Karmaşık Sayılar

Oya Oyar

Doğal sayılar kümesi N'de $x + 1 = 0$ denklemi çözülemez, çünkü N'de sadece 0, 1, 2 gibi negatif olmayan sayılar vardır. Bu denklemi çözmek için doğal sayılar kümesi N'yi genişletip −1'i de içeren tamsayılar kümesi Z'ye geçmek gerekir.

Ama Z'de de $2x - 1 = 0$ denklemi çözülemez, çünkü Z, 1/2 gibi kesirli sayıları içermez. Bu denklemi çözmek için Z'yi genişletip kesirli sayılar kümesi Q'ye geçmek gerekir.

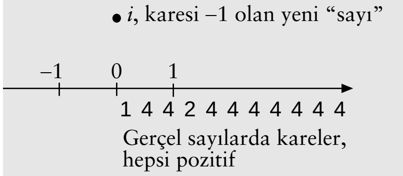
Ama Q'de de $x^2 - 2 = 0$ denklemi çözülemez. Çünkü $\sqrt{2}$ ya da $-\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildir. Bu gibi denklemleri çözebilmek için Q'yü genişletmek gerekir, örneğin gerçel sayılar kümesi R'ye geçilebilir, R'de bu denklemin çözümü vardır.

Homo mathematicus sayı kümelerini sürekli genişleterek N ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R sayı kümelerini keşfetmiştir. (Ya da icat etmiştir, felsefi bakış açısına göre değişir.)

Ne yazık ki gerçel sayılarda da her denklem çözülemez. Örneğin $x^2 + 1 = 0$ denkleminin gerçel sayılarda çözümü yoktur, çünkü karesi negatif olan bir gerçel sayı yoktur. İstediğiniz kadar arayın, bulamazsınız!

Bu yazıda, gerçel sayılar kümesini (çok değil, birazcık) genişletip $x^2 = -1$ denkleminin çözümünün olduğu daha geniş bir "sayı" kümesi tanımlayacağız. Her sayı kümesinde olduğu gibi bu yeni sayı kümesinde de toplama ve çarpma adı verilen işlemler tanımlayacağız, ayrıca aynen kesirli ve gerçel sayılarda da olduğu gibi, bu yeni sayı kümesinde de çıkarma ve bölme gibi işlemler yapılabilecek.

Madem ki $x^2 = -1$ denkleminin gerçel sayılarda çözümü yok, gerçel sayılara karesi −1 olan imgesel ya da hayali bir "sayı" ekleyip gerçel sayıların bu kusurunu gidermeye çalışalım. Bu imgesel sayıya i diyelim. Resimseverler için yukarda bir resim var.



i'yi ekleyince, i'nin

$$2i,\ 3i,\ (-1)i,\ \pi i,\ \sqrt{2}i,\ (-\sqrt{3})i$$

gibi gerçel katlarını da eklemek gerekir ki i imgesel sayısını s gerçel sayısıyla çarpıp si çarpımını elde edebilelim. Örneğin,

π ile i'nin çarpımı πi,
π ile $\sqrt{2}i$'nin çarpımı $\pi\sqrt{2}i$,
-2 ile $(-3)i$'nin çarpımı $6i$,
$(-3)i$ ile -2'nin çarpımı $6i$

olacak, doğal olarak... Çarpmanın değişme özelliğini korumak istiyorsak, ki mümkünse istiyoruz, ama mümkün değilse ondan da vazgeçebiliriz, neyse ki mümkün olacak, i kere π'yi de, π kere i olarak, yani πi olarak tanımlamalıyız. Matematiksel tanımları az sonra vereceğiz, şimdilik sadece içgüdülerimizi izleyip sezgi kazanmaya çalışıyoruz.

i'nin bu gerçel katlarıyla r gerçel sayılarını toplayabilmek için gerçel sayılara bu sayılardan başka bir de ayrıca,

$3 + 2i$,
$(-1) + 2i$,
$\sqrt{2} + (-3)i$,
$(-4\pi) + i$,
$(-\sqrt{3}) + \pi i$,
$(-\sqrt{3}) + (-\sqrt{2})i$

gibi, her $r, s \in$ R için, $r + si$ biçiminde yazılan yeni "sayı"lar ekleyelim. Şimdilik elde ettiğimiz kümeye C diyelim:

$$C = \{r + si : r, s \in R\}.$$

Hiç yoktan var ettiğimiz bu $r + si$ "sayı"larına ***karmaşık*** ya da ***kompleks sayı*** denir.

Tanım gereği, iki $r + si$ ve $r' + s'i$ karmaşık sayısı ancak ve ancak $r = r'$ ve $s = s'$ ise birbirlerine eşit olabilirler.

1. Sil Baştan. Şimdi, daha önce söylenen her şeyi unutup en baştan başlayalım. Her r ve s gerçel sayısı için $r + si$ olarak göstereceğimiz yeni bir "şey" yaratalım. Bu yeni şeylerin kümesine C diyelim:

$$C = \{r + si : r, s \in R\}$$

Hiç yoktan var ettiğimiz bu $r + si$ şeylerine ***karmaşık*** ya da ***kompleks sayı*** denir. Tanım gereği, iki $r + si$ ve $r' + s'i$ karmaşık sayısı ancak ve ancak $r = r'$ ve $s = s'$ ise birbirlerine eşit olabilirler. (Aman dikkat! Burada r ve s gerçel sayılardır. İlerde, $r + si$ ifadesinin r ve s karmaşık sayılar olduğunda da bir anlamı olacak, ama o zaman "iki $r + si$ ve $r' + s'i$ karmaşık sayısı ancak ve ancak $r = r'$ ve $s = s'$ ise birbirlerine eşit olabilirler" önermesi doğru değildir. Bu önermenin doğru olması için r ve s'nin illa ki gerçel sayı olmaları gerekir.)

r, $r + si$ karmaşık sayısının ***gerçel kısmı***dır. s ise ***sanal kısmı***dır. Burada r ve s'nin gerçel sayı olduklarının üstüne bir kez daha ve önemle basarız.

