

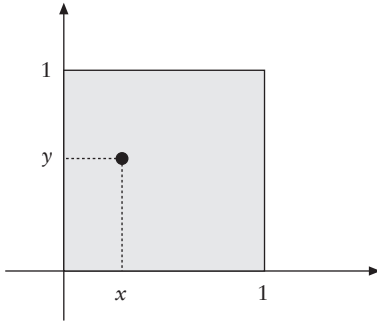
# Geniş Açılı Üçgen Olasılığı

Şanzuman Sağlam

**D**aireyle pi sayısı arasındaki ilişki iyi bilinir ve pek şaşırtıcı bulunmaz da, geniş açılı üçgenlerle pi sayısı arasında bir ilişki herhalde şaşırtır. Bu yazıda sizi şaşırtmayı hedefliyoruz.

Sorumuz şu:  $[0, 1]$  aralığından rastgele iki  $x$  ve  $y$  sayısı seçerek, kenarları 1,  $x$  ve  $y$  olan bir geniş açılı üçgen oluşturma olasılığı kaçtır?

$[0, 1]$  aralığında rastgele iki sayı seçmek demek, birim karede, yani düzlemin  $[0, 1] \times [0, 1]$  bölgesinde rastgele bir nokta seçmek demektir. Nitekim bir-



birinden bağımsız her  $x$  ve  $y$  seçimi birim karede  $(x, y)$  noktası verir ve, tam tersine, birim karede rastgele seçilmiş her  $(x, y)$  noktası bize  $[0, 1]$  aralığında rastgele seçilmiş iki  $x$  ve  $y$  noktası verir.

Her şeyden önce, kenarları 1,  $x$  ve  $y$  olan (dar ya da geniş açılı) bir üçgen olmalı. Bunun için de,

$$\begin{aligned} 1 + x &\geq y \\ 1 + y &\geq x \\ x + y &\geq 1 \end{aligned}$$

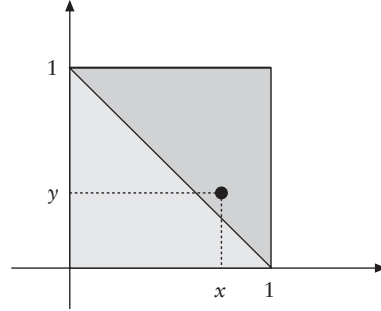
koşullarının hepsi birden geçerli olmalı (Üçgen Eşitsizliği). Ama

$$1 + x \geq 1 \geq y$$

olduğundan, birinci eşitsizlik her zaman doğru olmak zorundadır. Benzer şekilde ikinci eşitsizlik de doğru olmalıdır. Demek ki, uzunlukları 1,  $x$  ve  $y$  olan bir üçgenin var olabilmesi için,

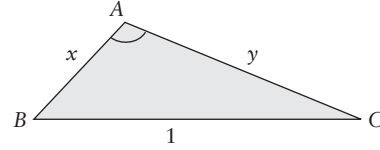
$$x + y \geq 1$$

eşitsizliği doğru olmalıdır. Dolayısıyla birim karede rastgele seçilen  $(x, y)$  noktası aşağıdaki koyu gri üçgenin içinde seçilmelidir.

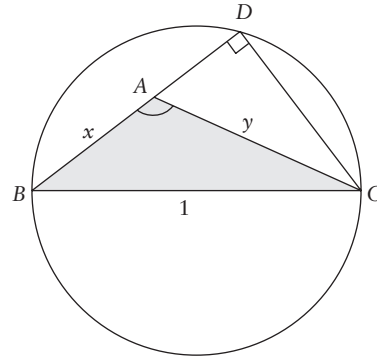


Bunun da olasılığı  $1/2$ 'dir elbette.

Diyelim  $(x, y)$  noktası yukardaki koyu gri üçgende seçildi ve böylece kenarları 1,  $x$  ve  $y$  olan bir üçgen oluştu. Şimdi bu üçgen dar açılı ya da geniş açılı olabilir. Üçgenin geniş açılı olması için  $(x, y)$  noktası hangi bölgede seçilmelidir?



En geniş açı, en uzun kenarının karşısında olmak zorunda olduğundan, 1 uzunluktaki kenarın karşısındaki  $A$  açısıyla ilgilenmeliyiz, çünkü en büyük açı o açıdır ve eğer bir açı geniş açı olacaksa, bu açı ancak  $A$  açısı olabilir ve eğer üçgen dar üçgen olacaksa  $A$  açısı dar açı olmalıdır. Demek ki soru şu:  $A$  açısı ne zaman  $90^\circ$ 'den büyük olur, ne zaman  $90^\circ$ 'den küçük olur?

