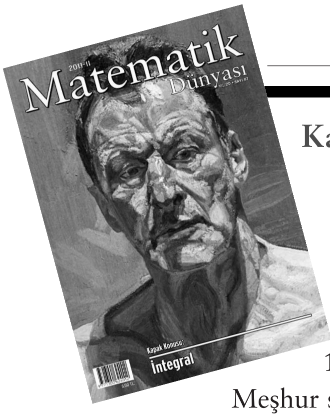

Kapak Konusu: İntegral

Trigonometrik Fonksiyonlara Aksiyomatik Yaklaşım

1. Aksiyomlar

Meşhur sin ve cos trigonometrik fonksiyonlarını geçmişte

$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$$

ve

$$\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

olarak tanımlamıştık [MD-2008-II, sayfa 26 ya da sayfa 18, Örnek 2] ve bu tanımdan yola çıkarak bu ve diğer trigonometrik fonksiyonların birçok özelliğini kanıtlamıştık, mesela [MD-2008-IV, sayfa 51-53]'te. Şu özelliklerin altını çizmek istiyoruz:

A. sin *ve* cos *fonksiyonları* $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{R}$*'ye giden fonksiyonlardır.*

B. $\cos 0 = \sin(\pi/2) = 1$, $\cos \pi = -1$ [MD-2008-IV, sayfa 53, Teorem 8].

C. $\cos(y - x) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$. [MD-2008-IV, sayfa 51, Teorem 1].

D. *Her* $0 < x < \pi/2$ *için*

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Sonuncu eşitsizliklerin hepsini kanıtlamadık ama bu eşitsizlikleri tanımlardan hareketle kanıtlamak o kadar zor değildir. Okura bırakıyoruz.

2. Temel Özellikler

Sadece ve sadece yukardaki dört özelliğini kullanarak (tanımlarına bile başvurmadan) sin ve cos fonksiyonlarının tüm özellikleri kanıtlanabilir. Yani yukarda verilen dört özellik sin ve cos fonksiyonlarının temel özellikleridir ya da aksiyomlarıdır diyebiliriz.

Bu yazıda bundan böyle, sin ve cos fonksiyonları yukarıdaki listelenmiş özellikleri sağlayan iki fonksiyon olsun. İlk olarak trigonometrik fonksiyonların aritmetiksel bazı özelliklerini kanıtlayalım. Daha sonra bu fonksiyonların integrallerini (dolayısıyla türevlerini de) bulacağız.

Teorem 1. i. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
ii. $\sin 0 = \cos(\pi/2) = \sin \pi = 0$.
iii. $\sin(-x) = -\sin x$ *ve* $\cos(-x) = \cos x$.
iv. $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ *ve* $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$.
v. $\sin(x + \pi/2) = \sin x$ *ve* $\cos(x + \pi/2) = \cos x$.
vi. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ *ve*
$\sin(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$.
vii. $\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$ *ve*

$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

viii. $[0, \pi/2]$ *kapalı aralığında* sin *mutlak artan*, cos *mutlak azalandır.*

Kanıt: i. (C)'de $y = x$ alalım ve (B)'deki

$$\cos 0 = 1$$

eşitliğini kullanalım.

ii. Yukarda kanıtlanan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eşitliğinde $x = 0$ alınırsa, (B)'deki $\cos 0 = 1$ eşitliği sayesinde $\sin 0 = 0$ bulunur. Diğer eşitlikler de benzer şekilde elde edilir.

iii. (C)'de $y = 0$ alırsak $\cos(-x) = \cos x$ buluruz. Aynı formülde $y = \pi/2$ alırsak,

$$\cos(\pi/2 - x) = \cos x \cos \pi/2 + \sin x \sin \pi/2 = \sin x$$

buluruz ve buradan da, gene (C)'yi kullanarak,

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= \cos(\pi/2 + x) = \cos(\pi - (\pi/2 - x))\\ &= \cos(\pi/2 - x)\cos \pi + \sin(\pi/2 - x)\sin \pi\\ &= -\cos(\pi/2 - x) = -\sin x\end{aligned}$$

bulunur.

iv. Yukarda $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$ formülünü kanıtlamıştık. Bu formülde x yerine $\pi/2 + x$ alalım:

$$\cos x = \cos(-x) = \cos(\pi/2 - (\pi/2 + x)) = \sin(\pi/2 + x)$$

buluruz. Diğer formül de şöyle çıkar:

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2 + x) &= \cos(\pi/2 - (-x))\\ &= \cos(-x)\cos(\pi/2) + \sin(-x)\sin(\pi/2)\\ &= \cos x \cos(\pi/2) - \sin x \sin(\pi/2)\\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

v. $2\pi = \pi/2 + \pi/2 + \pi/2 + \pi/2$ eşitliğini kullanarak, yukarda bulunan formülü üç defa uygulayarsak, periyodun 2π olduğu kolaylıkla kanıtlanabilir.

