Bilkent 2001 Soru ve Yanıtları

Azer Kerimov / *kerimov@fen.bilkent.edu.tr*

Şubat 2001. *$f(x) = 5x^{13} + 13x^5 + 9ax$ fonksiyonunun tüm x tamsayı değerleri için 65'e bölünmesini sağlayacak en küçük pozitif a tamsayısı kaç olmalıdır?*

Çözüm: Verilen fonksiyonun 65'e bölünmesini istiyoruz. Öyleyse,

$$5x^{13} + 13x^5 + 9ax = f(x) \equiv 0 \pmod{65}$$

olmalı. Fermat'nın Küçük Teoremi'nden

$$13x^5 \equiv 13x \pmod{65} \text{ ve } 5x^{13} \equiv 5x \pmod{65}$$

çıkar. Buna göre denklemi düzenlersek,

$$9x(2 + a) = 18x + 9ax = 5x + 13x + 9ax \equiv 0 \pmod{65}$$

elde ederiz. Demek ki $2 + a \equiv 0 \pmod{65}$ olmalıdır, böylece denklem 65'e bölünebilir. Demek ki denklemi sağlayacak en küçük a sayısı 63'tür.

Mart 2001. *$(m - n)^2(n^2 - m) = 4m^2n$ denklemini sağlayan, tüm (m, n) doğal sayı çiftlerini bulunuz.*

Çözüm: $d = \text{ebob}(m, n)$, $m = dm_1$ ve $n = dn_1$ olsun. Bunları denklemde yerine koyar ve denklemi d^3'e bölersek $(m_1 - n_1)^2(dn_1^2 - m_1) = 4m_1^2n_1$ elde ederiz. Eğer bir p asalı n_1'i bölerse, bu asal sağ tarafı, dolayısıyla sol tarafı da böler; ama n_1 ve m_1 birbirine asal olduklarından, bu imkânsızdır. Demek ki $n_1 = 1$ ve $(m_1 - 1)^2(d - m_1) = 4m_1^2$. Bundan da $(m_1 - 1)^2$'nin $4m_1^2$'yi bölmesi gerektiği çıkar, yani $m_1 = 2, 3$. Buradan kolaylıkla $d = 18$ ve 12 elde edilir. Sonuç olarak (36, 18) ve (36, 12) çözümlerini elde ederiz.

Nisan 2001. *$k + 1$ sayısı 24'e bölündüğüne göre, k doğal sayısını bölen tüm doğal sayıların toplamının 24'e bölündüğünü kanıtlayın.*

Çözüm: $k = 4r + 3$ olduğundan, k bir tamkare değildir, dolayısıyla k'nin hiçbir böleni $\sqrt{k}$'ye eşit değildir. $\sqrt{k}$'den küçük bölenler $p_1, p_2, \ldots, p_n$ olsun. O zaman $\sqrt{k}$'den büyük bölenler $k/p_1, k/p_2, \ldots, k/p_n$ dir. Böylece k'nin bölenlerinin toplamı,

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i + k/p_i)$$

olur. Her i için $p_i + k/p_i$ sayısının 3'e ve 8'e bölündüğünü kanıtlayacağız, bu da bölenlerin toplamının 24'e bölündüğünü kanıtlayacak. p_i tek sayı olduğundan, $p_i \equiv 1, 3, 5$ ya da 7 mod 8. Demek ki $p_i^2 \equiv 1$ mod 8, yani $p_i \equiv 1/p_i$ mod 8. Ayrıca $k \equiv 7$ mod 8. Demek ki $p_i + k/p_i \equiv p_i(1 + k) \equiv 8p_i \equiv 0$ mod 8. Benzer şekilde $p_i + k/p_i \equiv 0$ mod 3.

