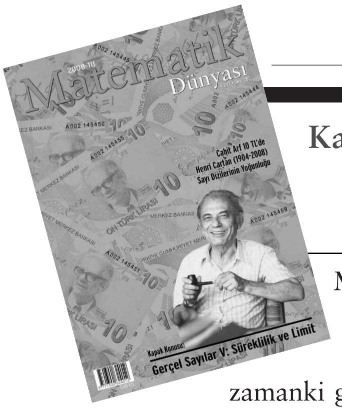
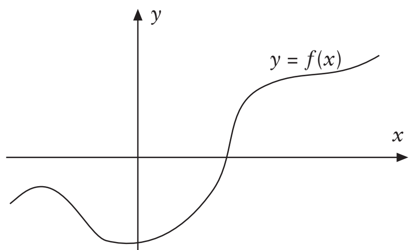


Kapak Konusu: Gerçel Sayılar V: Süreklilik ve Limit

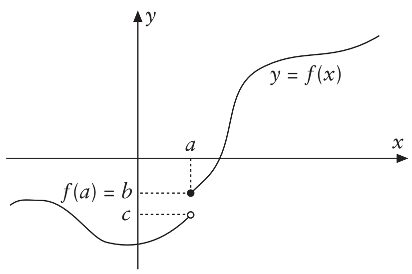
Süreklilik

Matematiğin en önemli ve en temel konularından birine geldik: Süreklilik. Her zamanki gibi önce kavramın sezgisel anlamını açıklayalım.

Bazı fonksiyonların grafiğinde kopukluk yoktur, bazılarında ise tam tersine kopukluk vardır.



Grafiğinde kopukluk olmayan bir fonksiyon



Grafiğinde a noktasında kopukluk olan bir fonksiyon

Birinci örnekte kopukluk yokken ikinci örnekte a noktasında bir kopukluk, ani bir sıçrama var.

Matematiksel tanımı birazdan vereceğiz, ama şimdilik sezgi kazandırmak amacıyla söyleyelim: Birinci örnekteki gibi fonksiyonlara ***sürekli*** denir. İkinci örnekteki fonksiyon ise a noktasında ***süreksizdir***, orada bir kopukluk, bir sıçrama vardır.

İnsanlar süreklilikten daha çok hoşlanırlar. Süreklilik olağan durumdur, anlaşılması, başa çıkması daha kolaydır. Deprem gibi, uçurumdan yuvarlanmak gibi, basınç düşmesi gibi, olağan koşulların sürekliliğinin bozulduğu durumlar ölümcül olabilir.

Atomun varlığı kanıtlandığından beri maddenin sürekli olmadığını, aslında varlıktan çok yokluk olduğunu biliyoruz. Öte yandan makroskopik düzeyde maddenin sürekli olduğunu varsaymak - bu varsayım yanlış da olsa - maddeyi (ve hareketini) algılamamızda kolaylık sağlar.

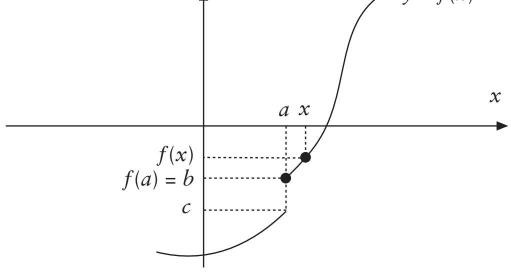
Her ne kadar saniye, dakika, gün ve hafta gibi parçalara ayırsak da, zamanın da sürekli olduğunu varsayarız. Örneğin, insan duyularıyla algılanmayacak bir süre için bir elmanın kaybolup tekrar var olabileceği, hatta tüm evrenin donup tekrar harekete geçeceği varsayımı bize pek inandırıcı gelmez. Ama neden olmasın!

Velhasılı kelam, evren sürekli de süreksiz de olsa, sürekliyi anlamak daha kolaydır. (MD-2007-IV, sayfa 34'te işlediğimiz bileşik faizler konusunda bu dediğimizi destekleyen çarpıcı bir delil göstermiştik.)

Sezgisel olarak kolayca algılanabilen süreklilik/süreksizlik kavramını matematikselleştirmek pek o kadar kolay olmamıştır. Sürekliliğin doğru düzgün matematiksel bir tanımını vermek 19'uncu yüzyılda Cauchy'ye nasip olmuştur. Tam matematiksel tanımı sunmadan önce sezgilerimize biraz daha matematiksel bir biçim vermeye çalışalım.

"Süreksiz" diye nitelendirdiğimiz ikinci fonksiyona dikkatlice bakalım. Belli ki sorun a noktasında. Bu noktada fonksiyon b değerini alıyor. Peki a çok az değiştiğinde fonksiyonun aldığı değer ne oluyor?

Eğer x, a'nın sağında (yani a'dan daha büyük) ama a'ya çok yakınsa, $f(x)$, $f(a)$'nın, yani b'nin çok yakınındadır. Hatta x'i a'nın sağında ve x'e çok çok yakın alarak, $f(x)$ değerini $f(a)$'ya dilediğimiz kadar yaklaştırabiliriz. x, a'ya sağdan ne kadar yakın olursa, şekilden de anlaşılacağı üzere, $f(x)$ değeri $f(a)$'ya o kadar yakın olur.

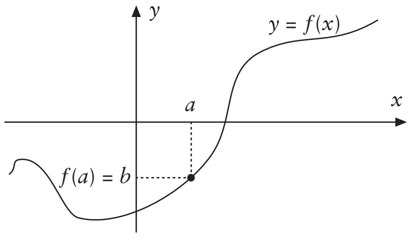


Öte yandan a'ya sol taraftan yaklaştığımızda, fonksiyonun değerleri $f(a)$'ya, yani b'ye değil, b'den uzakta olan c'ye çok yaklaşırlar; a'ya soldan istediğimiz kadar sokulalım, fonksiyonun değerleri b'ye çok çok yaklaşamazlar.

