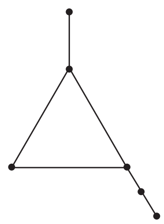
Hemen Hemen Her Sonlu Çizge Asimetriktir

Kayhan Zemin

Eğer bir çizgenin özdeşlik, yani Id fonksiyonundan başka otomorfizması yoksa, bu çizgeye *asimetrik* denir. İşte en küçük asimetrik çizge:



Asimetrik çizge bulmak hiç kolay değildir. Ama bu zorluk anlaşılan, asimetrik çizgelerin enderliğinden değil, beynimizin simetrisiz düşünmede zorlanmasından kaynaklanmaktadır. Nitekim hemen hemen her sonlu çizge asimetriktir. Bir başka deyişle, büyük bir n doğal sayısı için n noktalı rastgele bir çizge seçseniz, bu çizge çok büyük bir olasılıkla asimetrik olacaktır. Bu yazıda bunu kanıtlayacağız. Tam olarak neyi kanıtlayacağımızı açıklayalım.

n elemanlı bir V kümesi alalım.

$$V = \{1, 2, ..., n\}$$

olabilir mesela. Noktalar kümesi V olan çizgelerden oluşan kümeye Ω diyelim. Ω'nın tam

$$2^{\binom{n}{2}}$$

tane elemanı vardır. Nitekim noktalar kümesi V olan bir X çizgesi bağıntılarıyla, yani $E(X)$ olarak simgelenen bağıntılar kümesiyle belirlenir ve $E(X)$ de, V'nin 2 elemanlı altkümeler kümesi olan $\wp_2(V)$'nin bir altkümesidir. Demek ki

$$|\Omega| = |\wp(\wp_2(V))| = 2^{|\wp_2(V)|} = 2^{\binom{n}{2}}.$$

Bu yazıda Ω kümesiyle $\wp(\wp_2(V))$ kümesini özdeşleştireceğiz. (Ω'daki çizgelerin noktaları V'nin elemanları olarak baştan belirlenmiş olduğundan, Ω'daki çizgeler bağıntılar kümesi tarafından tamamen belirlenir.)

Ω kümesindeki asimetrik çizge sayısı a_n olsun.

$$\mu_n = \frac{a_n}{2^{\binom{n}{2}}}$$

sayısı, asimetrik çizgelerin Ω kümesindeki oranıdır. Bu yazıda bu oranın 1'e yakınsadığını, yani

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = 1$$

eşitliğini kanıtlayacağız. Böylece büyük n doğal sayıları için asimetrik çizge sayısının hemen hemen toplam çizge sayısı kadar olduğu anlaşılacak.

Kanıtımızın iskeletini oluşturacak olan basit bir önsavla başlayalım.

Önsav 1 [Burnside[1]]. *Sonlu bir G grubu sonlu bir V kümesine etkisin. O zaman V'deki yörünge sayısı, G'nin elemanlarının sabitlediği ortalama eleman sayısına, yani*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}_V(g)|$$

sayısına eşittir.

Kanıt: $A = \{(g, x) \in G \times V : gx = x\}$ kümesini iki değişik biçimde sayalım. Eğer saymayı $g \in G$ üzerine toplayarak yaparsak,

$$|A| = \sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}_V(g)| \tag{1}$$

buluruz. Şimdi de saymayı $x \in X$ üzerine yapalım. Okurun,

$$\begin{aligned} Gx &= \{gx : g \in G\} \\ &= x\text{'in } G\text{-yörüngesi} \\ &\subseteq V \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G_x &= \{g \in G : gx = x\} \\ &= x\text{'in } G\text{'deki sabitleyicisi} \\ &\leq G \end{aligned}$$

tanımlarıyla,

$$|G| = |Gx||G_x|$$

1 Halk arasında Burnside Önsavı olarak bilinen bu önsav aslında Burnside'dan daha eskidir, Frobenius'a, hatta Cauchy'ye kadar uzanır.

eşitliğini bildiğini varsayıyoruz[2]. Her yörüngeden bir eleman (temsilci) seçelim ve bu temsilcilerden oluşan kümeye Y diyelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}|A| &= \sum_{x\in X}|G_x| = \sum_{x\in X}\frac{|G|}{|Gx|}\\ &= \sum_{y\in Y}|Gy|\frac{|G|}{|Gy|} = \sum_{y\in Y}|G|\\ &= |G||Y|\end{aligned}$$

yani

$$|A| = |G||Y| \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) eşitliklerinden istediğimiz çıkar. □

$G = \mathrm{Sym}(V)$ olsun. G grubu Ω üzerine doğal olarak etkir. Bu etkimeyi şöyle görebiliriz: G, elbette V üzerine etkir; dolayısıyla $\wp_2(V)$ üzerine de etkir; dolayısıyla $\wp(\wp_2(V)) = \Omega$ üzerine de etkir.

