Akdeniz Üniversitesi

X. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI

Birinci Seçme Sınavı Soru ve Yanıtları

İlham Aliyev, Mustafa Özdemir, Mutlu Güloğlu, Ramazan Tınaztepe
ialiev@akdeniz.edu.tr / mozdemir@akdeniz.edu.tr / guloglu@akdeniz.edu.tr / rtinaztepe@akdeniz.edu.tr

1. 30 *kişilik bir satranç turnuvasında, şampiyon,* "3 *kez yenilen elenir*" *kuralıyla belirlenecektir. Buna göre en az kaç maç yapılabilir?*

Çözüm: En az maç yapılması için, şampiyon olacak kişi hiç yenilmemelidir. Şampiyon olacak kişi A, ikinci B ve üçüncü de C olsun. A herkesi; B, A dışında herkesi ve C de, A ile B dışında herkesi yensin. Bu durumda $29 + 28 + 27 = 84$ maç yapılmış olur ve böylece A, B, C dışındaki tüm yarışmacılar elenir. C iki kez ve B de bir kez yenildiğinden, her ikisinin de elenmesi için 3 maç yeterlidir. Dolayısıyla $84 + 3 = 87$ maç yapılmalıdır.

2. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ *pozitif tam sayıların ikişer ikişer toplanmasıyla elde dilen sayı kümesinin* $\{18, 26, 29, 34, 36, 37, 44, 45, 52, 55\}$ *olduğu bilindiğine göre,* x_2 *sayısının rakamlarının toplamı kaçtır?*

Çözüm: Sayıların ikişer ikişer toplanmasıyla elde edilen tüm eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 18 + ... + 55 = 376$$

olur. Buradan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 94$ bulunur. Diğer taraftan, $x_1 + x_2 = 18$ ve $x_4 + x_5 = 55$ olduğundan, $x_3 = 94 - 18 - 55 = 21$ olur. $x_1 + x_3 = 26$ eşitliğinden $x_1 = 5$ ve $x_1 + x_2 = 18$ eşitliğinden $x_2 = 13$ bulunur. O halde, x_2 sayısının rakamları toplamı $1 + 3 = 4$ bulunur.

3. $\text{OKEK}(x, y) + \text{OBEB}(x, y) = x + y + 4$ *denklemini sağlayan kaç* (x, y) *pozitif tamsayı çifti vardır?*

Çözüm: $\text{OBEB}(x, y) = m$ olsun. Bu durumda, birbirine asal a ve b sayıları için, $x = ma$ ve $y = mb$ yazılabilir. $\text{OKEK}(x, y) = mab$ olduğu da gözönüne alınırsa, denklem,

$$m + mab = ma + mb + 4$$

olur. Buradan, $m(a - 1)(b - 1) = 4$ elde edilir. $m = 1, 2, 4$ durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

$m = 1$ için $(a = 5, b = 2)$ veya $(a = 2, b = 5)$, $m = 2$ için $(a = 3, b = 2)$ veya $(a = 2, b = 3)$ çözümleri bulunur. $m = 4$ için çözüm yoktur. O halde denklemin 4 tane pozitif tamsayı çözümü vardır.

4. $f : \mathsf{Z} \to \mathsf{Z}$ *fonksiyonu her* $n \in \mathsf{Z}$ *için*

$$f(f(n + 1) - 7) = n - 1 \text{ ve } f(f(n)) = n$$

eşitliklerini sağlıyor. $f(0) = 1$ *ise,* $f(2005)$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

Çözüm: Birinci eşitliği, $n = f(f(n + 2) - 7)$ şeklinde yazıp, her iki taraftan f ile (soldan) bileşkesi alınırsa, $f(f(n)) = n$ kullanılarak, $f(n) = f(n + 2) - 7$ bulunur. Böylece, $f(n + 2) = f(n) + 7$ eşitliği kullanılarak $f(2005)$ hesaplanabilir.

Öncelikle, $f(f(n)) = n$ eşitliğinde $n = 0$, $f(0) = 1$ yazılırsa $f(1) = 0$ bulunur. Tümevarımla, her $n \in \mathsf{N}$ için, $f(2n) = 7n + 1$ ve $f(2n + 1) = 7n$ olduğu görülür. O halde, $f(2005) = 7 \cdot 1002 = 7014$ olur.