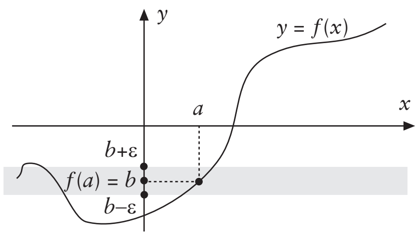
İlk fonksiyonda böyle bir sorun olmaz. x yavaş yavaş değiştiğinde, $f(x)$ de yavaş yavaş değişir. İkinci fonksiyonda ise x, a'nın solundan sağına ya da sağından soluna geçerken bir sıçrama yaşanır.

Sürekliliğin matematiksel tanımını vermenin zamanı geldi.

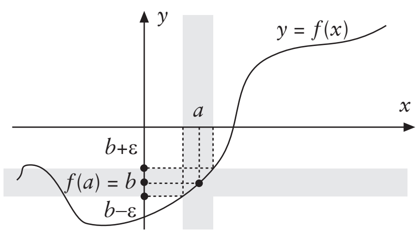
A, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f'nin a noktasında sürekli olmasının matematiksel anlamını vereceğiz. $b = f(a)$ olsun. Aşağıdaki şekilden takip edelim.



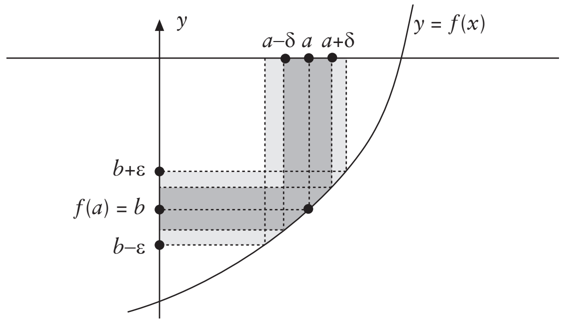
Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. ε'u çok çok küçük (ama pozitif) bir sayı olarak algılayalım. Ve y ekseninde $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ aralığına ve o aralığın belirlediği yatay şerite bakalım.



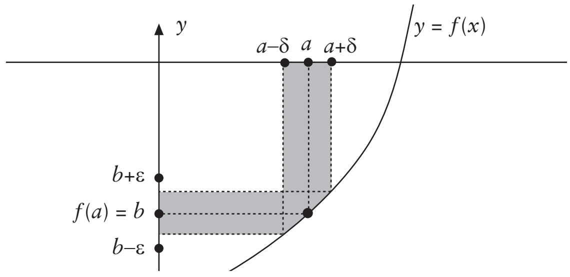
Bu şerit fonksiyonun grafiğini çeşitli yerlerden keser ve bu kesişimler a'nın civarında bir bölge belirlerler.



a civarında grafiğe daha yakından bakalım:



Öyle bir $\delta > 0$ var ki, $(a - \delta, a + \delta)$ aralığının f altında imgesi $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ aralığının içine düşer. Sadeleştirilmiş şekil aşağıda:



İşte "a'da sürekliliğin" tanımı aynen bunu ifade edecek, tek bir farkla ki

$(a - \delta, a + \delta)$ aralığının f altında imgesi $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ aralığının içine düşer

yerine

$(a - \delta, a + \delta) \cap A$ kümesinin f altında imgesi $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ aralığının içine düşer

demeliyiz çünkü f fonksiyonu $(a - \delta, a + \delta)$ aralığının tüm noktalarında tanımlı olmayabilir.

Matematiksel tanımı salalım:

Tanım. A, *$\mathbb{R}$'nin bir altkümesi,* $f : A \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon ve* $a \in A$ *olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için,*

$$f((a - \delta, a + \delta) \cap A) \subseteq (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$$

ilişkisini sağlayan bir $\delta > 0$ *varsa,* f *fonksiyonuna* ***a'da sürekli*** *denir.*

Aynı tanımı kümelerle (ya da aralıklarla) değil de elemanlarla ifade edebiliriz:

Tanım. A, *$\mathbb{R}$'nin bir altkümesi,* $f : A \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon ve* $a \in A$ *olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için, A'nın*

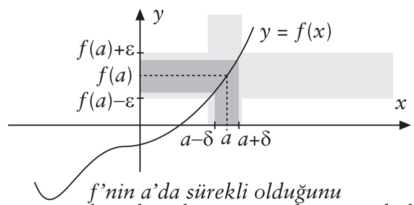
$$|x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan her x elemanının

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini de sağlamak zorunda olduğu bir $\delta > 0$ *varsa, o zaman* f *fonksiyonuna* ***a'da sürekli*** *denir.*

İki tanım arasında bir ayrım olmadığına okur ikna olmalıdır; bir ipucu verelim: $|x - a| < \delta$ koşuluyla $x \in (a - \delta, a + \delta)$ koşulu arasında bir ayrım yoktur.



f'nin a'da sürekli olduğunu kanıtlamak için: ε verilmiş, δ'yı bul

Yukardaki tanımı biraz daha açalım. Verilmiş bir $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ elemanında sürekli olması için her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ olmalı ki, her $x \in A$ için,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (*)$$

olsun.

Tanımı çerçeveleyelim ki sürekli gözümüzün önünde bulunsun:

Tanım kümesinin her noktasında sürekli olan bir fonksiyona ***sürekli*** fonksiyon denir.

> *Bir $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında **sürekli** olması için,*
> *her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ olmalı ki,*
> *her $x \in A$ için,*
> $$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (*)$$
> *olsun.*

Tanımı tartalım tartışalım.

Her şeyden önce, tüm uyarılara karşın nerdeyse her öğrencinin kaçınılmaz olarak yaptığı ve muhtemelen bu uyarıdan sonra da yapacağı bir yanlıştan sözedelim. Fonksiyonun a'da sürekli olduğunu kanıtlamak için, verilen her $\varepsilon > 0$ için $(*)$ koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ bulmalıyız. Bu δ sayısı ε'a ve a'ya göre değişebilir ama x'ten bağımsızdır. Tekrar edelim: f fonksiyonu, $a \in X$ noktası ve $\varepsilon > 0$ sayısı veriliyor ve $(*)$ koşulunu **her** $x \in A$ için sağlandığı x'ten **bağımsız** bir $\delta > 0$ aranıyor. Bu nokta kesinlikle gözden kaçmamalı.