Demek ki iki karmaşık sayının eşit olması için gerek ve yeter koşul **hem** gerçel **hem** de sanal kısımlarının eşit olmalarıdır.

Eğer karmaşık sayılarda toplama ve çarpma işlemlerini olabilecek en "doğal" biçimde yapmak istiyorsak daha fazla "sayı"ya ihtiyacımız yok, bu kadarı bize yeter. Önce toplama: $r + si$ ve $r' + s'i$ karmaşık sayılarını en "doğal" biçimde toplayıp, bu sayıların toplamını

$$(r + r') + (s + s')i$$

olarak tanımlayalım. Çarpma işlemini de içimizden geldiği gibi yapalım:

$$\begin{aligned}(r + si)(r' + s'i) &= r(r' + s'i) + si(r' + s'i)\\ &= rr' + rs'i + sir' + sis'i = rr' + rs'i + sr'i + ss'i^2\\ &= rr' + rs'i + sr'i + ss'(-1) = rr' + rs'i + sr'i - ss'\\ &= rr' - ss' + (rs' + sr')i.\end{aligned}$$

Yani karmaşık sayılarda toplama ve çarpmayı şöyle tanımlayalım:

(1) $$(r + si) + (r' + s'i) = (r + r') + (s + s')i,$$

(2) $$(r + si)(r' + s'i) = (rr' - ss') + (rs' + sr')i.$$

Bunlar tanımdır, sorgulamadan öyle kabul etmek gerekir. Yararlarını göreceğiz.

İki karmaşık sayının farkını da olabilecek en "doğal" biçimde tanımlayalım:

(3) $$(r + si) - (r' + s'i) = (r - r') + (s - s')i.$$

2. Gerçel de Karmaşıktır! $r + 0i$ karmaşık sayısı yerine r yazmak kolay kolay karşı koyulacak bir dürtü olmadığından, biz de bundan böyle böyle yapacağız. Böylece her r gerçel sayısını $r + 0i$ karmaşık sayısı olarak görebileceğiz. Örneğin,

$0 + 0i$ yerine 0,

$1 + 0i$ yerine 1

yazacağız. Bu surette, bir anlamda, ve birazdan göreceğimiz üzere çok güçlü bir anlamda, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$'nin altkümesi olarak algılanabilir. Aslında $r + 0i$ karmaşık sayısı r gerçel sayısının karmaşık sayılarda sadece bir "temsili"dir, ama biz bu iki sayı arasında olabildiğince fark gözetmemeye çalışacağız.

Ayrıca $0 + si$ karmaşık sayısı yerine sadece si yazacağız. Bir de,

$1i$ yerine i,

$(-1)i$ yerine $-i$,

$(-\sqrt{2})i$ yerine $-\sqrt{2}\, i$

yazacağız. Bununla yetinmeyip, $r + (-s)i$ gerçel sayısı yerine sadece $r - si$ yazacağız. Bunun gibi bize doğal gelen her türlü kısaltmayı yapacağız.

Eski yazılım	Yeni yazılım
$0 + 0i$	0
$1 + 0i$	1
$(-3) + 0i$	-3
$r + 0i$	r
$0 + 1i$	i
$0 + (-1)i$	$-i$
$0 + 5i$	$5i$
$0 + si$	si
$3 + (-2)i$	$3 - 2i$
$(-3) + 2i$	$-3 + 2i$
$(-3) + (-2)i$	$-3 - 2i$

Soru: 3 ve 5 karmaşık sayılarının çarpımı 3 ve 5 gerçel sayılarının çarpımına eşit midir? (Evet!)

Yukardaki sorunun önemini farkettiniz mi? İki gerçel sayıyı toplayıp çarpabiliriz. Ama acaba çıkan sonuçlar, iki gerçel sayıyı karmaşık sayı olarak görüp (1) ve (2) tanımlarını uygulayarak toplayıp çarptığımızda da aynı olur mu? Yanıt, bir sonraki bölümde göreceğimiz üzere evet'tir.

3. Ama O Kadar da Karmaşık Değildir! Karmaşık sayıları toplayıp çarparken, karmaşık sayılar yerine gerçel sayılar alırsak, yani (1) ve (2)'deki tanımlarda $s = s' = 0$ alırsak, o zaman gerçel sayılardaki bildiğimiz toplamayı ve çarpmayı buluruz, yani gerçel sayıları karmaşık sayılarmış gibi toplayıp çarparsak, gerçel sayılardaki toplamı ve çarpımı buluruz:

$$\begin{aligned}r + r' &\to (r + 0i) + (r' + 0i) = (r + r') + (0 + 0)i\\ &= (r + r') + 0i = r + r',\\ rr' &\to (r + 0i)(r' + 0i) = (rr' - 0\cdot 0) + (r0 - 0r')i\\ &= rr' + 0i = rr'.\end{aligned}$$

En soldaki $r + r'$ ve rr', gerçel sayıların karmaşık sayı olarak görüldüğündeki toplam ve çarpımıdır, en sağdaki $r + r'$ ve rr' ise gerçel sayıların bildiğimiz toplamı ve çarpımıdır; her iki işlem de aynı sonucu verdi! Demek ki oklar yerine eşitlik işareti de kullanabilirdik.

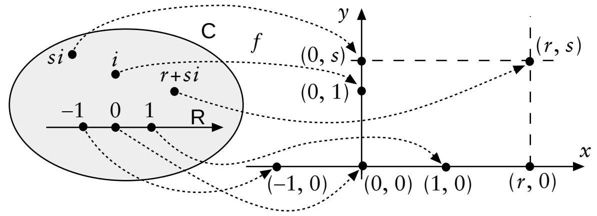
Ayrıca i'nin karesi de gerçekten -1'dir:

$$\begin{aligned}i^2 &= ii = (1i)(1i) = (0 + 1i)(0 + 1i)\\ &= (0\cdot 0 - 1\cdot 1) + (0\cdot 1 - 1\cdot 0)i = -1 + 0i = -1.\end{aligned}$$

Her şey tam istediğimiz gibi seyrediyor... Çünkü her şeyi tam istediğimiz gibi tanımlıyoruz!

