [tarihsel] koşulların ikna edici bir açıklamasını bulmak istiyorum. Bu arada, dokuz resim çizmeden de

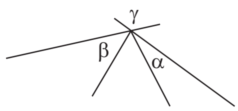
$$CKB + AHC < ACB \Rightarrow \alpha + \beta < \gamma$$

ve

$$CKB + AHC = ACB \Rightarrow \alpha + \beta = \gamma$$

ifadelerini, yani (1) ve (2)'yi tamamen kanıtlayabilirdik.

• Çizdiğimiz resmin bir sihirbazın şapkasından çıkmadığına okurun dikkatini çekeriz. Kanıtlamaya çalıştığımız denklikte $\operatorname{sgn}(\alpha + \beta - \gamma)$ ifadesi belirince $(\alpha + \beta - \gamma)$ farkını oluşturmak çekici biçimde akla yatkın hale geldi. α ve β arasındaki simetriyi bozmamak için γ açısıyla başladık ve bir taraftan α'yı öbür taraftan β'yı çıkardık:



Çizdiğimiz resmin özü buydu.

Sonsöz. Paradoksal bir durumdayım. Pisagor teoremini bilenler arasında yukarıda yazılanları okuyanların hemen hemen hepsinin yazının en az bir yerinde şaşıracağına kaniyim. Üstelik şaşırdıkları yerlerin şaşırılması gereken önemli yerler olduğunu düşünüyorum. Buna rağmen havanda dövülmüş bu suyu gönderebileceğim tek bir saygıdeğer dergi bilmiyorum.

Austin, 7 Eylül 1986

Prof. Dr. Edsger W. Dijkstra
Department of Computer Sciences
The University of Texas at Austin
Austin, TX 78712-1188, USA ♠

İnsanları, programlarda basitlik ve açıklığın -matematikçilerin deyimiyle zarafetin- vazgeçilebilir bir lüks değil, başarı ve başarısızlık arasındaki farkı belirleyen önemli bir nokta olduğuna nasıl ikna edebiliriz?

Edsger W. Dijkstra, EWD 648'den