Tanımı daha simgesel olarak yazmak yararlı olabilir:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ (|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Tanımı tartışmaya devam edelim.

Eğer verilmiş bir $\varepsilon > 0$ için, bir $\delta > 0$ sayısı $(*)$ koşulunu sağlıyorsa, δ'dan küçük pozitif δ_1'ler de $(*)$ koşulunu aynı ε için sağlarlar. Yani verilmiş bir ε için $(*)$ koşulunu sağlayan tek bir δ yoktur ve eğer $(*)$ koşulunu sağlayan bir δ varsa, istersek ve içimizden öyle geçiyorsa ya da gerekliyse, δ'yı 1'den, 1/2'den, 1/100'den ve istediğimiz herhangi pozitif bir sayıdan küçük seçebiliriz.

Gene de bulunacak δ'nın verilen ε'a göre değiştiğini belirtelim: Genelde, ε küçüldükçe, δ da küçülmek zorundadır. Nitekim eğer (δ, ε) çifti $(*)$ koşulunu sağlıyorsa ve eğer $\varepsilon_1 < \varepsilon$ ise, o zaman (δ, ε_1) çifti $(*)$ koşulunu sağlamayabilir, çünkü bunun için δ yeterince küçük olmayabilir, δ'yı daha da küçük seçmek zorunda kalabiliriz. Bu yüzden bazen δ yerine δ_ε yazmak yerinde olabilir. Hatta δ, a'ya göre de değişebileceğinden, δ yerine $\delta_{a,\varepsilon}$ da yazılabilir.

Bir $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında sürekli olduğunu kanıtlamak için, önce herhangi bir pozitif ε sayısı seçilir. Sonra, $x \in A$ için,

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için x'in a'ya ne kadar yakın olması gerektiği araştırılır. Bunun için, genellikle,

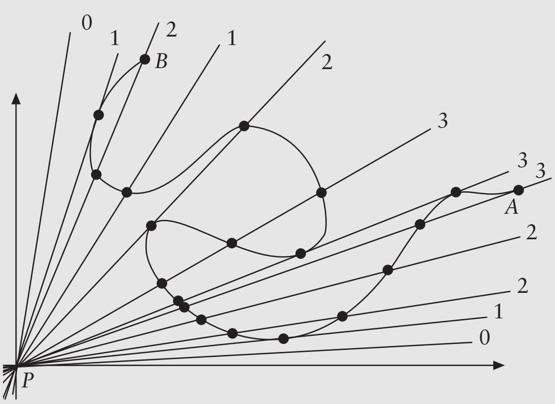
$$|f(x) - f(a)|$$

ifadesiyle oynanır. Amaç, bu ifadeyle oynayarak, ifadeyi, bir biçimde, içinde $|x - a|$ bulunan bir ifadeden daha küçük olarak ifade etmektir. Bilmem kendimizi iyi ifade edebildik mi?

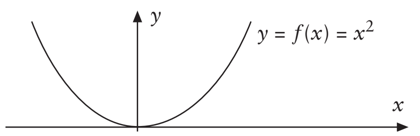
Öğretici olması açısından çok basit olmayan, ama gene de çok çok zor olmayan örnekler sunmadan önce a noktasının tanım kümesinde olmak zorunda olduğunu anımsatalım (yoksa $f(a)$'dan sözedemeyiz bile!)

Örnek 1. *$f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden f fonksiyonu süreklidir.* (*Burada $A = \mathbb{R}$.*)

Doğal ama Süreksiz Bir Fonksiyon



Düzlemde güzel (yani sürekli) bir eğri ve bir de bir P noktası alalım. P'den geçen doğrular eğriyi bazı noktalarda keser. $f(\alpha)$, yatay doğruyla α derecelik bir açı yapan doğrunun eğriyi kestiği nokta sayısı olsun. Örneğin $f(0) = f(90) = 0$. Doğrular P civarında yavaş yavaş döndüğünde, f sıçramalar yapar. Bu sıçramalar genellikle doğrunun eğriye teğet olduğu açılarda meydana gelir. Burada, doğal biçimde tanımlanmış ama sürekli olmayan bir fonksiyon sözkonusu.



Kanıt: $a \in \mathbb{R}$ olsun. Rastgele bir pozitif ε sayısı seçelim. ε sayısını çok küçük bir sayı olarak algılayalım. Şimdi, $x \in A$ için,

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için x'in a'ya ne kadar yakın olması gerektiğini araştıralım; bakalım x'in a'ya belli bir $\delta > 0$ mesafesinden daha yakın olması bu eşitsizliğin sağlanması için yeterli oluyor mu, böyle bir δ var mı? Bunun için

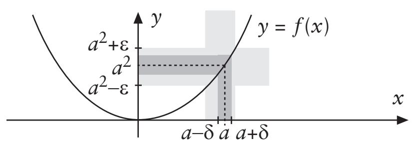
$$|f(x) - f(a)|$$

ifadesiyle oynayacağız. Oynayalım:

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|.$$

Oynadık. En sağdaki $|x - a|$ ifadesi hoşumuza gidiyor, çünkü x'i $|x - a|$ çok küçük olacak şekilde seçersek, $|x - a||x + a|$ ifadesinin de çok küçük olma (ε'dan küçük olma) ihtimali var ve bizim de istediğimiz tam bu. Ama eğer $|x + a|$ çok artarsa, o zaman $|x - a||x + a|$ ifadesini istediğimiz kadar küçültemeyebiliriz. Demek ki $|x + a|$ ifadesinin çok artmadığını, belli bir sayı tarafından üstten sınırlandığını kanıtlamalıyız. Eğer x herhangi bir gerçel sayıysa, bu doğru değil elbet, ama x'i a'ya yakın seçeceğimizi unutmayalım. Eğer x'in a'ya mesafesi ilelebet artmıyorsa, $|x + a|$ ifadesi de zaptedilemez bir biçimde artamaz.