5. $\dfrac{m(n+3)-1}{m(n+3)+n+2}$ *kesri sadeleşecek şekilde kaç tane* (m, n) *pozitif tamsayı çifti vardır?*

Çözüm: $m(n + 3) - 1$ ve $m(n + 3) + n + 2$ sayılarının her ikisi de bir $d \geq 1$ sayısına bölünüyorsa, bu sayıların farkı olan $n + 3$ de d'ye bölünmelidir. Oysa, $m(n + 3) - 1$ sayısı ile $n + 3$ sayısı aralarında asaldır. Dolayısıyla $d = 1$ olmaldır. Yanıt 0'dır.

6. m, n, k *pozitif tamsayılar olmak üzere,*

$$1/7 \leq m/n < 1/3$$

ve

$$m/n = (m + k)/(nk)$$

ilişkilerini sağlayan kaç m/n *kesri vardır?*

Çözüm: Eşitlikten $(m + k)/k = m$, yani $k = m/(m - 1)$ çıkar. k tamsayı olduğundan $m = 2$ olmalıdır. Demek ki, $1/7 \leq 2/n < 1/3$ eşitsizliğini sağlayan pozitif n'lerin sayısını bulmalıyız. Bu eşitsizlikten $6 < n \leq 14$ çıkar. Buradan, $n = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ bulunur. Yanıt 8'dir.

7. *Alper hergün çekmecesindeki şekerlerin 2/3'ünün bir fazlasını yiyerek, şekerleri üç günde bitiriyor. Alper'in yemiş olduğu tüm şekerlerin sayısının rakamları toplamı aşağıdakilerden hangisidir?*

Çözüm: Alper, şekerleri yemeye başladıktan 2 gün sonra kalan şeker sayısına z denilirse, $2z/3 + 1 = z$ eşitliğinden $z = 3$ bulunur. O halde, bir gün önce kalan şeker sayısına y denilirse, $2y/3 + 1 = y - 3$ eşitliğinden $y = 12$ bulunur. Başlangıçta çekmecede bulunan şeker sayısına x denilirse, $2x/3 + 1 = x - 12$ eşitliğinden $x = 39$ bulunur.

8. *5 kalem, 7 defter ve 9 silgi iki çocuk arasında kaç farklı şekilde paylaştırılabilir? Not: Çocuklardan birinin hiçbir şey almadığı durum da sayılacaktır.*

Çözüm: 5 kalem 6 farklı şekilde dağıtılabilir: Çocuklardan biri 0, 1, 2, 3, 4, 5 sayıda kalem alabilir. Benzer olarak, defter 8 ve silgi 10 farklı şekilde paylaştırılabilir. O halde, tüm farklı paylaştırmaların sayısı $6 \cdot 8 \cdot 10 = 480$'dir.

9. *$5 \le n \le 2005$ aralığındaki kaç tane n tamsayısı için $n - [n/2] = [2n/3] - [n/6]$ eşitliği sağlanmaz? (Burada, $[a]$ ile a sayısının tam kısmı gösterilmektedir.)*

Çözüm: $n = 6k + r$ $(0 \le r \le 5)$ yazılırsa, problemdeki eşitlik,

$$6k + r - 3k - [r/2] = 4k + [2r/3] - k - [r/6]$$

yani

$$r - [r/2] = [2r/3] - [r/6]$$

şekline dönüşür. $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ için kontrol edilirse, yalnız $r = 1$ halinde eşitlik sağlanmaz. Demek ki, problemdeki eşitlik sadece $n = 6k + 1$ şeklindeki sayılar için sağlanmaz. $5 \le n \le 2005$ aralığındaki $6k + 1$ şeklinde olan sayıların sayısını bulalım. $a_1 = 7$, $d = 6$ olmak üzere, aritmetik dizinin m'inci terimi formülünden,

$$a_m = a_1 + (m - 1)d = 7 + 6(m - 1) = 6m + 1$$

olur. $2005 = 6m + 1$ eşitliğinden $m = 334$ olarak bulunur. yanıt 334'tür.