Bundan böyle $r + 0i$ karmaşık sayısıyla r gerçel sayısı arasında bir fark gözetmemize nerdeyse hiç gerek yok, toplama, çarpma ve hatta (kolayca görüleceği üzere) çıkarma işlemleri bile aynı.

4. Geometrik Temsil. Her $r + si$ karmaşık sayısını, $\mathbb{R}^2$ düzleminin (r, s) noktası olarak "temsil edebiliriz/yorumlayabiliriz". Nitekim, $r + si$ karmaşık sayılarıyla $\mathbb{R}^2$ düzleminin (r, s) noktaları arasında bir eşleme vardır; ne de olsa iki $r + si$ ve $r' + s'i$ karmaşık sayısının (aynen düzlemin (r, s) ve



Karmaşık sayılar kümesi C R × R kümesi

(r', s') noktaları için olduğu gibi) ancak ve ancak $r = r'$ ve $s = s'$ ise birbirlerine eşit olabileceklerini karmaşık sayıların tanımında söylemiştik. Daha matematiksel bir söylemle,

(4) $$f(r + si) = (r, s)$$

kuralı, $\mathbb{C}$ ile $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümeleri arasında bir

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

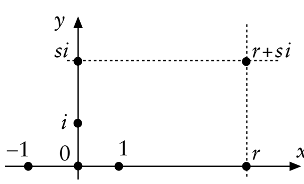
eşlemesi tanımlar. Bu eşleme altında her $r + si$ karmaşık sayısı düzlemin bir ve bir tek (r, s) noktasına karşılık gelir.

Böylece cebirsel ve oldukça yapay biçimde tanımlanmış olan karmaşık sayıların geometrik, dolayısıyla daha somut ve fiziksel bir "temsili"ni (ya da yorumunu) elde ettik. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesinin (r, s) elemanı $\mathbb{C}$ kümesinin $r + si$ elemanını "temsil eder". Bu temsilde,

$0 = 0 + 0i$ sayısı $(0, 0)$ noktasına,
$1 = 1 + 0i$ sayısı $(1, 0)$ noktasına,
$i = 0 + 1i$ sayısı $(0, 1)$ noktasına
$-i = 0 + (-1)i$ sayısı $(0, -1)$ noktasına

eş düşer/tekabül eder/karşılık düşer vs.

Her r gerçel sayısı, geometrik temsilde x ekseninin üstündeki bir $(r, 0)$ noktasına eş düşer. i'nin gerçel katları olan $\mathbb{R}i$ kümesiyse geometrik temsilde y ekseni olarak gösterilmiştir.



Resimde, $r+si$ karmaşık sayısını, geometrik temsili olan (r, s) noktası olarak gösterdik. Buna pek hakkımız yok ama dayanamadık!

Böylece, bir anlamda, karmaşık sayıları, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesinin elemanlarıymış gibi görebiliriz.

5. Toplamanın Geometrik Yorumu. Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$'de toplama ve çarpma diye iki işlem tanımladık. Bu işlemler $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesinde hangi işleme tekabül eder? (Sorumuzun anlamı birazdan daha açık olacak.)

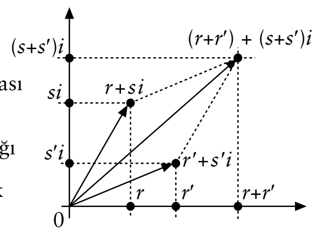
Karmaşık sayılardaki toplama işleminin geometrik temsildeki anlamını anlamak oldukça kolay:

- $r + si$ karmaşık sayısı, (4)'ten dolayı geometrik temsilde, düzlemin (r, s) noktasına eş düşüyor.
- $r' + s'i$ karmaşık sayısı, (4)'ten dolayı geometrik temsilde, düzlemin (r', s') noktasına eş düşüyor.
- Bu karmaşık sayıların toplamı olan

$$(r + si) + (r' + s'i) = (r + r') + (s + s')i$$

karmaşık sayısı ise, geometrik temsilde, (4)'ten dolayı düzlemin $(r + r', s + s')$ noktasına eş düşüyor.

Karmaşık sayıların toplaması geometrik temsilde vektör toplamasına tekabül eder. Resimde, hakkımız olmadığı halde, (r, s) vektörü yerine temsil ettiği $r + si$ karmaşık sayısını yazdık.



Demek ki, $r + si$ ve $r' + s'i$ karmaşık sayılarının toplamı olan

$$(r + si) + (r' + s'i) = (r + r') + (s + s')i$$

sayısı, karmaşık sayıların temsil edildiği $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ düzleminde, bildiğimiz

$$(r', s') + (r, s) = (r + r', s + s')$$

vektör toplamasına eş düşüyor. Yani her α, β karmaşık sayısı için,

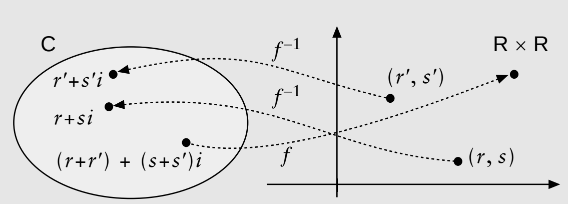
$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$$

eşitliği geçerlidir. Modern matematikçi bunu, "geometrik temsil (ya da yukarda tanımladığımız f fonksiyonu) toplamaya saygı duyuyor" şeklinde ifade eder.

Bundan, örneğin, her $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ için,

$$\alpha + 0 = \alpha$$
$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma,$$
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

özellikleri çıkar, çünkü aynı özellikler vektör toplaması için de geçerlidir. Ama bu özellikler, karmaşık sayılarda (1) formülüyle verilen toplamanın tanımından hareketle doğrudan da kanıtlanabilir. Öğrenci okur bunu her eşitliğin hakkını vererek kanıtlamalıdır.