$|x + a|$ ifadesini üstten sınırlamak için, - ilerde bu sözü tutmak üzere - bulacağımız δ'yı 1'den küçük alacağımız sözünü verelim. (Yukardaki şekil böyle bir seçim yapabileceğimizi açıklamaya çalışıyor.) O zaman, x'i,



ε verilmiş, δ'yı bulmalıyız. Eğer öyle bir δ varsa, aynı özelliği sağlayan 1'den küçük bir δ vardır. δ'yı 1'den küçük bulmaya çalışabiliriz.

$$|x - a| < \delta \le 1$$

olacak biçimde seçmiş olacağız ve bu seçimle,

$$-1 < x - a < 1,$$

ya da

$$a - 1 < x < a + 1,$$

yani

$$2a - 1 < x + a < 2a + 1$$

olur; böylece, eğer $A = \max\{|2a - 1|, |2a + 1|\}$ ise,

$$|x + a| < A$$

eşitsizliğine ulaşmış oluruz. Başladığımız hesaba bu eşitsizlik ışığında devam edelim:

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a| < |x - a|A.$$

Demek ki $|f(x) - f(a)|$ ifadesinin ε'dan küçük olması için $|x - a|A$ ifadesinin ε'dan küçük olması yeterli. Dolayısıyla $|x - a|$'yı ε/A'dan küçük seçersek işimiz iş. Ama bir dakika! $|x - a|$'nın sadece ε/A'dan küçük olması yetmez, 1'den de küçük olmalı. Yani eğer

$$\delta = \min\{\varepsilon/A, 1\}$$

olarak seçersek, o zaman $|x - a| < \delta$ eşitsizliğinden

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

eşitsizliği çıkar.

Bu kanıtı toparlayıp vasat bir kitapta yazıldığı biçimiyle gösterelim:

$\varepsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun.

$$A = \max\{|2a - 1|, |2a + 1|\}$$

olsun. Tanımdan dolayı $A > 0$ olur. Ve

$$\delta = \min\{\varepsilon/A, 1\}$$

olsun. δ, elbette pozitif bir sayı. Ve son olarak, x,

$$|x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlasın. Bundan, sırasıyla,

$$-\delta < x - a < \delta,$$
$$-\delta + a < x < \delta + a,$$
$$-1 + a < x < 1 + a,$$
$$-1 + 2a < x + a < 1 + 2a,$$
$$|x + a| < \max\{-1 + 2a, 1 + 2a\} = A$$

eşitsizlikleri çıkar. Bu hesapları $|x + a|$'yı sınırlamak için yaptık:

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$$
$$< |x - a|A < \delta A \le (\varepsilon/A)A = \varepsilon$$

buluruz, tam istediğimiz gibi. □

Kanıtın çok çok kolay olmadığı doğru ama işte matematik böyle bir şey.

Alıştırmalar.

1. $f(x) = x^2 + 3x - 7$ kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden f fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın.

2. $f(x) = x^3$ kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden f fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın.

Sürekli olmayan bir fonksiyon örneği verelim. Verelim ama önce bir noktada sürekli olmamanın ne demek olduğunu daha yakından irdeleyelim. Bir iki sayfa yukarda, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında sürekli olması için,

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A\ (|x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon).$
önermesinin doğru olması gerektiğini söylemiştik. Bu önermenin tam tersini, yani zıddını yazalım. Bunun için basit mantık kullanacağız. Yukardaki önermenin zıddı,
$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in A\ (|x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)$
önermesidir. Yani bir $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında sürekli olmaması için öyle bir $\varepsilon > 0$ sayısı olmalıdır ki, hangi $\delta > 0$ sayısı alınırsa alınsın, $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan ama

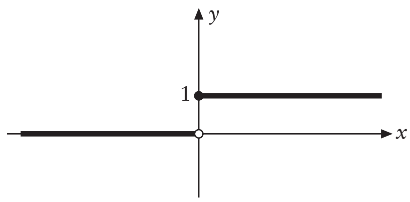
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlamayan bir $x \in A$ noktası olmalıdır.

Örneklerle her şeyin daha açık olacağından kuşkumuz yok! Belki sosyoloji kitapları dışında hemen her kitapta bulunan standart bir örnek verelim.

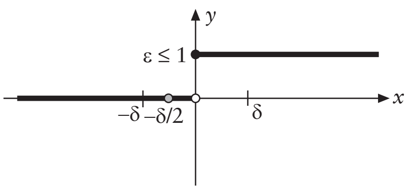
Örnek 2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{eğer } x \geq 0 \textit{ ise} \\ 0 & \textit{eğer } x < 0 \textit{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu sürekli değildir.



f, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye gider ve grafiği şöyledir:

Grafikten de anlaşılacağı üzere, bu fonksiyon 0 dışında her noktada süreklidir, sadece 0 noktasında süreksizdir. Bu söylediklerimizi matematiksel olarak kanıtlayalım.



1. *Fonksiyon $a = 0$ noktasında sürekli değildir.*

(*) koşulunun hiçbir $\delta > 0$ için doğru olmadığı bir $\varepsilon > 0$ bulmak gerekiyor. Bir sonraki şekilden takip edin. $\varepsilon = 1$ olsun. Şimdi $\delta > 0$ ne olursa olsun (daha doğrusu, ne kadar küçük olursa olsun), $x = -\delta/2$ alırsak,

$$|x - a| = |-\delta/2 - 0| = |-\delta/2| = \delta/2 < \delta$$

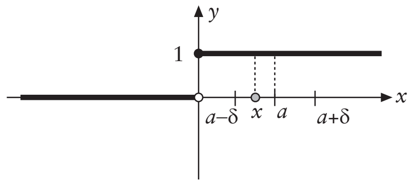
olur ama

$|f(x) - f(a)| = |f(-\delta/2) - f(0)| = |0 - 1| = 1 \geq 1 = \varepsilon$

olur, yani $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ eşitsizliği doğru olmaz.

Aynı sonucu $\varepsilon = 1/2$, ya da herhangi bir $\varepsilon > 0$ alarak da bulabilirdik tabii, yeter ki $\varepsilon \leq 1$ olsun.