10. *2'lik sayı tabanına göre yazılışında dört tane 1 ve altı tane 0 olan tüm pozitif sayıların toplamını bulunuz.*

Çözüm: Sayıların ilk rakamı 1 olacağından, tüm sayıların sayısı $9!/(3!6!) = 84$'tür. Herhangi $k = 1, 2, \ldots, 9$ için k'inci basamağında 1 olan sayıların sayısı $8!/(2!6!) = 28$ olacaktır. O halde, problemin koşullarını sağlayan, sayıların toplamı (onluk sistemde)

$$84 \cdot 2^9 + 28 \cdot 2^8 + 28 \cdot 2^7 + \ldots + 28 \cdot 2^1 + 28 \cdot 2^0$$
$$= 84 \cdot 2^9 + 28(2^9 - 1)/(2 - 1)$$
$$= 112 \cdot 2^9 - 28 = 28 \cdot 2^{11} - 28 = 28(2^{11} - 1)$$

olarak bulunur.

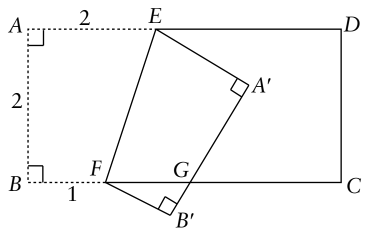
11. *$n(n+1)(n+2) \ldots (5n-1)(5n)$ sayısının 5^{86}'ya bölünebilmesi için en küçük pozitif n tamsayısının rakamları toplamı kaç olmalıdır?*

Çözüm: $c_n = n(n+1) \ldots (5n-1)(5n) = n \cdot (5n)!/n!$ olsun. $(5n)!/n!$ sayısında 5'in en büyük kuvveti,

$$([5n/5] + [5n/5^2] + \ldots) - ([n/5] + [n/5^2] + \ldots) = n$$

dir. Eğer 5^k, n'yi tam bölüyorsa, $c_n = n \cdot (5n)!/n!$ olduğundan, $k + n \ge 86$ olmalı. Eğer $k = 0$ ise $n = 86$ olabilir. Ama $k = 1$ ise $n = 85$ olabilir. Demek ki $n \le 85$. Dolayısıyla $k \le 2$ (çünkü $5^3 = 125$ ve 125, n'yi bölmeli.) k'nin 2 olamayacağı açık. Demek ki $n = 85$ ve doğru yanıt $8 + 5 = 13$'tür.

12. *ABCD dikdörtgeni [EF] doğru parçası boyunca şekildeki gibi katlanmıştır. $|AB| = |AE| = 2$ br. ve $|BF| = 1$ br. olduğuna göre $|B'G|$ kaçtır?*



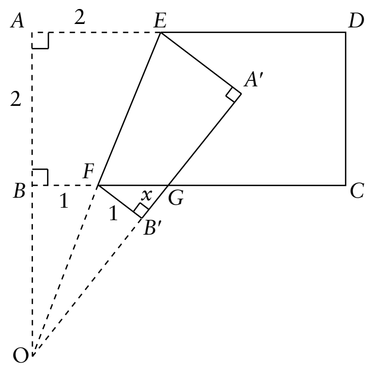
Çözüm: AB, EF ve $A'B'$ doğru parçalarını uzatarak kesişim noktasına O diyelim. $|B'G| = x$ olsun. $|FG| = \sqrt{(x^2+1)}$. OBF ve OAE üçgenlerinin benzerliğinden, $|OB| = 2 = |OB'|$ bulunur. Şimdi de, OBG üçgeninde $|OF|$ açıortay olduğundan, açıortay teoreminden,

$$|FB|/|FG| = |OB|/|OG|$$

ve bunun karesini alarak

$$1/(x^2 + 1) = 4/(2 + x)^2$$

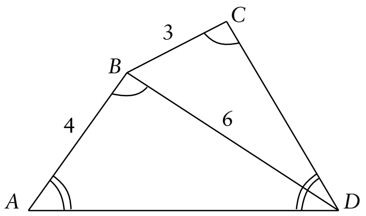
buluruz. Buradan,



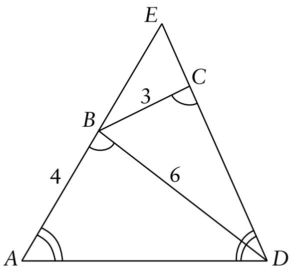
$$4(x^2 + 1) = 4 + 4x + x^2$$

ve $x = 4/3$ bulunur.