$X \in \Omega$ için, X'in G-yörüngesi GX, elbette X'e izomorf olan çizgelerden oluşur; ne de olsa g, X ile gX arasındaki izomorfizmadır.

$$G_X = \mathrm{Aut}(X)$$

eşitliği de bariz biçimde doğrudur. Demek ki X'e izomorf çizge sayısı,

$$|GX| = \frac{|G|}{|G_X|} = \frac{|G|}{|\mathrm{Aut}(X)|} = \frac{n!}{|\mathrm{Aut}(X)|}$$

olur.

Şimdi, yukardaki önsavdaki A kümesinin bu kapsamda eşi olan,

$$\begin{aligned}A &= \{(g, X) \in G\times\Omega : gX = X\}\\ &= \{(g, X) \in G\times\Omega : g \in \mathrm{Aut}(X)\}\end{aligned}$$

kümesinin elemanlarını $g \in G$ üzerine toplayarak hesaplayalım. Bir $g \in G$ sabitleyelim. Eğer $g \in \mathrm{Aut}(X)$ ise, X'in bağıntılar kümesi, X'in her bağıntısı için, bu bağıntının $\langle g\rangle$-yörüngesini de içerir; yani $E(X)$ kümesi $\wp_2(V)$'nin $\langle g\rangle$-yörüngelerinden oluşur. Ve bu koşul sadece gerek değil, ayrıca yeterdir de: Eğer $E(X)$ kümesi $\wp_2(V)$'nin $\langle g\rangle$-yörüngelerinden oluşuyorsa o zaman $g \in \mathrm{Aut}(X)$ olur. Dolayısıyla eğer $\wp_2(V)$'deki $\langle g\rangle$-yörünge sayısı r ise, g tam tamına 2^r tane farklı çizgenin otomorfizmasıdır:

$$|\{X \in \Omega : g \in \mathrm{Aut}(X)\}| = 2^r.$$

Bu r sayısını $y(g)$ olarak gösterelim:

$$y(g) = \wp_2(V)\text{'deki } \langle g\rangle\text{-yörünge sayısı.}$$

Demek ki

$$|A| = \sum_{g\in G} 2^{y(g)}$$

olur. Burnside Önsavı'na göre, Ω'nın G-yörüngesi sayısı, yani birbirine izomorf olmayan çizge sayısı,

$$\frac{1}{n!}\sum_{g\in G} 2^{y(g)}$$

olur. Şimdi bu sayı hakkında genel bir bilgi edinelim:

Önsav 2. *Ω'nın izomorf olmayan çizge sayısı, yani G-yörüngesi sayısı $\lim_{n\to\infty} o(n) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $o(n)$ dizisi için*

$$(1 + o(n))\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$$

olur.

Kanıt: Bir $g \in G$ elemanının ***desteği***, g'nin sabitlemediği, yani yerinden oynattığı elemanlar kümesidir. Bir g elemanı ne kadar fazla eleman sabitliyorsa, yani desteği ne kadar küçükse, V ve $\wp_2(V)$ kümelerindeki yörüngeleri o kadar küçük, dolayısıyla yörünge sayıları da o kadar büyük olur. Örneğin $\mathrm{Id}_V \in G$ elemanının her yörüngesi tek bir elemandan oluşur, dolayısıyla $\wp_2(V)$ kümesindeki yörünge sayısı (maksimal sayı olan)

$$\binom{n}{2}$$

olur. Eğer $a \neq b \in V$ için $g = (a, b) \in G$ ikili döngüsüyse, g-yörüngelerinin ya 1 ya da 2 elemanı vardır. Nitekim bu durumda g-yörüngeler şunlardır:

1. $\{\{a, b\}\}$,

2. Her $x \in V \setminus \{a, b\}$ için $\{\{a, x\}, \{b, x\}\}$,

3. Her $x, y \in V \setminus \{a, b\}$ için $\{\{x, y\}\}$.

Demek ki g-yörüngesi sayısı

$$1 + (n-2) + \binom{n-2}{2}$$

olur. Bu ısınma hareketlerinden sonra ciddi hesaplara geçelim.