2. *Eğer $a \neq 0$ ise fonksiyon a noktasında süreklidir.*



$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. (*) koşulunun bir $\delta > 0$ tarafından sağlandığını göstermemiz gerekiyor. $\delta = |a|/2$ olsun. x,

$$|x - a| < \delta$$

koşulunu sağlasın. O zaman,

$$-|a|/2 = -\delta < x - a < \delta = |a|/2,$$

yani

$$a - |a|/2 < x < a + |a|/2$$

olur. Bundan, eğer $a < 0$ ise, $x < a + |a|/2 = a/2 < 0$, ve $a > 0$ ise, $0 < a/2 = a - |a|/2 < x$ bulunur. Yani a ile x'in işaretleri aynıdır, biri pozitifse diğeri de pozitif, biri negatifse diğeri de negatif olur. Dolayısıyla $f(x) = f(a)$ olur, yani

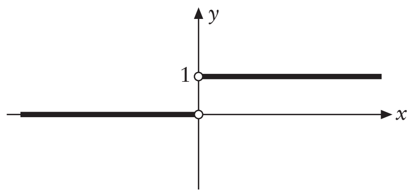
$$|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$$

olur. İstediğimiz kanıtlanmıştır.

Bir önceki örneği hafifçe değiştireceğiz, fonksiyonun kuralı aynı olacak ama tanım kümesi bu sefer $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ olacak.

Örnek 3. $f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{eğer } x > 0 \textit{ ise} \\ 0 & \textit{eğer } x < 0 \textit{ ise} \end{cases}$

olsun. f fonksiyonu süreklidir.



Kanıtı aynen bir önceki kanıt gibidir, ama tabii a'yı bu sefer 0 seçemeyiz, çünkü fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$'dır. f, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$'dan $\mathbb{R}$'ye gider.

Şimdi ilk bakışta şaşırtıcı, ikinci bakışta doğal gelebilecek bir sonuç kanıtlayalım.

Örnek 4. *$\mathbb{Z}$'den $\mathbb{R}$'ye giden herhangi bir fonksiyon süreklidir.*

Kanıt: $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. Burada $A = \mathbb{Z}$'dir. $a \in \mathbb{Z}$, herhangi bir tamsayı olsun. Ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. δ'yı $0 < \delta \leq 1$ eşitsizliklerini sağlayan herhangi bir sayı olarak seçelim, örneğin $\delta = 1/2$ olsun. O zaman eğer $x \in \mathbb{Z}$ ise ve x,

$$|x - a| < \delta$$

koşulunu sağlıyorsa, $x = a$ olmak zorundadır çünkü iki değişik tamsayı arasındaki fark 1'den küçük olamaz. Demek ki, bu durumda,

$$|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$$

olur. İstediğimiz bir kez daha kanıtlanmıştır.

Yukardaki örnekteki fonksiyonu her noktada sürekli kılan, değişik tamsayılar arasındaki mesafenin 1'den küçük olamayacağıdır. Daha doğrusu, her tamsayının belli bir "komşuluğu"nda bir başka tamsayının bulunamayacağıdır. Bu fikri aşağıdaki alıştırmada sömüreceğiz.

Alıştırmalar

1. $A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ olsun. $f : A \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olduğunu kanıtlayın.

2. A, yukardaki gibi olsun. $B = A \cup \{0\}$ olsun. $f : B \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. f'nin 0'da sürekli olması için, $\lim_{n\to\infty} f(1/n) = f(0)$ eşitliğinin yeter ve gerekli olduğunu kanıtlayın.

3. A, $\mathbb{R}$'nin ***ayrık*** bir altkümesi olsun, yani her $a \in A$ için, $(a - \delta, a + \delta) \cap A = \{a\}$ eşitliğini sağlayan bir $\delta > 0$ olsun. (Burada δ, a'ya göre değişebilir.) A'dan $\mathbb{R}$'ye giden her fonksiyonun sürekli olduğunu kanıtlayın.

4. A, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olsun. $a \in A$, A'dan ***ayrık*** bir eleman olsun, yani $(a - \alpha, a + \alpha) \cap A = \{a\}$ eşitliğini sağlayan bir $\alpha > 0$ olsun. A'dan $\mathbb{R}$'ye giden her fonksiyonun a'da sürekli olduğunu kanıtlayın.

5. $f(x) = [x]$ (= x'in tamkısmı, bkz. MD-2007-III, sayfa 26, Teorem 6). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu hangi noktalarda sürekli değildir?

6. $\mathbb{R}$'nin sonlu bir kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden her fonksiyonun sürekli olduğunu kanıtlayın.

7. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden sürekli bir fonksiyonun sabit olması gerektiğini kanıtlayın.

8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun ama imgesi sonlu olsun. f'nin sabit bir fonksiyon olduğunu kanıtlayın.

9*. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{Q}$'ya giden her sürekli fonksiyonun sabit olduğunu kanıtlayın.

10*. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden her sürekli ve birebir fonksiyonun tersinin de sürekli olduğunu kanıtlayın.

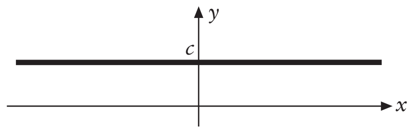
Bir başka klasik örnekle yazımıza devam edelim:

Örnek 5. $f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{eğer } x \in \mathbb{Q} \textit{ ise} \\ 0 & \textit{eğer } x \notin \mathbb{Q} \textit{ ise} \end{cases}$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}$*'nin hiçbir noktasında sürekli değildir.*

Bu fonksiyon nasıl sürekli olsun ki, fonksiyon zırt pırt 0 ve 1 değerlerini alıyor! Biçimsel kanıtı okura bırakıyoruz. Bir ipucu verelim $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kümelerinin her ikisi de $\mathbb{R}$'de yoğundurlar, yani boşküme olmayan herhangi bir açık aralıkta hem kesirli hem de kesirli olmayan sayılar vardır.