Sağ taraftaki R × R kümesinden $v = (r, s)$ ve $w = (r', s')$ elemanlarını alalım. Bu elemanları f^{-1} ile sol taraftaki C kümesinin $r+si$ ve $r'+s'i$ elemanlarına yollayalım. Sonra bunları (1) formülüyle toplayıp çıkan sonucu f ile tekrar R × R kümesine taşıyalım. $v + w = (r+r', s+s')$ elemanını elde ederiz. Yani her $v, w \in$ R × R için,

$$f(f^{-1}(v) + f^{-1}(w)) = v + w$$

eşitliği geçerlidir. Karmaşık sayılardaki toplama, temsilde, bildiğimiz vektör toplamasına tekabül eder. Aynı şeyi toplama yerine çarpma için yaparsak nasıl bir sonuç elde ederiz? Bu yazının bir amacı da bu soruyu yanıtlamak.

6. Eksi. Karmaşık sayıların çarpımının R × R kümesinde hangi geometrik işleme tekabül ettiğini daha sonra göreceğiz. Düzlemde iki vektörün çarpımı henüz tanımlanmadığından, R'de çarpımının R × R'de tekabül ettiği işlem daha önce bilmediğimiz yepyeni bir işlem olacak. Hatta bu geometrik işlemi bulmayı yazının amacı haline getireceğiz.

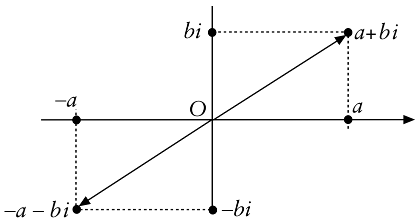
Toplamanın bir özelliğini daha ortaya koyalım: Eğer $\alpha = a + bi$ bir karmaşık sayıysa, $-\alpha$ karmaşık sayısı,

(5) $$-\alpha = (-a) + (-b)i$$

olsun. (Bu sayıyı $-a - bi$ olarak yazmaya karar vermiştik anımsarsanız.) O zaman, tahmin edileceği ve kolayca sınanacağı üzere,

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$$

eşitliği geçerlidir. Yani her α karmaşık sayısının toplamaya göre tersi vardır: $-\alpha$.



$a+bi$ karmaşık sayısının toplamaya göre tersinin geometrik temsili, $a+bi$'nin geometrik temsilinin O noktasına göre simetriğidir. Burada da, hakkımız olmadığı halde, (a, b) yerine temsil ettiği $a + bi$ karmaşık sayısını yazdık.

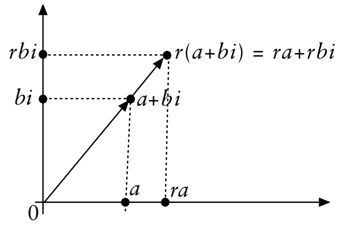
7. Gerçel Sayıyla Karmaşık Sayıyı Çarpmak. Bir r gerçel sayısıyla bir $a + bi$ karmaşık sayısını çarpalım. (Burada a ve b gerçel sayılardır. Ne zaman bir karmaşık sayıyı $a + bi$ gibi ifade edecek olsak a ve b'nin gerçel sayı olduklarını söylemeden varsayacağız.)

$$r(a + bi) = (r + 0i)((a + bi)$$
$$= (ra - 0b) + (rb + 0a)i = ra + rbi.$$

Bu çarpım düzlemde neye eş düşüyor?

• $a + bi$ karmaşık sayısı düzlemin (a, b) noktasına eş düşüyor.

• $r(a + bi)$ karmaşık sayısı, yani $ra + rbi$ karmaşık sayısı düzlemin (ra, rb) noktasına, yani $r(a, b)$ noktasına eş düşüyor.



Bir r gerçel sayısıyla bir $a+bi$ karmaşık sayısının çarpımı, $a+bi$ karmaşık sayısının tekabül ettiği (a, b) vektörünün r ile çarpımına tekabül eder.

Bu aşamada (aslında her aşamada!) okur 2α'nın $\alpha + \alpha$'ya eşit olduğunu da kanıtlayabilir. (2α'da çarpma var: 2'yle α'nın çarpımı. $\alpha + \alpha$ teriminde ise toplama var.)

Soru: Acaba $(-1)\alpha$, $-\alpha$ mı? Ya $1\alpha = \alpha$ ve $0\alpha = 0$ eşitlikleri? Bunlar da doğru mu? Tabii ki!

Umarız okur yukarda gerçekten bir soru olduğunun farkına varmıştır!

8. Karmaşık Sayıyı Gerçel Sayıya Bölmek. Eğer $r \neq 0$ bir gerçel sayıysa, herhangi bir α karmaşık sayısını $1/r$ ile çarpabiliriz. Çıkan sonucu α/r yazılımıyla gösterelim, yani $(1/r)\alpha = \alpha/r$ olsun.

Bir karmaşık sayıyı bir başka karmaşık sayıya bölmeyi daha bilmediğimize dikkatinizi çekerim. Her şey zamanla...

Soru: $\alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$ eşitliği doğru mu?

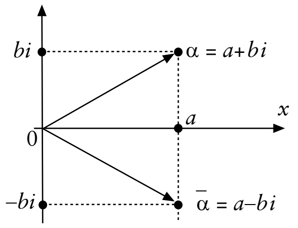
9. Eşleniklik. Gelelim iki karmaşık sayının çarpımının geometrik anlamına... Ama önce eşlenikliği tanımlayalım, gerekecek. Eğer $\alpha = a + bi$ bir karmaşık sayıysa, α'nın ***eşleniği***

$$\overline{\alpha} = a - bi$$

olarak tanımlanır.

Eşlenikliğin aşağıdaki özellikleri çok önemlidir (daha doğrusu, eşleniklik aşağıdaki özelliklerinden dolayı çok önemlidir):

• Toplamın eşleniği eşleniklerin toplamına eşittir. Matematikçe söyleyecek olursak, her $\alpha, \beta \in$



Bir α karmaşık sayısının eşleniğinin geometrik temsili, α'nın temsilinin x eksenine göre simetriğidir.

C için,

(8) $$\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

eşitliği geçerlidir. Bunun kanıtı kolaydır. (Karmaşık sayılarda toplamanın ve eşleniğin tanımından hemen çıkar.)