vi. cos ile ilgili formül kolay, bunun için (C)'de x yerine $-x$ almak yeterli. sin için ise bunu ve (iv)'te kanıtlananı kullanmak yeterli:

$\sin(x + y) = -\cos(x + y + \pi/2)$
$= -\cos x \cos(y + \pi/2) + \sin x \sin(y + \pi/2)$
$= \cos x \sin y + \sin x \cos y.$

vii. Yukarda

$$\sin(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$$

formülünü kanıtladık. Burada y yerine $-y$ alırsak,

$$\sin(x - y) = -\cos x \sin y + \sin x \cos y$$

formülünü elde ederiz. İkincisini birincisinden çıkararak,

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2\cos x \sin y$$

bulunur. Şimdi

$$x = \frac{a+b}{2} \text{ ve } y = \frac{a-b}{2}$$

alırsak istediğimize ulaşırız. İkinci eşitlik benzer şeyi cos ile yaparak elde edilir.

viii. (D)'den sin ve cos fonksiyonlarının $(0, \pi/2)$ aralığında pozitif olduğu anlaşılıyor. Eğer şimdi

$$0 < y < x < \pi/2$$

ise, $(x + y)/2$ ve $(x - y)/2$ sayıları gene $(0, \pi/2)$ aralığındadır, dolayısıyla sinüs ve kosinüsleri pozitiftir. (v)'te kanıtladığımızdan

$$\sin x > \sin y \text{ ve } \cos x < \cos y$$

çıkar. □

3. Trigonometrik Fonksiyonların İntegrali

Yukardaki teoremin (iv) ve (viii)'inci kısımlarından sin ve cos fonksiyonlarının integrallenebilir olduğu çıkar. Bu fonksiyonun integrallerini elbette Kalkülüsün Temel Teoremi'ni kullanarak bulabiliriz: $\sin' = \cos$ ve $\cos' = -\sin$ olduğundan,

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C \quad \text{ve} \quad \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

olur. Ama biz bunu sofistike matematik kullanmadan, sadece (A, B, C, D) özelliklerini kullanarak kanıtlamak istiyoruz. Bunun için birkaç önermeye ihtiyacımız var:

Önsav 2. *Her x gerçel sayısı ve her pozitif n doğal sayısı için,*

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{x}{2}$$

olur.

Kanıt: Teorem 1.vii'ye göre, her k için,

$$2\sin\frac{x}{2}\cos kx = \sin\frac{2k+1}{2}x - \sin\frac{2k-1}{2}x$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlikleri $k = 1, 2, ..., n$ için altalta yazıp toplayalım:

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{x}{2}\cos x &= \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\\
2\sin\frac{x}{2}\cos 2x &= \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\\
2\sin\frac{x}{2}\cos 3x &= \sin\frac{7x}{2} - \sin\frac{5x}{2}\\
&\dots\\
2\sin\frac{x}{2}\cos nx &= \sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{2n-1}{2}x
\end{aligned}$$

Sağ taraftaki sadeleşmelerden sonra, istediğimizi elde ederiz. □

Önsav 3. *n pozitif bir doğal sayı ve $0 < 2n\theta \le \pi/2$ ise*

$$\sin(2n+1)\theta = \sin\theta < \frac{\sin\theta}{\theta}\sin 2n\theta < \sin(2n-1)\theta + \sin\theta$$

olur.

Kanıt: Teorem 1.vi'ya göre,

$$\sin(2n + 1)\theta = \sin 2n\theta \cos\theta + \cos 2n\theta \sin\theta.$$

Ayrıca (D)'den dolayı, $0 < 2n\theta \le \pi/2$ için,

$$\begin{aligned}
\sin(2n+1)\theta &= \sin 2n\theta\cos\theta + \cos 2n\theta \sin\theta\\
&< \sin 2n\theta\frac{\sin\theta}{\theta} + \sin\theta.
\end{aligned}$$

Bu da soldaki eşitsizliği kanıtlar. Sağdaki eşitsizliği kanıtlayalım:

$$\sin(2n - 1)\theta = \sin 2n\theta \cos\theta - \cos 2n\theta \sin\theta.$$

Her iki tarafa da $\sin\theta$ ekleyelim:

$$\sin(2n-1)\theta + \sin\theta = \sin 2n\theta\left(\cos\theta + \sin\theta\frac{1-\cos 2n\theta}{\sin 2n\theta}\right).$$

Öte yandan,

$$\frac{1-\cos 2n\theta}{\sin 2n\theta} = \frac{2\sin^2 n\theta}{2\sin n\theta\cos n\theta} = \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}.$$