13. *Aşağıdaki şekilde* $|AB| = 4$, $|BC| = 3$, $|BD| = 6$, $m(ABD) = m(BCD)$ ve $m(ADC) = m(BAD)$ *ise* $|DC|$ *kaç birimdir?*

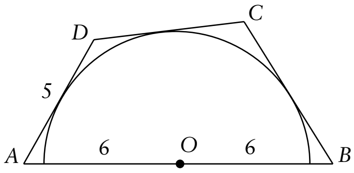


Çözüm: AB ve DC doğruları E noktasında kesişsinler. EBD ve ECB üçgenleri benzer üçgenlerdir. Dolayısıyla, $|EB|/|EC| = |ED|/|EB| = |BD|/|CB| = 6/3 = 2$'den, $|ED| = 2|EB|$ ve $|EB| = 2|EC|$ bulunur. Diğer taraftan, $|ED| = |AE| = 4 + |EB|$ olduğundan, $2|EB| = 4 + |EB|$ olur. Bu eşitliklerden $|EB| = 4$, $|ED| = 8$ ve $|EC| = 2$ bulunur.



O halde, $|DC| = |DE| - |EC| = 8 - 2 = 6$ olur.

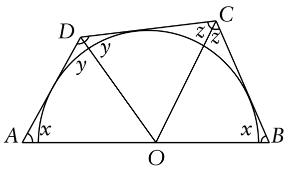
14. *Şekildeki ABCD dörtgeninin AD, DC ve CB kenarları, merkezi AB doğru parçasının orta noktasında olan çembere teğettir.* $|AB| = 12$, $|AD| = 5$ *olduğuna göre* $|BC|$ *kaçtır?*



Çözüm: $m(DAO) = m(CBO) = x$, $m(ADO) = m(ODC) = y$ ve $m(DCO) = m(OCB) = z$ diyelim.

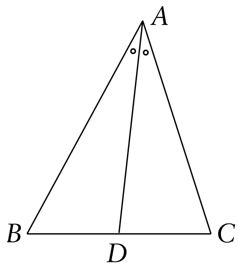
$$x + 2y + 2z + x = 360°$$

ve $x + y + z = 180°$ olur. O halde, $AOD = z$ ve $COB = y$ olur. Dolayısıyla, AOD ve BCO benzer

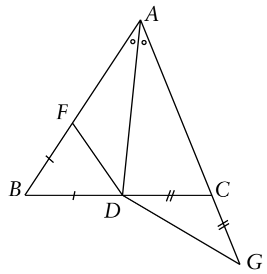


üçgenlerdir. Buradan da, $|AD|/|AO| = |BO|/|BC|$ ve dolayısıyla $|BC| = |AO|\cdot|BO|/|AD| = 6\times6/5 = 7{,}2$ bulunur.

15. *Bir ABC üçgeninde A açısının açı ortayı BC kenarını D noktasında kesiyor.* $|AB| - |BD| = 24$ *ve* $|AC| + |CD| = 54$ *olduğuna göre* $|AD|$ *kaçtır?*



Çözüm: AB kenarı üzerinde $|FB| = |BD|$ olacak biçimde F noktasını ve AC'nin uzantısı üzerinde de, $|CG| = |CD|$ olacak şekilde de G noktasını alalım. ADF ve AGD üçgenlerinin benzer olduğunu göre-



lim. Bunun için $m(AFD) = m(ADG)$ olduğunu göstermek yeterlidir. İşte kanıtı:

$$m(AFD) = 180° - m(BFD)$$
$$= 180° - [90° - m(B)/2] = 90° + m(B)/2$$

ve

$$m(ADG) = 180° - [m(A)/2 + m(G)]$$
$$= 180° - m(A)/2 - m(ACB)/2 = 90° + m(B)/2.$$

Böylece, $|AF|/|AD| = |AD|/|AG|$, $|AD|^2 = |AF|\cdot|AG| = 24\cdot54$ ve $|AD| = \sqrt{(24\cdot54)} = 36$ bulunur.