Mayıs 2001. *Her $x, y, z \in [0, 1]$ için,*

$$3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - 2xyz(x + y + z) \le 3$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: Verilen denklemi düzenleyelim,

$$\begin{aligned} &3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - 2xyz(x + y + z) \\ &= (x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + 2xy^2z - 2x^2yz - 2xyz^2) + \\ &(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + 2xyz^2 - 2x^2yz - 2xy^2z) + \\ &(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + 2x^2yz - 2xy^2z - 2xyz^2) \\ &= (xy + yz - xz)^2 + (xz + yz - xy)^2 + (xz + xy - yz)^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. İlk terimi tekrar düzenlersek,

$$\begin{aligned} xy + yz - xz &= (x + z)y - xz \le (x + z) - xz \\ &= (x - 1)(1 - z) + 1 \le 1 \end{aligned}$$

buluruz. Diğer terimler için de aynı eşitsizlik geçerlidir.

Haziran- Temmuz 2001. *Eğer her $i = 1, 2, 3, 4$ için $|x_i| \le 1$ ise,*

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ &- x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4 \\ &+ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

ifadesinin en büyük değerini bulunuz.

Çözüm: İşlemin sonucuna S diyelim. Kolayca görüleceği üzere

$$S = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4).$$

Dolayısıyla S'nin alabileceği en büyük değeri bulmak için, $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)$ teriminin en küçük değerini bulmamız lazım. Bu en küçük değere de x_i'lerden biri 1 ise ulaşılır. Demek ki $S = 1$, denklemin alabileceği en büyük değerdir.

Ağustos- Eylül 2001. *$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ kümesi elemanlarının toplamı eşit olacak biçimde ayrık A, B ve C altkümelerine ayrıştırılabilirse, n hangi tamsayı değerlerini alabilir?*

Çözüm: Koşulları sağlayan A, B ve C kümelerinin olduğunu varsayalım. O zaman,

$$3\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in A} x + \sum_{x \in B} x + \sum_{x \in C} x = \frac{n(n+1)}{2}$$

dir ve $n(n+1)/2$ sayısı 3'e bölünür, yani $n(n+1) \equiv 0$

mod 6 ve $n \equiv 0, 2, 3$ ya da 5 mod 6 olmalı. Ayrıca kolayca görüleceği üzere $n \geq 4$ olmalı. Şimdi $n \geq 4$ ve $n \equiv 0, 2, 3$ ya da 5 mod 6 ise koşulları sağlayan A, B ve C kümelerinin olduğunu kanıtlayalım. Önce $n = 0, 5, 8, 9$ için bulalım. $n = 0$ için yapacak bir şey yok. $n = 5$ için $1 + 4 = 2 + 3 = 5$ oluyor. $n = 8$ için, $1 + 2 + 3 + 4 = 5 + 7 = 4 + 8$ oluyor. $n = 9$ için, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 7 + 8 = 6 + 9$ oluyor. Şimdi n için koşulları sağlayan A, B ve C kümelerinin olduğunu varsayıp $n + 6$ için koşulları sağlayan A_1, B_1 ve C_1 kümelerinin olduğunu kanıtlayalım:

$$A_1 = A \cup \{n + 1, n + 6\}$$
$$B_1 = B \cup \{n + 2, n + 5\}$$
$$C_1 = C \cup \{n + 3, n + 4\}$$

işimizi görür.

Ekim 2001. *p, 5'ten büyük bir asal sayı olsun. Öyle bir k sayısı bulunuz ki $p\times k$ sayısı, onluk tabanda yalnızca* 1 *rakamıyla yazılsın, yani*

$$p\times k = 111 \ldots 11$$

olsun.

Çözüm. $a_k = \overbrace{111\ldots11}^{k \text{ tane}}$ olsun. a_k'yi p'ye bölüp $a_k = b_kp + r_k$ ve $0 \leq r_k < p$ ilişkilerini sağlayan b_k ve r_k tamsayılarını bulalım. Elbette $r_n = r_m$ eşitliğini sağlayan $n > m > 0$ tamsayıları vardır. O zaman $a_n - a_m$, p'ye bölünür. Şimdi,

$$a_n - a_m = \underbrace{11\ldots1}_{n-m \text{ tane}}\underbrace{00\ldots0}_{m \text{ tane}} = \underbrace{11\ldots1}_{n-m \text{ tane}}\times 10^m$$

eşitliğinden, 5'ten büyük olan p asalının $n - m$ tane 1 rakamından oluşan $111 \ldots 11$ sayısını böldüğü çıkar.