• Çarpımın eşleniği eşleniklerin çarpımına eşittir: Her α, β ∈ C için,

(9) $$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$$

eşitliği geçerlidir. Bunun da kanıtı kolaydır, karmaşık sayılarda çarpmanın ve eşleniğin tanımından hemen çıkar, sadece biraz hesap yapmak gerekir.

Demek ki eşleniklik toplamaya ve çarpmaya saygı duyuyor. Kolayca kanıtlanacağı üzere, eşleniklik çıkarmaya da saygı duyar. İlerde karmaşık sayıları birbirine bölmeyi öğrendiğimizde, eşlenikliğin bölmeye de saygı duyduğu kanıtlanabilir.

• Bir karmaşık sayının eşleniğinin eşleniği karmaşık sayının kendisidir, yani her α ∈ C için,

(10) $$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$$

eşitliği geçerlidir. Bunun kanıtı aşırı (!) kolaydır (karmaşık sayılarda eşleniğin tanımından hemencecik çıkar.)

Polinom Kökleri ve Eşleniklik

Eğer α karmaşık sayısı

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

gerçel polinomunun köküyse, yani

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

ise, o zaman α'nın eşleniği olan $\overline{\alpha}$ da aynı gerçel polinomun köküdür, yani

$$a_n\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{\alpha} + a_0 = 0$$

dır. Bu, eşlenikliğin toplamaya ve çarpmaya saygı duymasından ve gerçel sayıları etkilememesinden kaynaklanır. Nitekim α'lı ilk eşitliğin her iki tarafının da eşleniğini alırsak aynen $\overline{\alpha}$'lı eşitliği buluruz, çünkü gerçel sayı olan a_i katsayıları eşleniklikten etkilenmezler.

İkinci dereceden her gerçel polinomun karmaşık sayılarda en az bir kökü olduğunu kanıtlayabilir misiniz? Aynı şey karmaşık polinomlar için de geçerlidir.

• Bir karmaşık sayı, ancak ve ancak eşleniğine eşitse bir gerçel sayıdır. Yani bir gerçel sayı eşleniklikten etkilenmez ve eşleniklikten sadece gerçel sayılar etkilenmezler.

• Eşleniklik, yukardaki özellikleri sağlayan tek fonksiyondur.

i'nin eşleniğinin de $-i$ olduğunu gözlemleyelim.

10. Norm. Çarpmanın geometrik yorumunu iyice kavrayabilmek için ***norm*** kavramına ihtiyacımız var. Bir α karmaşık sayısının normu,

$$N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} \tag{11}$$

olarak tanımlanır. Örneğin, 1, –1, i, $-i$ sayılarının herbirinin normu 1'dir. Eğer a gerçel sayıysa, a'nın normunun a^2 olduğuna dikkatinizi çekerim:

$$N(a) = a\overline{a} = aa = a^2. \tag{12}$$

Ayrıca, her α ∈ C için,

$$N(\alpha) = N(\overline{\alpha}) \tag{13}$$

eşitliği normun tanımının doğrudan bir sonucudur.

Bir karmaşık sayının normu her zaman bir gerçel sayıdır, üstelik pozitif bir gerçel sayıdır. Nitekim, eğer $\alpha = a + bi$ ise,

$$N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \tag{14}$$

dir. (Son eşitliğe hemen inanmadıysanız, haklısınız; kolay bir hesapla *i*'nin kayıplara karıştığı anlaşılır, gerekiyorsa tanıma geri dönüp hesaplayın.)

Eşleniklik çarpmaya saygı duyduğundan, norm da çarpmaya saygı duyar:

$$N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha}\overline{\beta}) = (\alpha\overline{\alpha})(\beta\overline{\beta}) = N(\alpha)N(\beta),$$

yani, her α, β ∈ C için,

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta). \tag{15}$$

Bu kanıtın eksik olduğunun farkına vardınız mı? Hem de bir değil iki eksiği var! Kanıtın birinci eşitliğinde sorun yok. İkinci eşitliğinde de yok. Dördüncüsünde de yok... Ama üçüncüsünde, yani $(\alpha\beta)(\overline{\alpha}\overline{\beta}) = (\alpha\overline{\alpha})(\beta\overline{\beta})$ eşitliğinde sorun var, hem de bir değil iki sorun var. Önce, çarpmada parantezleri kaldırdık, sonra da β ile $\overline{\alpha}$'ın yerlerini değiştirdik... Oysa bunları yapmaya hakkımız olup olmadığını henüz bilmiyoruz. Yukardaki kanıtın geçerli olması için

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \tag{16}$$

ve

$$\alpha\beta = \beta\alpha \tag{17}$$

özelliklerini kanıtlamalıyız. Bunlardan birincisi çarpmada parantezleri kaldırmamıza, ikincisiyse sayıların yerlerini değiştirmemize izin verir. İkinci özellik olmadan bir karmaşık sayının üçüncü gücünü kolay kolay alamayız örneğin, çünkü bu özellik doğru değilse, α^3 için $\alpha^2\alpha$ ya da $\alpha\alpha^2$ değerlerinden birini seçmek zorunda kalabiliriz, ki hayat o zaman çok zor olur. Hatta ikinci eşitlik doğru olsa da, eğer birinci eşitlik doğru değilse, α^4 için $\alpha\alpha^3$ ve $\alpha^2\alpha^2$ çarpımlarından birini seçmek zorunda kalırız.

Bu iki özellik kanıtlanmalı. İkincisi, iki kolay çarpma işleminin sonucudur ve okura bırakılmıştır. Birincisiyse gene kolay ama bu kez dört uzun çarpma işleminin sonucudur ve gene okura bırakılmıştır.

Konuya değinmişken karmaşık sayıların dağılma özelliğine değinmemek olmaz: Her $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ için,

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

eşitliği geçerlidir. Bunun kolay ancak sıkıcı kanıtını da geleneğimiz olduğu üzere okura bırakıyoruz. Toplama ve çarpma işlemlerinin bir sonucudur bu.