Demek ki,

$$\begin{aligned}
\sin(2n-1)\theta + \sin\theta &= \sin 2n\theta\left(\cos\theta + \sin\theta\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}\right)\\
&= \sin 2n\theta\frac{\cos\theta\cos n\theta + \sin\theta\sin n\theta}{\cos n\theta}\\
&= \sin 2n\theta\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta}.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla sağdaki eşitsizliği kanıtlamak için,

$$\frac{\sin\theta}{\theta} < \frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta}$$

eşitsizliğini kanıtlamak gerekiyor. Bunu kanıtlamak için Teorem 1.vi'yı ve (D)'yi kullanacağız:

$$\begin{aligned}
\cos n\theta &= \cos(n-1)\theta\cos\theta - \sin(n-1)\theta\sin\theta\\
&< \cos(n-1)\theta\cos\theta < \cos(n-1)\theta\frac{\theta}{\sin\theta}.
\end{aligned}$$

Bu da istediğimizi verir. □

Önsav 4. *Eğer* $0 < a < \pi/2$ ve *n pozitif bir doğal sayıysa,*

$$\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n} < \sin a < \frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{ka}{n}$$

olur.

Kanıt: $x = a/n$ olsun. x, 2π'nin bir katı olmadığından, Önsav 2'deki eşitliğin her iki tarafını da $2\sin(x/2)$'ye bölerek,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{1}$$

elde ederiz. Önsav 3'teki eşitsizliklerin sol kısmında $\theta = x/2$ alarak,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$< \frac{\sin(nx)}{x} = \frac{\sin a}{a/n}$$

buluruz. Bu da kanıtlamak istediğimiz eşitsizliklerin en soldaki kısmı.

Eşitsizliğin sağını kanıtlamak için, (1)'de n yerine $n-1$ alalım ve her iki tarafa da 1 ekleyelim:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos kx = \frac{\sin\frac{2n-1}{2}x + \sin\frac{x}{2}}{2\sin(x/2)} \tag{2}$$

elde ederiz. Demek ki $0 < a < \pi/2$ için $x = a/n$ alırsak, kanıtlamamız gereken eşitsizlik,

$$\sin nx < x\,\frac{\sin\frac{2n-1}{2}x + \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

eşitsizliğine dönüşür. $\sin(x/2) > 0$ olduğundan, bu son eşitsizlikler de,

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\sin nx < \sin\frac{2n-1}{x}x + \sin\frac{x}{2}$$

eşitsizliğine denktir. Ama bu da aynen $\theta = x/2$ için Önsav 3. □

Teorem 5. *Her a gerçel sayısı için,*

$$\int_0^a \cos x\,dx = \sin a$$

ve

$$\int_0^a \sin x\,dx = 1 - \cos a$$

olur.

Kanıt: Önce birinci eşitliği kanıtlayalım.

$$0 < a < \pi/2$$

olsun. Monotonluktan dolayı (sayfa 46, Sonuç 7),

$$\int_0^a \cos x\,dx = \frac{a}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\left(i\frac{a}{n}\right)$$

olur. Önsav 4'e göre bu limit de $\sin a$'dır. Demek ki,

$$\int_0^a \cos x\,dx = \sin a.$$

Eğer $a \in (0, \pi/2)$ değilse, eşitliğin kanıtını okura bırakıyoruz.

Şimdi sin fonksiyonunun integralini hesaplayalım. Önce şu hesabı yapalım:

$$\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \int_{-\pi/2}^{0}\sin(x+\pi/2)\,dx = \int_{-\pi/2}^{0}\cos x\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos(-x)\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx$$

$$= \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Bundan da, Sayfa 40-41'deki Teorem 3f'yi kullanarak,

$$\int_0^a \sin x\,dx = \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx + \int_{\pi/2}^{a}\sin x\,dx$$

$$= 1 + \int_{\pi/2}^{a}\sin x\,dx = 1 + \int_0^{a-\pi/2}\sin(x+\pi/2)\,dx$$

$$= 1 + \int_0^{a-\pi/2}\cos x\,dx = 1 + \sin(a-\pi/2) = 1 - \cos a$$

buluruz. □

Buradan,

$$\int_a^b \cos x\,dx = \int_0^b \cos x\,dx - \int_0^a \cos x\,dx$$

$$= \sin b - \sin a = \sin x\Big|_a^b$$

çıkar, yani

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

olur. Benzer şekilde

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

çıkar. Ve elbette

$$\sin x = \int_0^x \cos t\,dt$$

ve dolayısıyla $\sin x$ fonksiyonu türevlenebilir ve türevi $\cos x$'tir. Benzer şekilde

$$\cos' = -\sin$$

bulunur. ♥

Kaynakça:
Tom M. Apostol, **Calculus**, birinci cilt, Bölüm 2.5-2.7, John Wiley & Sons, ikinci basım, 1967.