Kasım 2001. *Eğer $0 \leq a, b, c \leq 1$ ise,*

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-a)(1-c)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} \leq 1 + \sqrt{abc}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

Çözüm: $0 \leq a, b, c \leq 1$ olduğundan, $0 \leq x, y, z \leq \pi/2$ aralığında $\sin^2 x = a$, $\sin^2 y = b$, $\sin^2 z = c$ eşitliklerini sağlayan x, y, z vardır. Denklemde bu ifadeleri yerine koyarsak,

$$\sin x\cdot\cos y\cdot\cos z + \sin y\cdot\cos x\cdot\cos z + \sin z\cdot\cos x\cdot\cos y \leq 1 + \sin x\cdot\sin y\cdot\sin z$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği kanıtlayalım:
$1 \geq \sin(x + y + z) = \sin z\cdot\cos(x + y) + \cos z\cdot\sin(x + y) = \sin z\cdot(\cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y) + \cos z\cdot(\sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y) = \sin x\cdot\cos y\cdot\cos z + \sin y\cdot\cos x\cdot\cos z + \sin z\cdot\cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y\cdot\sin z.$

Bilkent 2002 Soruları

Ocak 2002. Eğer $x_i \geq 0$ ve $\sum_{i<j}|x_i - x_j| = 1$ ise, $\sum_{i=1}^{5} x_i$ ifadesinin minimumunu bulunuz.

Nisan 2002. $2^{2^n} + 1 = m^3$ eşitliğinin doğal sayılarda çözümü olmadığını kanıtlayın.

Mayıs 2002. Bir ülkede sonlu sayıda şehir var. Bu şehirler birbirlerine tek yönlü yollarla bağlılar. Herhangi iki şehirden birinden diğerine ulaşıldığını biliyoruz. Her şehre ulaşan bir şehir olduğunu kanıtlayın.

Haziran 2002. $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ ifadesinin rasyonel sayı olmasını sağlayan bir n tamsayısı var mıdır?

Temmuz-Ağustos 2002. a, b ve c, $a + b + c = 1$ eşitliğini sağlayan gerçel sayılar olduğuna göre,

$$7(ab + bc + ac) \leq 2 + 9abc$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Eylül 2002. $x_1, x_2, \ldots, x_{2002}$, birim çemberin üzerinde yer alan bazı noktalar olsun, d_{ij}, x_i ile x_j noktaları arasındaki mesafe olsun.

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_{2002}) = \sum_{i<j} d_{ij}^2$$

olsun. S'nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Ekim 2002. $x^4 + y^4 + z^4 = 4xyz - 1$ denkleminin tüm gerçel çözümlerini bulunuz.

Kasım 2002. n bir doğal sayı olmak üzere, A sayısı, 2^n sayısının rakamlarının yeniden düzenlenmesiyle elde edilmiştir, Tüm $k > n$ için $A \neq 2^k$ eşitsizliğini kanıtlayın.

Aralık 2002. Her n doğalsayısı için, eğer p_i asal sayıları için, $n = p_1p_2 \ldots p_r$ ise

$$f(n) = 1 + p_1 + p_2 + \ldots + p_r$$

olarak tanımlansın. Her k doğalsayısı için, $a_1 = k$ ve $m \geq 2$ için

$$a_m = f(a_{m-1}),\ m = 2, 3, \ldots$$

olarak tanımlanmış $(a_m)_m$ dizisinin periyodik olduğunu kanıtlayın. ♣

Aralık 2001. *$x^3 + y^3 + z^3 = 2$ denkleminin tamsayılarda sonsuz sayıda çözümü olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm: Herhangi bir a tamsayısı için

$$x = 6a^3 + 1,\ y = -6a^3 + 1 \text{ ve } z = -6a^2,$$

denklemin bir çözümüdür. ♣