Kolay (hatta bu aşamada biraz fazla kolay) ama önemli iki örnek geliyor son olarak:

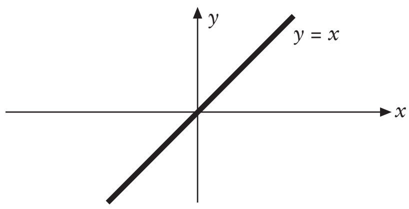
Örnek 6. *Sabit bir fonksiyon süreklidir.*



Sabit c fonksiyonunun grafiği kesintisizdir, dolayısıyla bu fonksiyon her noktada süreklidir.

Kanıt: f sabit bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ ne olursa olsunlar, hep $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ olur. Demek ki f süreklidir.

Örnek 7. *Özdeşlik fonksiyonu süreklidir.*



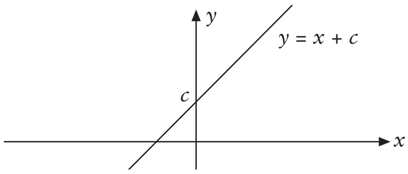
Özdeşlik fonksiyonu $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$'nin *grafiği çapraz doğrudur ve her doğru gibi bu grafik kesintisizdir. Dolayısıyla, sezgisel bir bakış açısıyla,* $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ *fonksiyonu her noktada sürekli olmalıdır.*

Kanıt: Özdeşlik fonksiyonunun $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x) = x$ kuralıyla tanımlanmış $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu olduğunu anımsatırız. $a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $\delta = \varepsilon > 0$ alalım. O zaman $|x - a| < \delta$ koşulunu sağlayan her $a \in \mathbb{R}$ için,

$$|\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$$

olur; bu da istediğimizi kanıtlar.

Örnek 8. *Her* $c \in \mathbb{R}$ *için,* $x \mapsto cx$ *ve* $x \mapsto c + x$ *sürekli fonksiyonlardır.*



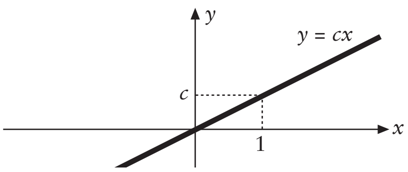
Kanıt: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x + c$ formülüyle tanımlanmış olsun. f'nin her noktada sürekli olduğunu kanıtlayalım. $a \in \mathbb{R}$, herhangi bir gerçel sayı olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. $\delta = \varepsilon$ alalım. O zaman, $|x - a| < \delta$ ise,

$$|f(x) - f(a)| = |(x + c) - (a + c)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla f fonksiyonu a noktasında süreklidir.

Çarpmaya geçmeden önce ilerde çok önemli olacak bir noktaya parmak basalım. Genellikle, bulunan δ sayısı a ve ε sayılarına göre değişir. δ'nın ε'dan bağımsız olması nerdeyse imkânsızdır da yukardaki son üç örnekte olduğu gibi δ, a'dan bağımsız olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda çok güçlü bir süreklilik sözkonusudur ve buna ***düzgün süreklilik*** adı verilir. Analizin çok önemli bir kavramı olan düzgün sürekliliğe ilerde sık sık değineceğiz.

Çarpmaya gelelim. $c \in \mathbb{R}$ olsun. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = cx$ formülüyle tanımlanmış olsun. f'nin her noktada sürekli olduğunu kanıtlayalım. Eğer $c = 0$ ise, sabit 0 fonksiyonunu elde ederiz ve bu fonksiyonun (düzgün) sürekli olduğunu Örnek 6'dan biliyoruz. Bundan böyle $c \neq 0$ varsayımını yapalım. $a \in \mathbb{R}$, herhangi bir gerçel



sayı olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. $\delta = \varepsilon/|c|$ olsun. O zaman, eğer $|x - a| < \delta$ ise,

$$|f(x) - f(a)| = |cx - ca| = |c||x - a| < |c|\delta = \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla f fonksiyonu a noktasında süreklidir. Demek ki bu fonksiyon da süreklidir, üstelik düzgün süreklidir.

Bundan sonraki sonuçlar matematikte "folklor" olarak nitelendirilir. Yani herkesin bildiği ama kitaplarda pek yazılmayan sonuçlar...

Örnek 9. Sürekli Fonksiyonları Yapıştırmak/Birleştirmek. İki sürekli fonksiyonu yapıştırarak (ya da birleştirerek) her zaman sürekli bir fonksiyon elde etmeyiz. Örneğin Örnek 2'deki fonksiyon iki sürekli fonksiyonun birleşimidir (hangileri?) ama elde edilen fonksiyon sürekli değildir. Örnek 5'te de aynı sorun vardır. Öte yandan Örnek 3'teki gibi bazı durumlarda yapıştırılarak elde edilen iki sürekli fonksiyon sürekliliği korur:

Teorem 1. *$a < b$ ve $c < d$ olsun. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ve $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ iki sürekli fonksiyon olsun. Ayrıca her $x \in (a, b) \cap (c, d)$ için*

$$f(x) = g(x)$$

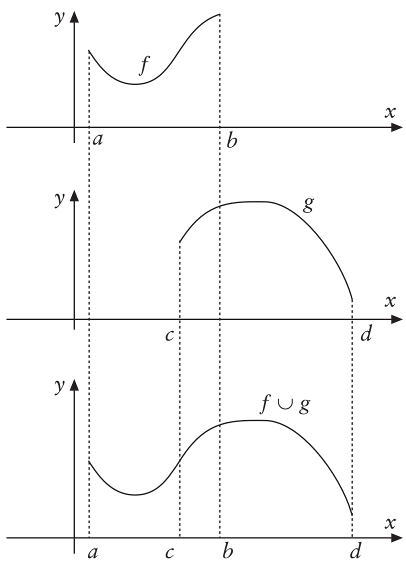
eşitliğinin doğru olduğunu varsayalım, o zaman,

$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{eğer } x \in (a,b) \text{ ise} \\ g(x) & \text{eğer } x \in (c,d) \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanan

$$f \cup g : (a, b) \cup (c, d) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu süreklidir.