İkinci Yol: $|AB| - |BD| = 24$, $|AC| + |CD| = 54$ ifadelerini taraf tarafa çarparsak, $|AB|\cdot|AC| + |AB|\cdot|CD| - |BD|\cdot|AC| - |BD|\cdot|CD| = 54\cdot24$ buluruz. Açıortay teoreminden, $|AB|\cdot|CD| = |BD|\cdot|AC|$ olduğundan, $|AB|\cdot|AC| - |BD|\cdot|CD| = 54\cdot24$ olur. Diğer taraftan,

$$|AD|^2 = |AB|\cdot|AC| - |BD|\cdot|CD| = 54\cdot24$$

olduğundan, $|AD|^2 = 54\cdot24$ ve $|AD| = 36$ bulunur.

16. $(x + 6)(\sqrt{(x + 1)} - 1)^2 \geq x^2$ *eşitsizliğini sağlayan x sayılarının bulunduğu en geniş aralığın uzunluğu kaçtır?*

Çözüm: $x \geq -1$ olmalı. Eğer $1 + x = y$ dersek, $x = y - 1$ olur. O halde eşitsizlik y cinsinden,

$$(y + 5)(1 - \sqrt{y})^2 \geq (y - 1)^2 = (\sqrt{y} - 1)^2(\sqrt{y} + 1)^2$$

olur. $y = 1$ bir çözümdür. $y \neq 1$ için her iki tarafı da $(\sqrt{y} - 1)^2$ sayısı ile bölersek,

$$y + 5 \geq (\sqrt{y} + 1)^2 = y + 2\sqrt{y} + 1$$

buluruz. Demek ki $2\sqrt{y} \leq 4$, yani $y \leq 4$, yani $x \leq 3$ elde ederiz. Böylece, çözüm aralığı, $-1 \leq x \leq 3$ olur. Yani, çözüm aralığının uzunluğu 4'tür.

17. *5'in güçlerinin ve farklı güçlerinin toplamlarından oluşan sayılar artan sırada yazılarak,*

$$1, 5, 6, 25, 30, 31, 125, ...$$

dizisi oluşturuluyor. ($1 = 5^0$, $5 = 5^1$, $6 = 5^0 + 5^1$, $25 = 5^2$, $26 = 5^0 + 5^2$, $30 = 5^1 + 5^2$, $31 = 5^0 + 5^1 + 5^2$ v.s.) *Buna göre bu sayı dizisinin 63'üncü terimi kaçtır?*

Çözüm: Verilen sayı dizisinde 2^1-inci yerde 5^1, 2^2-inci yerde 5^2, 2^3-üçüncü yerde 5^3, ..., 2^6-ncı yerde 5^6 sayısının olduğu kolayca görülebilir. Yani 64'üncü sayı 5^6'dır. O halde, 63. sayı,

$$5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 = (5^6 - 1)/(5 - 1)$$
$$= (15625 - 1)/4 = 3906$$

olacaktır.

Not: Bu dizinin terimlerinin sırasıyla $(1)_5$, $(10)_5$, $(11)_5$, $(100)_5$, $(101)_5$, $(111)_5$, $(1000)_5$ olduğu açıktır. Dizinin terimlerinin numaralarının aynı terimlerin 2 tabanında yazılmasıyla elde edilebileceği görülebilir. Eğer dizinin terimi $(a)_5$ ise terimin numarası $(a)_2$'dir. Gerçekten,

$(1)_5$ terimi, $(1)_2 = 1$'inci terim,

$(10)_5 = 5$ terimi, $(10)_2 = 2$'inci terim,

$(111)_5 = 31$ terimi, $(111)_2 = 7$'nci terimdir, vb.