$g^n = 1$ ise, bir $\langle g\rangle$-yörüngesinde en fazla n tane eleman vardır, o elemanlar da

$$X, gX, g^2X, \ldots, g^{n-1}X$$

biçiminde yazılan çizgelerdir. (Ama bunlardan bazıları birbirine eşit olabilir.) Ve yörüngelerde ne kadar az eleman varsa, toplam yörünge sayısı o kadar artar. Dolayısıyla, eğer Id_V elemanını saymazsak en fazla yörüngeyi derecesi 2 olan elemanlar verir, çün-

2 Nitekim, kolayca kanıtlanabileceği üzere, $gG_x \mapsto gx$ fonksiyonu G/G_x sol ötelemeler (*coset*'ler) kümesinden Gx yörüngesine giden bir eşlemedir.

kü bu elemanların yörüngelerinde ya 1 ya da 2 çizge vardır. Bunlar arasından da en fazla yörünge yukarda ele aldığımız (a, b) ikili döngüleri tarafından verilir.

Yukarda söylediklerimizden şu çıkar: Desteğinin eleman sayısı $2r$ olan $g \in G$ elemanları arasında yörünge sayısı en büyük olanlar, r tane ikili ayrık döngüden oluşan g'lerdir. Şimdi bu tür bir elemanın yörünge sayısını hesaplayalım. İki elemanlı yörüngeleri teker teker sıralayalım:

1. g'nin desteğinde olan ama aynı döngüde bulunmayan $x \neq y \in V$ için

$$\{\{x, y\}, \{gx, gy\}\}$$

kümesi iki elemanlı bir yörüngedir ve bunlardan

$$r(r-1)$$

tane vardır.

2. g'nin desteğinde olan x ve g'nin desteğinde olmayan bir y için

$$\{\{x, y\}, \{gx, y\}\}$$

kümesi iki elemanlı bir yörüngedir ve bunlardan

$$r(n-2r)$$

tane vardır.

Demek ki 2 elemanlı yörünge sayısı

$$r(r-1) + r(n-2r) = r(n-r-1)$$

olur.

Tek elemanlı yörünge sayısı da bunların dışında kalanlardır ve onlardan da

$$\binom{n}{2} - 2r(n-r-1)$$

tane vardır. Dolayısıyla toplam g-yörünge sayısı

$$r(n-r-1) + \left(\binom{n}{2} - 2r(n-r-1)\right) = \binom{n}{2} - r(n-r-1)$$

olur.

Şimdi $m \leq n-2$ herhangi bir doğal sayı olsun. m'nin değerini daha sonra işimize geldiği gibi belirleyeceğiz. G'nin elemanlarını üç sınıfa ayıralım:

• $\mathcal{C}_1$ sınıfı: Sadece Id_V elemanı. Bu sınıfta 1 tane eleman vardır.

• $\mathcal{C}_2$ sınıfı: Desteği en fazla m elemanlı olan ve Id_V'den değişik elemanlar. Bu sınıfta en fazla

$$\binom{n}{m} m! = \frac{n!}{(n-m)!} < n^m$$

tane eleman vardır.

• $\mathcal{C}_3$ sınıfı: Geri kalanlar. Bu sınıfta en fazla

$$n! < n^n$$

tane eleman vardır.

Her bir sınıfın elemanlarının yörünge sayısının üstsınırını bulacağız.

$\mathcal{C}_1$ sınıfı için: Id_V'in yörünge sayısı tam tamına olur.

$$y(\mathrm{Id}_V) = 2^{\binom{n}{2}}.$$

$\mathcal{C}_2$ sınıfı için: $\mathcal{C}_2$'nin elemanları arasından maksimum yörünge sayısı, bir tek ikili döngüden oluşan elemanlar tarafından elde edilir. Bunların yörünge sayısını yukarda belirlemiştik: $g \in \mathcal{C}_2$ için

$$y(g) = \binom{n}{2} - (n-2).$$

$\mathcal{C}_3$ sınıfı için: $\mathcal{C}_3$'ün elemanları arasından maksimum yörünge sayısı, $m/2$ tane ikili döngülerden oluşan elemanlar tarafından elde edilir. Bunların yörünge sayısını da yukarda belirlemiştik: $g \in \mathcal{C}_3$ için

$$y(g) = \binom{n}{2} - \frac{m}{2}\left(n - \frac{m}{2} - 1\right) < \binom{n}{2} - \frac{nm}{4}.$$