11. Mutlak değer. Bir sayının normu negatif olmayan bir gerçel sayı olduğuna göre (bkz. 13) normun karekökünü alabiliriz:

(18) $$|\alpha| = \sqrt{N(\alpha)}$$

olsun. Bu bir tanımdır. Tanımı daha açık biçimde yazalım: Eğer $\alpha = a + bi$ ise,

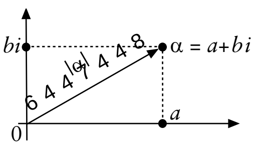
(19) $$|\alpha| = \sqrt{N(\alpha)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Kolayca görüleceği üzere eğer a bir gerçel sayıysa,

(20) $$|a| = \sqrt{N(a)} = \sqrt{a^2} = |a|.$$

(soldaki | |, daha yeni tanımladığımız "normun karekökü" fonksiyonudur, sağdaki | | ise gerçel sayılarda bildiğimiz mutlak değer fonksiyonudur.) Yani, bir gerçel sayının normunun karekökü o gerçel sayının mutlak değerine eşittir. Biz de o zaman bir karmaşık sayının normunun kareköküne o karmaşık sayının ***mutlak değeri*** adını verelim[1]. Karışıklık çıkmayacağını biliyoruz, çünkü her iki kavram da gerçel sayılarda çakışıyor.

Mutlak değerin geometrik yorumu oldukça basittir: Eğer $\alpha = a + bi$ ise, $|\alpha|$, $a^2 + b^2$ sayısının karekökü olduğundan, α'nın mutlak değeri, α'nın geometrik temsili olan (a, b) vektörünün bildiğimiz uzunluğudur.



Bir $a+bi$ karmaşık sayısının mutlak değeri geometrik temsili olan (a, b) vektörünün uzunluğudur.

1. Kimileyin mutlak değer yerine ***modulus*** terimi de kullanılır.

Mutlak değer karmaşık sayılarda da çarpmaya saygı duyar: Eğer α ve β karmaşık sayılarsa,

$$|\alpha\beta| = \sqrt{N(\alpha\beta)} = \sqrt{N(\alpha)N(\beta)} = \sqrt{N(\alpha)}\sqrt{N(\beta)} = |\alpha||\beta|,$$

yani,

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|. \qquad (21)$$

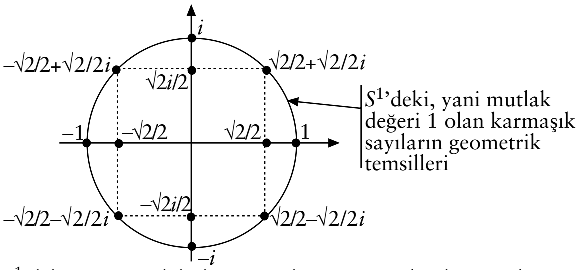
Demek ki mutlak değer de, eşleniklik ve norm gibi çarpmaya saygı duyuyor. Ancak mutlak değer toplamaya hemen hemen hiç saygı duymaz.

Mutlak değeri 1 olan karmaşık sayılar kümesi S^1 ile simgelenir:

$$S^1 = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| = 1\} = \{a + bi : a^2 + b^2 = 1\}.$$

Örneğin, $1, -1, i, -i, \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2, 1/2 + \sqrt{3}i/2 \in S^1$. (21) eşitliğinden dolayı S^1 çarpma altında kapalıdır.

S^1 kümesinin geometrik temsiline gelince... S^1, tanımından dolayı, düzlemde 1 yarıçaplı çembere (yani birim çembere) tekabül eder. Dolayısıyla mutlak değeri 1 olan karmaşık sayıların geometrik temsili birim çemberin üstündedir.

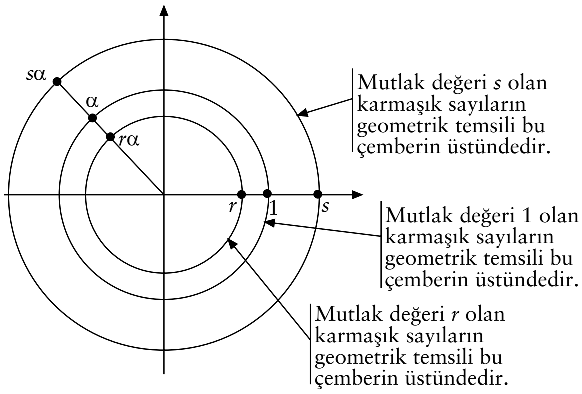


S^1'deki, yani mutlak değeri ya da normu 1 olan karmaşık sayıların geometrik temsili birim çember üzerindedir.

Dikkat: S^1 çarpma altında kapalıdır ama toplama altında kapalı değildir.

Soru. S^1'in iki elemanının toplamı ne zaman gene S^1'de olabilir?

Alıştırma. $S^1 + S^1 = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| \leq 2\}$ eşitliğini kanıtlayın. Daha genel olarak, S^1 kümesinden n sayıyı toplayarak mutlak değeri n'den küçük her karmaşık sayıyı elde edebileceğimizi gösterin.



Eğer α karmaşık sayısının geometrik yorumu birim çember üzerindeyse, $r\alpha$ karmaşık sayısının geometrik yorumu r yarıçaplı çemberin üzerindedir.

Her α karmaşık sayısı için, kolayca görülebileceği üzere,

(22) $$|\bar{\alpha}| = |\alpha|$$

eşitliği de geçerlidir. Demek ki S^1 kümesi eşleniklik altında da kapalıdır, yani α'nın mutlak değeri 1'se, α'nın eşleniği olan $\bar{\alpha}$'ın da mutlak değeri 1'dir.

Bu arada, eğer $r \neq 0$ bir gerçel sayı ve α bir karmaşık sayıysa, α/r karmaşık sayısını $(1/r)\alpha$ olarak tanımladığımızı anımsatırım. Bu tanımı göz önünde bulundurursak,

(23) $$|\alpha/r| = |\alpha|/|r|$$

eşitliği hemen çıkar. Birazdan bu eşitliği kullanacağız.

