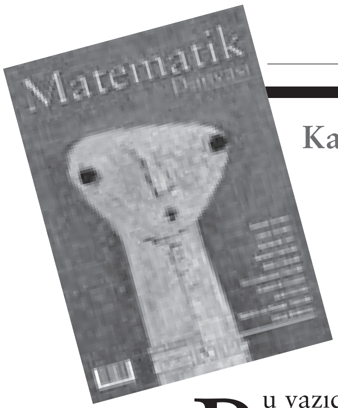
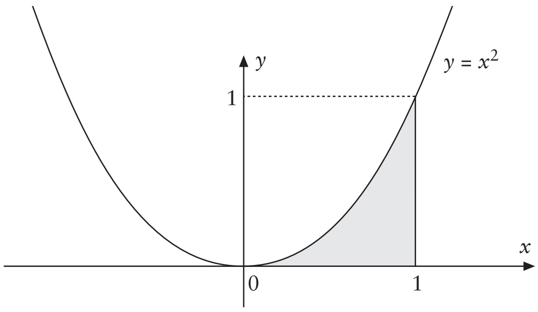


Kapak Konusu: Analizden Konular

Somut Bir Alan Hesabı

ya da "Ayşegül İntegral Öğreniyor"

Bu yazıda bir bölgenin alanını hesaplamaya çalışacağız. İntegral gibi ileri seviyede bir matematik kullanmayacağız. Daha doğrusu integralin teorisini adım adım spesifik bir örneğe uygulayacağız. Kare ya da dikdörtgen kadar basit olmayan ama çok da zor olmayan bir bölge ele alalım örnek olarak. Diyelim, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğinin altında, x ekseninin üstünde, $x = 0$ doğrusunun sağında ve $x = 1$ doğrusunun solunda kalan bölgenin alanını he-

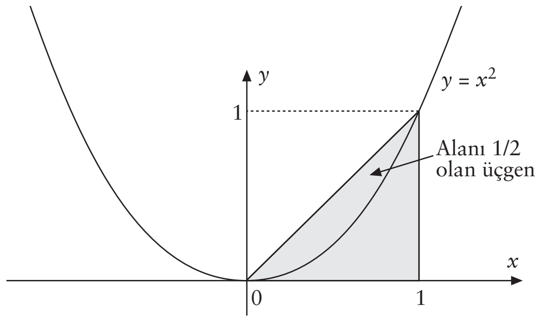


saplamak istiyoruz. Alanını hesaplamak istediğimiz bölgeyi yukardaki şekilde griye boyadık.

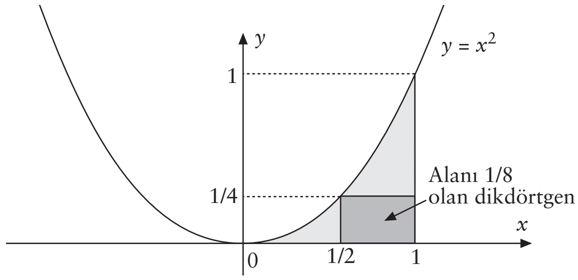
Kolay değil. Hem de hiç değil. Ama başarırsak boyumuz uzar.

Bölgeye B, alanına da A diyelim. A'yı hesaplamaya çalışacağız.

A'nın 1/2'den küçük olduğu aşağıdaki şekilden belli, çünkü aşağıda görüldüğü gibi B, alanı 1/2 olan bir üçgenin içine sığıyor.



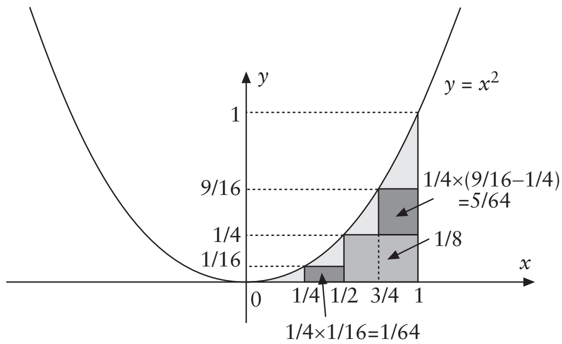
Öte yandan bir sonraki şekilden de alanın 1/8'den büyük olduğunu anlıyoruz, çünkü B'nin içine, alanı $1/2 \times 1/4 = 1/8$ olan bir dikdörtgen sığıyor.