$f \cup g$ fonksiyonunun grafiğini elde etmek için, f ve g fonksiyonlarının grafiklerini birleştirmek yeterlidir.

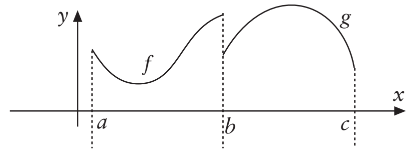
Elde edilen $f \cup g$ fonksiyonunun grafiğinin f ve g fonksiyonlarının grafiğinden nasıl elde edileceği yukardaki şekilde gösteriliyor.

Önermenin, Örnek 3'teki gibi, $(a, b) \cap (c, d) = \emptyset$ olduğu zaman da doğru olduğuna dikkatinizi çekeriz. Örneğin $b = c$ olduğunda... Bu dediğimiz, ince ama önemli bir ayrıntıdır.

Ayrıca fonksiyonların tanım aralıklarını kapalı da alabilirdik, önerme gene doğru olurdu. Bunun özel bir hali $f(b) = g(b)$ eşitliğini sağlayan

$$f : (a, b] \to \mathbb{R} \text{ ve } g : [b, c) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonlarının yapıştırılmasıyla elde edilen fonksiyondur.



Eğer f, (a, b) aralığının her noktasında sürekliyse ve g, (b, c) aralığının her noktasında sürekliyse, o zaman $f \cup g$ fonksiyonu $(a, b) \cup (b, c)$ kümesinin her noktasında süreklidir. b noktası $f \cup g$ fonksiyonunun tanım kümesinde olmadığı için b noktasındaki süreksizlik intibaı aldatıcıdır.

Öte yandan aynı önerme Örnek 2'de görüldüğü gibi (a, b) ve $[b, c)$ aralıkları için yanlıştır.

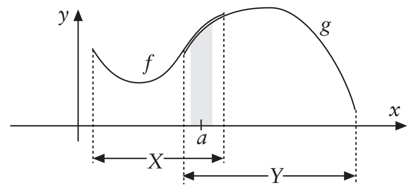
(a, b) ve (c, d) yerine $\mathbb{R}$'nin bambaşka altkümelerini alırsak da teorem yanlış olur. Bkz. Örnek 5.

Alıştırma. Teorem 1'i ve daha sonra söylenenleri kanıtlayın.

Yerellik

Önermenin doğruluğu sürekliliğin "yerel" bir kavram olmasından kaynaklanmaktadır. Bu "yerel" kavramını biraz açalım; analizde çok önemlidir.

Bir fonksiyonun belli bir a noktasında sürekli olması, sadece ve sadece o fonksiyonun a civarındaki davranışına göre değişir ve fonksiyonun a'dan uzakta neler yaptığından bağımsızdır. Aşağıdaki şekil okuru en azından görsel olarak doyurmalı.



Eğer a noktası civarında f ve g fonksiyonları eşitlerse, o zaman biri a'da sürekliyse, diğeri de süreklidir.

Bir sonraki önerme ise bu dediğimizin matematikçesidir.

Teorem 2. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in X \cap Y$ olsun.*
$$f : X \to \mathbb{R},\ g : Y \to \mathbb{R}$$
iki fonksiyon olsun. Belli bir $\alpha > 0$ için $(a - \alpha, a + \alpha) \subseteq X \cap Y$ olsun ve bu aralık üstünde $f = g$ eşitliğini, yani her $x \in (a - \alpha, a + \alpha)$ için $f(x) = g(x)$ eşitliğini varsayalım. O zaman, eğer f ve g fonksiyonlarından biri a'da sürekliyse diğeri de a'da süreklidir.

Kanıt: Verilmiş bir $\varepsilon > 0$ için bulmamız gereken δ'yı α'dan küçük seçmek yeterlidir. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. □

Alıştırma. $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in X \cap Y$ olsun.
$$f : X \to \mathbb{R},\ g : Y \to \mathbb{R}$$
iki fonksiyon olsun. Belli bir $\alpha > 0$ için
$$(a - \alpha, a + \alpha) \cap Y \subseteq X$$
olsun ve $(a - \alpha, a + \alpha) \cap Y$ üstünde $f = g$ eşitliğini, yani her $x \in (a - \alpha, a + \alpha) \cap Y$ için $f(x) = g(x)$ eşitliğini varsayalım. O zaman, eğer f fonksiyonu a'da sürekliyse g de a'da süreklidir.

Bir sonraki teoremimiz, sürekli bir fonksiyonun kısıtlanmasının da sürekli olduğunu söyleyecek. Önce fonksiyon kısıtlamanın ne demek olduğunu anımsatalım. f, bir A kümesinden bir Y kümesine giden bir fonksiyon olsun. B, A'nın bir altkümesi olsun. $g : B \to Y$ fonksiyonu her $b \in B$ için,
$$g(b) = f(b)$$
kuralıyla tanımlanmış olsun. Yani g'nin alacağı değerler f fonksiyonu tarafından belirlenmiş olsun. Bu durumda g fonksiyonuna f'nin ***kısıtlanışı*** adı verilir ve $g = f_{|B}$ yazılır. Duruma göre, kimi zaman da f'ye g'nin (bir) ***genişlemesi*** adı verilir.

Teorem 3. *$b \in B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer f fonksiyonu b'de sürekliyse $f_{|B}$ fonksiyonu da b'de süreklidir.*

Gözdağı: Kanıtı bundan daha kolay bir teorem zor bulunur. □

Süreklilik konusunda ilerki yazılarda daha derinleşeceğiz. Şimdilik sürekliliğin oldukça basit özelliklerinden sözedelim.

1. Sürekliliği, $\mathbb{R}$'nin bir A altkümesinden $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlar için tanımladık. Oysa, tanıma bakılırsa fonksiyonun illa $\mathbb{R}$'ye değil, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesine gitmesi yeterli, nitekim tanımda fonksiyonun varış kümesini hiç kullanmadık, tek kullandığımız değerlerin gerçel sayılar olmasıydı. Yani A ve B, $\mathbb{R}$'nin altkümeleriyse ve $f : A \to B$, A'dan B'ye giden bir fonksiyonsa, sürekliliği bu f fonksiyonu için de tanımlayabiliriz, aynı tanımı kabul edelim, olsun bitsin. Bundan böyle sürekliliğin $\mathbb{R}$'nin bir altkümesinden gene $\mathbb{R}$'nin bir altkümesine giden fonksiyonlar için tanımlandığını kabul edeceğiz.