$N(\alpha) = a^2 + b^2$ eşitliğinden (14), $N(\alpha)$'nın ancak ve ancak α sıfırsa sıfır olabileceği çıkıyor, çünkü a ve b gerçel sayı olduklarından, $a^2 + b^2$ ancak ve ancak $a = b = 0$ ise 0 olabilir. Bunun sonucu göz kamaştırıcıdır: Eğer $\alpha \neq 0$ bir karmaşık sayıysa,

$$\alpha(\bar{\alpha}/N(\alpha)) = \alpha\bar{\alpha}/N(\alpha) = N(\alpha)/N(\alpha) = 1.$$

Sıfır olmayan bir α karmaşık sayısını $\beta = \bar{\alpha}/N(\alpha)$ karmaşık sayısıyla çarparak 1 bulduk. Bundan böyle bu $\bar{\alpha}/N(\alpha)$ sayısına α'nın ***çarpımsal tersi*** diyelim ve bu sayıyı α^{-1} olarak yazalım:

(24) $$\alpha^{-1} = \bar{\alpha}/N(\alpha).$$

Dileyen, her α, β karmaşık sayısı için, yukardaki $\alpha^{-1} = \bar{\alpha}/N(\alpha)$ eşitliğini kullanarak,

$$(\alpha\beta)^{-1} = \alpha^{-1}\beta^{-1}$$
$$(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$$
$$(\bar{\alpha})^{-1} = \overline{\alpha^{-1}}$$
$$N(\alpha^{-1}) = N(\alpha)^{-1}$$

eşitliklerini kanıtlayabilir.

Alıştırmalar.

1. $\alpha \neq 0$ bir karmaşık sayıysa,

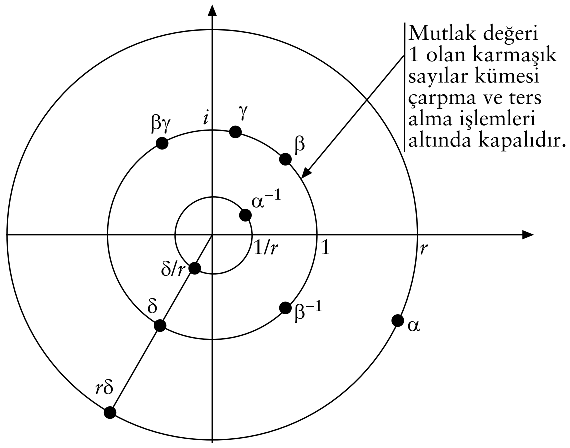
$$\alpha\beta = 1 \text{ ancak ve ancak } \beta = \alpha^{-1}$$

önermesini kanıtlayın.

2. Eğer $\alpha \in S^1$ ise $\bar{\alpha} = \alpha^{-1}$ eşitliğini kanıtlayın.

Bir gerçel sayının karmaşık sayı olarak çarpımsal tersinin bu gerçel sayının gerçel sayı olarak çarpımsal tersine eşit olduğu da kanıtlanabilir: $r^{-1} = \bar{r}/N(r) = r/r^2 = 1/r$.

$N(\alpha^{-1}) = N(\alpha)^{-1} = 1/N(\alpha)$ ve bunun sonucu olan $|\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1} = 1/|\alpha|$ eşitliklerinden, mutlak değeri 1 olan bir α karmaşık sayısının çarpımsal tersinin de mutlak değerinin 1 olduğu çıkar. Yani S^1 kümesi sadece çarpma işlemi altında değil, çarpımsal ters alma işlemi altında da kapalıdır.



Mutlak değeri r olan bir karmaşık sayının çarpımsal tersinin mutlak değeri $1/r$'dir.

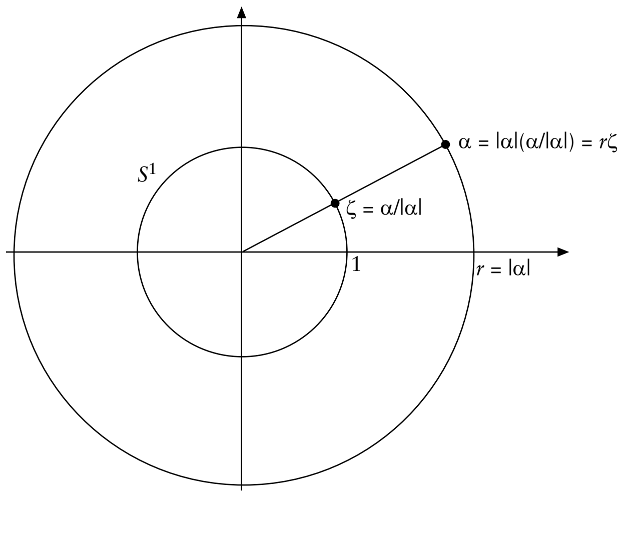
12. Kutupsal Ayrışım. Bir karmaşık sayının mutlak değeri ancak ve ancak o karmaşık sayı 0 ise 0'dır, yoksa mutlak değer hep 0'dan büyük bir gerçel sayıdır, çünkü norm için bu böyle ve mutlak değer normun karekökü... Dolayısıyla 0 olmayan bir α karmaşık sayısını $1/|\alpha|$ gerçel sayısıyla çarpabiliriz, yani α karmaşık sayısını $|\alpha|$ gerçel sayısına bölüp $\alpha/|\alpha|$ karmaşık sayısını elde edebiliriz. Öte yandan $\alpha/|\alpha|$ karmaşık sayısının mutlak değeri (23)'ten dolayı 1'dir:

$$|\alpha/|\alpha|| = |\alpha|/|\alpha| = 1,$$

yani $\alpha/|\alpha| \in S^1$. Böylece,

$$\alpha = |\alpha|\cdot(\alpha/|\alpha|)$$

yazarak, 0 olmayan bir α karmaşık sayısını, $|\alpha| \in \mathbb{R}^{>0}$ gerçel sayısıyla $\alpha/|\alpha| \in S^1$ karmaşık sayısının çarpımı olarak yazabiliriz. Bu geometrik olarak da çok bariz: Birim dairenin yarıçapını şişirerek ya da söndürerek tüm düzlemi tarayabiliriz, dolayısıyla 0 olmayan her vektör, pozitif bir gerçel sayıyla, uzunluğu birim olan bir vektörün çarpımıdır.