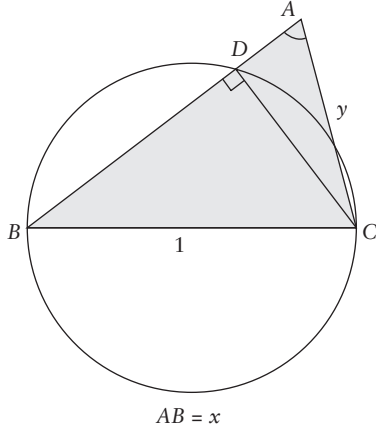


Yukardaki şekildeki gibi kenar uzunlukları 1,  $x$  ve  $y$  olan geniş açılı bir üçgen çizelim. Kenarı 1 olan kenarı çap kabul eden yarım çemberi çizelim.

BA kenarını uzatıp çemberle D noktasında kesişirelim. A açısı geniş açı olduğundan, üçgen dairenin içinde kalır. Şimdi hesap yapalım:

$$\begin{aligned} 1 &= BD^2 + DC^2 \\ &= (BA + AD)^2 + (AC^2 - AD^2) \\ &= AB^2 + 2AB \cdot AD + AC^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2AB \cdot AD \\ &> x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Şimdi, kenar uzunlukları 1, x ve y olan dar açılı bir üçgen çizelim. Aşağıdaki şekilden izleyin. Ge-



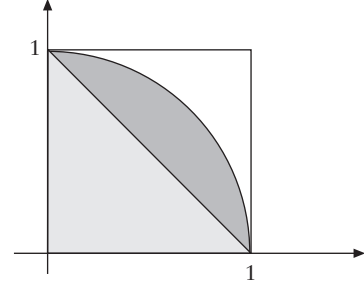
ne kenarı 1 olan kenarı çap kabul eden yarım çemberi çizelim. BA kenarı çemberi gene D noktasında kessin. Bu sefer A açısı dar açı olduğundan, üçgen dairenin dışına taşar. Benzer hesabı yapalım:

$$\begin{aligned} 1 &= BD^2 + DC^2 = (BA - DA)^2 + (AC^2 - AD^2) \\ &= BA^2 - 2AB \cdot DA + AC^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2AB \cdot AD < x^2 + y^2. \end{aligned}$$

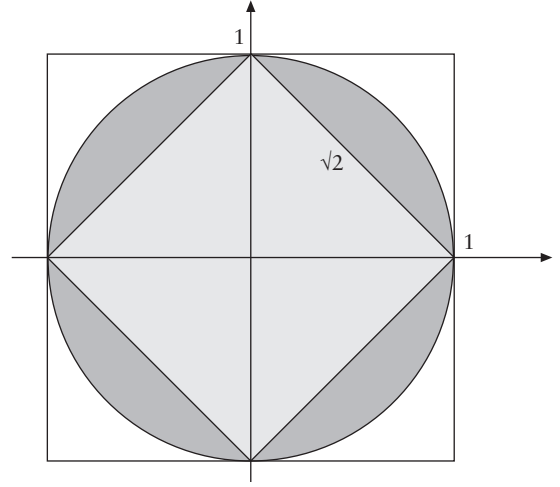
Demek ki üçgenin geniş açılı olması için yeter ve gerek koşul,

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

eşitsizliği. Dolayısıyla üçgenin geniş açılı olması için rastgele seçilmiş noktanın birim karenin aşağıdaki şekildeki koyu gri bölgesinde seçilmiş olması gerekir.



Bu alanı hesaplayalım. Aşağıdaki şekilden takip edin.



Tüm birim çemberin alanı

$$\pi r^2 = \pi.$$

Ortadaki baklavanın alanı

$$(\sqrt{2})^2 = 2.$$

Demek ki kalan alan  $\pi - 2$ . Bunu 4'e bölersek yukardaki koyu gri alanı buluruz:

$$\frac{\pi - 2}{4}.$$

Bu da bulmak istediğimiz olasılıktır. ♦

Kaynakça

Ross Honsberger, *Ingenuity in Mathematics*, MAA New Mathematical Library 23, 1970.

## Fransız Bilim Akademisi

1666'da 14'üncü Louis tarafından, Fransa'nın Finans (Ekonomi) bakanı Colbert'in önerisiyle kurulmuştur. Amacı Fransa'da bilimi teşvik etmek ve o güne dek süregelen Fransız araştırmacı ruhunu korumaktı. 1660'da kurulan Londra Kraliyet Akademisi'nin tersine tamamen hükümete bağlıydı ve siyaset dışı kalmalı, dini ve toplumsal konulara el atmamalıydı. Kurum olarak resmîyetini 1699'da gene 14'üncü Louis sayesinde kazanmıştır. Fransız Devrimi'nde, 1793'te meclis tarafından kapatılmış, ama iki yıl sonra Ulusal Bilim ve Sanat Enstitüsü adı altında tekrar açılmıştır. 1798'de Napoleon Bonaparte akademiye üye seçilmiş ve üç yıl sonra akademi başkanı (1801-1814) olmuştur. Napoleon'un sonunu hepimiz biliyoruz!