2. Eğer $f : A \to B$ fonksiyonu bir $a \in A$ noktasında sürekliyse ve $f(A) \subseteq C \subseteq \mathbb{R}$ ise, aynı grafiği olan ve her $x \in A$ için $g(x) = f(x)$ kuralıyla tanımlanan $g : A \to C$ fonksiyonu da a noktasında süreklidir.

3. Eğer $f : A \to B$ fonksiyonu bir $a \in A$ noktasında sürekliyse ve $a \in C \subseteq A$ ise, her $x \in C$ için $(f_{|C})(x) = f(x)$ kuralıyla tanımlanan $f_{|C} : C \to B$

fonksiyonu da a noktasında süreklidir. Bunu biliyoruz.

Öte yandan, $f : A \to B$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli değilse ve $a \in C \subseteq A$ ise,

$$f_{|C} : C \to B$$

fonksiyonu a noktasında pekâlâ sürekli olabilir. Nitekim f ne olursa olsun, $C = \{a\}$ ise $f_{|C}$ fonksiyonu a'da süreklidir! (Bkz. Sayfa 22, Alıştırma 6.) Biraz daha sofistike bir örnek verelim: f, Örnek 2'deki fonksiyon olsun $A = \mathbb{R}$, $a = 0$ ve

$$C = (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$$

olsun, ya da

$$C = [0, \infty)$$

olsun. Bu durumda $f_{|C}$ fonksiyonu 0'da süreklidir.

4. $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun.

$$C = \{a \in A : f,\ a\text{'da sürekli}\}$$

olsun. O zaman $f_{|C}$ fonksiyonu *s*üreklidir.

Alıştırmalar

1. $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanan $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu a) Tanıma başvurarak, b) Bu yazıdaki sonuçlarla kanıtlayın.

2. f, $(0, 1) \cup (2, 3)$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden ve $f(x) = x$ kuralıyla tanımlanan fonksiyon olsun. f'nin grafiğini çizin. f'nin sürekli olduğunu kanıtlayın.

3. f, $(0, 2)$ aralığından $\mathbb{R}$'ye giden, $(0, 1)$ aralığı üzerinde $f(x) = x$ ve $[1, 2)$ aralığı üzerinde $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanan fonksiyon olsun. f'nin grafiğini çizin. f'nin sürekli olduğunu kanıtlayın.

4. $r \in \mathbb{R}$ olsun. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \geq r \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x < r \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Hangi $r \in \mathbb{R}$ sayıları için f süreklidir?

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun ve her x için $f(x) = f(-x)$ olsun. Eğer f, a'da sürekliyse, $-a$'da da sürekli olduğunu kanıtlayın. Bundan f, a'da sürekli değilse $-a$'da da sürekli olamayacağını çıkarın. Aynı şeyi $f(-x) = -f(x)$ eşitliğini sağlayan bir fonksiyon için de yapın.

6. Her $x \in \mathbb{R}$ için $0 \leq f(x) \leq |x|$ eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyonun 0'da sürekli olduğunu kanıtlayın.

7a. Eğer p ve q birbirine asal iki tamsayıysa, $f(p/q) = |p| + |q|$ olsun. Bu kuralla tanımlanmış olan $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun hiçbir noktada sürekli olmadığını kanıtlayın.

7b. $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonu, $g(x) = 1/f(x)$ kuralıyla tanımlansın. g fonksiyonun sürekli olmadığını kanıtlayın.

8. $a \in V \subseteq \mathbb{R}$'nin bir altkümesi olsun. Eğer

$$a \in I \subseteq V$$

koşulunu sağlayan açık bir I aralığı varsa V'ye a'nın ***komşuluğu*** adı verilir.

Şimdi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. f'nin a'da sürekli olması için,

$f(a)$'nın her V komşuluğu için, $f^{-1}(V)$ kümesi a'nın bir komşuluğudur

koşulunun yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın.

9. A, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olsun. $a \in A$ olsun. A'nın, bir $\varepsilon > 0$ için,

$$A \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

altkümesini içeren V altkümelerine a'nın ***A'da komşuluğu*** adı verilir. Demek ki a'nın A'da komşuluğu, a'nın (bir önceki soruda tanımlanan) bir komşuluğuyla A'nın kesişimidir.

Şimdi $f : A \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. f'nin a'da sürekli olması için,

$f(a)$'nın $\mathbb{R}$'de her V komşuluğu için, $f^{-1}(V)$ kümesi a'nın A'da bir komşuluğudur

koşulunun yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın. ♦

Çeşit Çeşit Süreklilik

Verdiğimiz süreklilik tanımı Cauchy'nin olduğu için bazen sürekli yerine ***Cauchy-sürekli*** denir. Sürekliliğin başka adlarla anılan başka tanımları vardır; örneğin ***Heine-süreklilik***. Heine-sürekli bir fonksiyon yakınsak bir diziyi yakınsak bir diziye götürür. Bu iki kavram arasında bir fark olmadığını göreceğiz.

Kullanılan bir başka Cauchy sürekliliği kavramı daha vardır: Cauchy dizilerini Cauchy dizilerine götüren bir fonksiyona da bazen ***Cauchy sürekli*** denir. Eğer $X \neq \mathbb{R}$ ise, sürekli fonksiyonlar Cauchy-sürekli olmayabilirler. Örneğin sayfa 21, Örnek 2'deki fonksiyon süreklidir ama Cauchy-sürekli değildir. Öte yandan $X = \mathbb{R}$ ise Cauchy-sürekli bir fonksiyon sürekli olmak zorundadır. İlerde kanıtlayacağımız bu sonucu şimdilik okura alıştırma olarak bırakıyoruz.