Demek ki,

$$\sum_{g \in G} 2^{y(g)} < 2^{\binom{n}{2}} + n^m 2^{\binom{n}{2} - (n-2)} + n^n 2^{\binom{n}{2} - \frac{nm}{4}}$$

$$= 2^{\binom{n}{2}}\left(1 + n^m 2^{-n+2} + n^n 2^{-\frac{nm}{4}}\right).$$

Bundan da önsavın kanıtını bitirmek için,

$$n^m 2^{-n+2} + n^n 2^{-nm/4}$$

dizisinin ya da

$$n^m 2^{-n} + n^n 2^{-nm/4}$$

dizisinin limitinin 0 olduğunu kanıtlamanın yeterli olduğu anlaşılıyor. Bu iki ifadenin her birinin limitinin ayrı ayrı 0 olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için özel bir m seçeceğiz. $c > 4$ ve iki tabanında tanımlanmış log fonksiyonu için,

$$m = [c \log n]$$

olsun. Önce birinci terimin 0'a gittiğini kanıtlayalım: $2^{\log n} = n$ eşitliğini kullanarak ve yeterince büyük n alarak,

$$n^m 2^{-n} = \frac{n^m}{2^n} \leq \frac{n^{c \log n}}{2^n} = \frac{2^{c \log^2 n}}{2^n} = 2^{c \log^2 n - n}$$

buluruz. $\lim_{n\to\infty}(c \log^2 n - n) = -\infty$ olduğundan (metnin sonundaki nota bakınız), birinci terimin 0'a gittiği anlaşılır.

İkinci terime bakalım şimdi.

$$n^m 2^{-nm/4} = \frac{n^n}{2^{nm/4}} = \frac{n^n}{2^{n(c/4)\log n}}$$
$$= \frac{n^n}{n^{nc/4}} = n^{n(1-c/4)}$$

ve $1 - c/4 < 0$ olduğundan, ikinci terim de 0'a gider. □

Şimdi artık asimetrik çizgelerin tüm çizgelere oranının, nokta sayısı n sonsuza gittiğinde 1'e gittiğini kanıtayabiliriz.

Girişten μ_n oranını anımsayınız. Bu sayı asimetrik çizgelerin tüm çizgelere oranı olarak tanımlanmıştı. Asimetrik olmayan bir X çizgesinin yörüngesinin eleman sayısı

$$|GX| = \frac{n!}{|\mathrm{Aut}\ X|} \le \frac{n!}{2}$$

olduğundan, asimetrik olanların yörüngesinde de tam $n!$ tane eleman bulunduğundan, bir yörüngenin ortalama eleman sayısı,

$$\frac{1}{2^{\binom{n}{2}}} \sum_{X \in \Omega} |GX|$$
$$\le \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}} \left(\mu_n 2^{\binom{n}{2}} n! + (1-\mu_n) 2^{\binom{n}{2}} \frac{n!}{2} \right)$$
$$= n! \frac{1+\mu_n}{2}$$

olur. Yörünge sayısı da bir önceki önsav tarafından verildi. Demek ki

$$\left(n! \frac{1+\mu_n}{2} \right) \left((1+o(n)) \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \right)$$

çarpımı çizge sayısından, yani

$$2^{\binom{n}{2}}$$

sayısından büyüktür:

$$\left(n! \frac{1+\mu_n}{2} \right) \left((1+o(n)) \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \right) > 2^{\binom{n}{2}}$$

Bundan,

$$\frac{1+\mu_n}{2} (1+o(n)) > 1$$

çıkar. Çarpmayı ve bariz sadeleştirmeleri yapalım:

$$\mu_n + o(n) + \mu_n o(n) > 1.$$

Ama ayrıca $\lim o(n) = 0$ ve $0 \le \mu_n \le 1$ olduğundan, $\lim \mu_n o(n) = 0$ olur. Son iki satırdan,

$$\lim \mu_n \ge 1,$$

yani

$$\lim \mu_n = 1$$

çıkar. Demek ki sonlu çizgelerin çok büyük bir çoğunluğu, hatta tamamına yakını asimetrikmiş. □

Not: Önsav 2'nin sonlarına doğru kullandığımız

$$\lim_{n\to\infty}(c \log^2 n - n) = -\infty$$

eşitliğini kanıtlayalım. Önce

$$\lim_{n\to\infty}(c \log n - n) = -\infty$$

eşitliğini görelim.

$$2^{c\log n - n} = \frac{n^c}{2^n} \to 0$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}(c \log n - n) = -\infty$$

olur. Şimdi buradan hareketle,

$$c \log^2 n - n < c \log^2 n - n^2$$
$$= (\sqrt{c} \log n - n)(\sqrt{c} \log n + n)$$

bulunur. Sağ tarafın limiti olduğunu görmüştük. Demek ki sol taraf da $-\infty$'a ıraksar. ♠

Kaynakça:
Chris Godsil ve Gordon Royle, **Algebraic Graph Theory**, Springer, Graduate Text in Mathematics 207, 2001.

Mark Rehorst'tan el fraktali!