Demek ki

$$\frac{1}{8} < A < \frac{1}{2}.$$

Buna benzer bir yöntemle A'nın hangi sayılar arasına sıkışmış olduğunu kolay bir hesapla bulabiliriz. Örneğin, B'nin içine daha fazla dikdörtgen koyup bu dikdörtgenlerin alanlarını toplarsak, he-



saplamak istediğimiz A sayısına biraz daha yaklaşmış oluruz. Yukardaki şekilde B'nin içine iki dikdörtgen daha koyduk. Böylece,

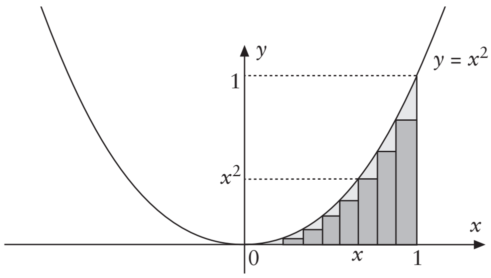
$$A > \frac{1}{64} + \frac{1}{8} + \frac{5}{64} = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$$

eşitsizliği bulunmuş oldu. Şimdi artık,

$$\frac{1}{8} < \frac{7}{32} < A < \frac{1}{2}$$

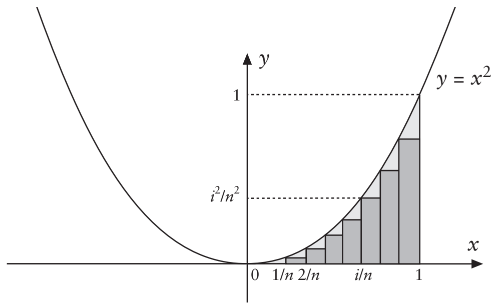
eşitsizliklerini biliyoruz ve A'nın değeri hakkında biraz daha fazla bilgiye sahibiz.

Bu yöntemi sistematikleştirelim. B'nin içine hep dikey dikdörtgenler yerleştirelim, hepsinin eni aynı olsun, örneğin aşağıdaki gibi.



Dikey dikdörtgenlerin enlerini küçültürsek, B bölgesine daha çok dikdörtgen sığdırırız ve A'dan hep küçük ama gene de A'ya daha yakın bir sayı buluruz. B'nin içinde giderek daha dar ama daha çok sayıda dikdörtgen koyarak A sayısına yaklaşmayı umut edebiliriz.

Aşağıdaki şekildeki gibi, en soldan (yani 0'dan) başlayarak her biri $1/n$ eninde olan n tane dar dikdörtgeni yanyana yerleştirelim. (Birincisinin yüksekliği 0.) Bu dikdörtgenlerin alanlarını hesaplayıp toplayacağız.



Dikdörtgenlerin alanını bulmak için önce yüksekliklerini bulmak gerekiyor. Herhangi bir dikdörtgenin sol noktasının koordinatı bir $i = 0, 1, ..., n-1$ tamsayısı için

$$\frac{i}{n}$$

olduğundan, bu dikdörtgenlerin yüksekliği

$$f\left(\frac{i}{n}\right) = \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{i^2}{n^2}$$

şeklinde ifade edilir. Demek ki ince uzun dikdörtgenlerin alanı

$$\frac{1}{n} \times \frac{i^2}{n^2} = \frac{i^2}{n^3}$$

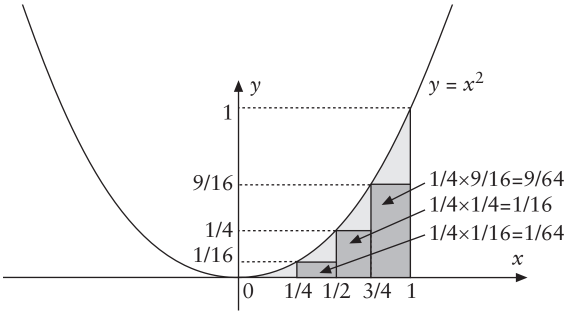
olur. Bunları teker teker toplayalım:

$$\frac{0^2}{n^3} + \frac{1^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3}$$

buluruz. Bu sayıya a_n diyelim:

$$a_n = \frac{0^2}{n^3} + \frac{1^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} < A.$$

$n = 4$ için $a_4 = 7/32$'yi buluruz, yukarda bulduğumuz değer; ama $n > 4$ için A'ya çok daha yakın bir değer bulacağımızı öngörebiliriz.

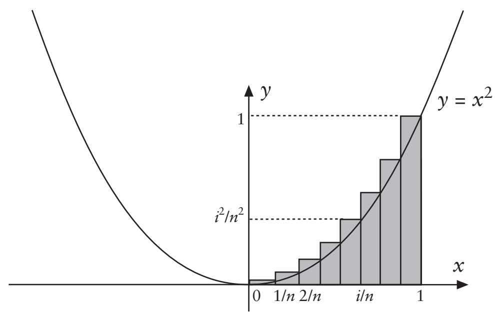


Excel'de küçük bir program yaptım. $n = 1, ..., 13, 25, 100, 101$ ve 200 için bulduğum sonuçları yandaki gri kutuya yazdım. Sayılar sürekli büyüyorlar ama her biri 1/2'den küçük kalıyor, olması gerektiği gibi. n büyüdükçe a_n, A'ya yaklaşır, hiçbiri A'ya eşit olmaz ama, her biri A'dan biraz küçük kalır.

a_1	$= 0$
a_2	$= 0{,}125$
a_3	$\approx 0{,}185185$
a_4	$= 0{,}21875$
a_5	$= 0{,}24$
a_6	$\approx 0{,}25463$
a_7	$\approx 0{,}265306$
a_8	$= 0{,}273438$
a_9	$\approx 0{,}279835$
a_{10}	$= 0{,}285$
a_{11}	$\approx 0{,}289256$
a_{12}	$\approx 0{,}292824$
a_{13}	$\approx 0{,}295858$
a_{25}	$= 0{,}3136$
a_{100}	$= 0{,}32835$
a_{101}	$\approx 0{,}328399$
a_{200}	$\approx 0{,}330838$

Öte yandan n sonsuza gittiğinde a_n'lerin limiti alındığında gerçekten A değerini bulmayı ümit edebiliriz.