Buna göre, $63 = (111111)_2$ olduğundan, 63'üncü terim $(111111)_5 = 3906$ olur.

18. *$x, y \in$ R olmak üzere,*

$$(x - 2)(y + 2) = (x + y)^2$$

eşitliğini sağlayan kaç tane (x, y) ikilisi vardır?

Çözüm: Denklemi x'e göre ikinci dereceden denklem olacak şekilde düzenleyelim:

$$x^2 + 2xy + y^2 - xy - 2x + 2y + 4 = 0$$

ve

$$x^2 + (y - 2)x + (y^2 + 2y + 4) = 0$$

olur. Bu denklemin reel çözümünün olması için, diskiriminant negatif olmamalıdır.

$$\Delta = (y - 2)^2 - 4(y^2 + 2y + 4) \geq 0$$

eşitsizliğinin düzenlenmesiyle, $(y + 2)^2 \leq 0$ ve buradan $y = -2$ elde edilir. Bu, denklemde yerine yazılırsa, $x = 2$ bulunur. O halde denklemin tek çözümü, $(2, -2)$ olarak bulunur.

19. *Altı basamaklı pozitif sayılar içinde, 6 rakamını içeren ve 3'e bölünen sayıların sayısına n diyelim. n sayının 10'a bölümünden kaç kalır?*

Çözüm: n sayısını bulmak için, 3'e bölünen 6 basamaklı sayıların sayısından (yani 300.000'den), 3'e bölünen, fakat 6'yı içermeyen sayıların sayısını çıkaracağız. Sayının ilk rakamı 0 ve 6 olamayacağından, ilk rakam yerine yazılabilecek rakam sayısı 8'dir. Kalan basamakların herbiri için 9 seçeneğimiz vardır. Fakat, 3 ile bölünme koşulumuz olduğundan dolayı, son rakamın yerine yazılabilecek rakamlar, ilk beş rakamın toplamına göre değişecektir. Bunun için, baştan ilk beş rakamın toplamına A diyelim.

$A \equiv 0 \pmod 3$ ise, son rakam 0, 3, 9 olabilir.

$A \equiv 1 \pmod 3$ ise, son rakam 2, 5, 8 olabilir.

$A \equiv 2 \pmod 3$ ise, son rakam 1, 4, 7 olabilir.

Yani, her durum için de son basamak yerine yazabileceğimiz rakam sayısı 3 'tür.

O halde, 6 rakamını içermeyen ve 3'e bölünen sayıların sayısı $8 \cdot 9^4 \cdot 3$ olur. Sonuç olarak, 6 rakamını içeren ve 3 ile bölünen sayıların sayısı $n = 300000 - 8 \cdot 9^4 \cdot 3$ olacaktır.

$$n = 300000 - 8 \cdot 9^4 \cdot 3 \equiv 0 - 4 \equiv 6 \pmod{10}$$

bulunur.

20. *$X = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi verilsin. X'ten X'e giden $f : X \to X$ fonksiyonları içinde, $a, b, c \in X$ olmak üzere, $f(a) = f(b) = f(c)$ koşulunu **sağlamayan** kaç fonksiyon vardır?*

Çözüm: Söz konusu fonksiyonların sayısını bulmak için tüm $f : X \to X$ fonksiyonları sayısından (yani 4^4'ten), $f(a) = f(b) = f(c)$ eşitliğini sağlayan fonksiyonların sayısını çıkaracağız. Uygun a, b, c için $f(a) = f(b) = f(c)$ eşitliğini sağlayan fonksiyonlar iki tiptir.

1) Sabit fonksiyon: $f(1) = f(2) = f(3) = f(4)$. Bunlardan 4 tane vardır.

2) X'in herhangi üç a, b, c elemanını bir $x \in X$ elemanına, geriye kalan elemanı da X'in x'dan farklı üç elemanından herhangi birine götüren fonksiyonlar. Bunların sayısı,

$$\binom{4}{3} \times 4 \times 3 = 48$$

dir. O halde, istenen fonksiyonların toplam sayısı,

$$4^4 - (48 + 4) = 204$$

olarak bulunur. ♣