Şimdi B'nin **içine** dikdörtgenler koyacağımıza, aşağıdaki şekildeki gibi, B'yi kaplayacak biçimde dikey dikdörtgenler yerleştirelim. Bu sefer dikdörtgenlerin toplam alanı A'yı geçer elbette, ama dikdörtgenlerin enleri küçülüp sayıları çoğaldıkça toplam alanlar sürekli azalırlar ve giderek A'ya yaklaşırlar. Belki de bu sayılar dikdörtgen sayısı çok çok büyüdükçe nerdeyse A olurlar. Göreceğiz...



Daha önce yaptığımız gibi, B'yi $1/n$ genişliğinde n tane ince uzun dikdörtgenle kaplayalım. Bu sefer dikdörtgenlerin toplam alanını

$$\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3}$$

buluruz. Bu sayıya A_n diyelim:

$$A_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3} > A.$$

A_n ile a_n arasında çok küçük bir fark var:

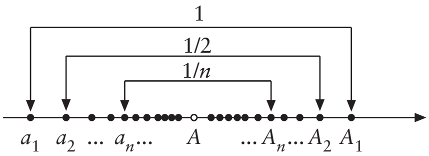
$$A_n - a_n = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}.$$

n büyüdükçe bu $1/n$ farkı giderek küçülür ve n sonsuza doğru gittiğinde fark 0'a yakınsar.

B bölgesinin alanı olan A, bu $(a_n)_n$ ya da $(A_n)_n$ sayı dizisinin limitidir:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} a_n;$$

tabii böyle bir limit varsa, ki var, göreceğiz.



(Oranlar doğru değil)

Demek ki artık sorun,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3}\right),$$

daha modern bir yazılımla

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3}$$

limitini hesaplamakta!

Geometrik bir problemi oldukça cebirsel bir probleme dönüştürdük.

Zor ya da kolay, başlangıçta nasıl yaklaşacağımızı bilmediğimiz bir problemi bayağı adam ettik. Tam yanıtı bulamasak da A'ya istediğimiz kadar yaklaşık değerleri bulabiliriz. Örneğin, A'ya binde bir yaklaşmak istiyorsak, n'yi

$$\frac{1}{1000} \geq \frac{1}{n} = A_n - a_n$$

olacak biçimde seçmek yeterlidir, yani $n \geq 1000$ olmalı. $n = 1000$ için şu yaklaşık değerleri buluruz:

$$\begin{aligned} 0{,}3328335 = a_{1000} < A < A_{1000} &= a_{1000} + 1/1000 \\ &= 0{,}3328335 + 0{,}001 \\ &= 0{,}3338335. \end{aligned}$$

Demek ki,

$$0{,}3328335 < A < 0{,}3338335.$$

Baklayı ağzımızdan çıkaralım.

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3}$$

limiti hesaplanabilir ve sonuç 1/3 bulunur.

Limitten önce A_n'yi hesaplayalım. Ama A_n'yi hesaplamak için önce

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

toplamını bulalım. Bu toplam

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

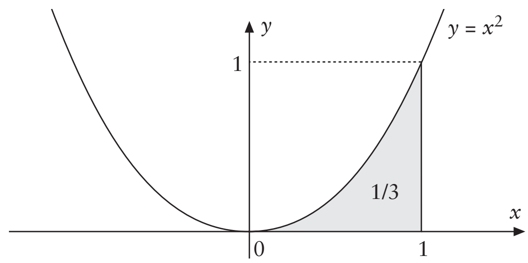
sayısına eşittir. Bunun kanıtı n üzerine tümevarımla kolaylıkla yapılabilir. Kolay kanıtı okura bırakıyoruz. Zaten eşitliğin kanıtını bu yazıyı okuyan her öğrenci bilmeli. Şimdi A_n'yi hesaplayabiliriz:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ve ardından n sonsuza giderken A_n'lerin limitini hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} A_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Sonuç, biraz önce söylediğimiz gibi 1/3 çıktı. Demek ki gri alanın alan ölçüsü 1/3'tür.



Başlangıçta nasıl üstesinden geleceğimizi bilmediğimiz bir soruyu çözdük. Tabii okur,

$$f(x) = x^2$$

yerine daha karmaşık bir fonksiyon alsaydık sonucu bu kadar kolay bulamayacağımızı tahmin ediyordur. Nitekim öyle. Daha karmaşık fonksiyonlarla sınırlanan alanları bu kadar ilkel bir yöntemle bulmak daha zordur. Ama ***analizin temel teoremi*** adı verilen bir teoremle birçok tuhaf alanı, hatta hacmi bulmak mümkündür. Meraklı okur MD-2011-II, sayfa 59, Teorem 1'e bakmalı. ♠