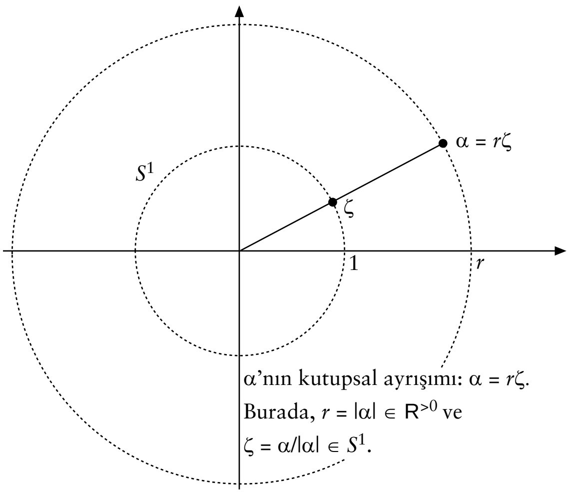
Ayrıca bu yazılım tek bir türlü yapılabilir: Eğer bir $\alpha \neq 0$ karmaşık sayısını bir $r > 0$ gerçel sayısıyla mutlak değeri 1 olan bir $\zeta \in S^1$ karmaşık sayısının çarpımı olarak yazarsak, o zaman $r = |\alpha|$ ve $\zeta = \alpha/|\alpha|$ olur, çünkü,

$$|\alpha| = |r\zeta| = |r||\zeta| = r|\zeta| = r$$

ve $\alpha = r\zeta$ olduğundan,

$$\zeta = \alpha/r = \alpha/|\alpha|.$$

Bir $\alpha \neq 0$ karmaşık sayısının $r \in \mathsf{R}^{>0}$ ve $\zeta \in S^1$ için $\alpha = r\zeta$ olarak yazılışına α'nın ***kutupsal*** ya da ***polar ayrışımı*** adını verelim.



13. Çarpma. Kutupsal ayrışımını kullanarak, karmaşık sayıların çarpımına bir kez daha göz atalım. α ve α', 0 olmayan iki karmaşık sayı olsun. α ve α' karmaşık sayılarının kutupsal ayrışımını yazalım:

$$\alpha = r\zeta$$
$$\alpha' = r'\zeta'$$

Burada, $r, r' \in \mathsf{R}^{>0}$ ve $\zeta, \zeta' \in S^1$. Şimdi α ve α' karmaşık sayılarını çarpalım:

$$\alpha\alpha' = (r\zeta)(r'\zeta') = (rr')(\zeta\zeta').$$

Burada önemli olan, rr' çarpımının da, aynen r ve r' gibi pozitif bir gerçel sayı olduğu ve $\zeta\zeta'$ çarpımının da, aynen ζ ve ζ' gibi S^1'de olduğu: $rr' \in \mathsf{R}^{>0}$ ve $\zeta\zeta' \in S^1$. (S^1 kümesinin çarpma altında kapalı olduğunu anımsayalım.) Demek ki,

$$\alpha\alpha' = (rr')(\zeta\zeta')$$

yazılımı da $\alpha\alpha'$ karmaşık sayısının kutupsal ayrışımıdır.

Demek ki $\alpha\alpha'$ çarpımının geometrik temsilini bulmak için,

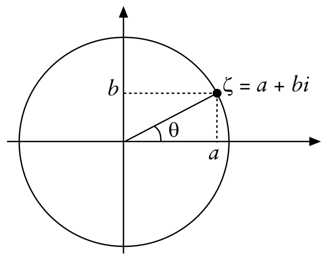
1) rr' pozitif gerçel sayı çarpımını bulmalıyız, ki iki gerçel sayıyı çarpmasını elbette biliyoruz.

2) Mutlak değeri 1 olan ζ ve ζ' karmaşık sayılarının $\zeta\zeta'$ çarpımının geometrik temsilini bulmalıyız. Yani S^1 kümesindeki çarpmayı anlamalıyız.

3) rr' pozitif gerçel sayısıyla $\zeta\zeta'$ karmaşık sayının çarpımının geometrik temsilini bulmalıyız, ki bunu biliyoruz, daha önce görmüştük.

14. Argüman. Sonuç olarak S^1 birim çemberindeki çarpmayı anlamalıyız ve bu çarpımın geometrik yorumunu bulmalıyız. Bundan böyle S^1 kümesine yoğunlaşalım. S^1'in çarpma ve ters alma işlemi altında kapalı olduğunu biliyoruz.

$\zeta \in S^1$ olsun. $a, b \in \mathsf{R}$ için, $\zeta = a + ib$ olarak yazıp α'nın geometrik temsiline bakalım.



ζ'nın geometrik temsilinin x ekseniyle yaptığı açıya θ diyelim. (Bkz. yandaki şekil). Gerekirse θ açısını $[0, 2\pi)$ aralığından alabiliriz, ama buna illa gerek yok. S^1 çemberinin yarıçapı 1 olduğundan, hemen

$$a = \cos\theta$$
$$b = \sin\theta$$

eşitliklerini buluruz. Demek ki S^1'deki her karmaşık sayı, belli bir $\theta \in \mathsf{R}$ için,

$$\cos\theta + i\sin\theta$$

biçiminde yazılabiliyor.

Bunun tersi de doğrudur: Belli bir $\theta \in \mathsf{R}$ için, $\cos\theta + i\sin\theta$ biçiminde yazılan her karmaşık sayı S^1'dedir, çünkü (15)'ten ve Pisagor'dan dolayı,

$$|\cos\theta + i\sin\theta| = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^{1/2} = 1$$

dir.

Ama dikkat: Eğer $\theta \in \mathsf{R}$, $\zeta = \cos\theta + i\sin\theta$ eşitliğini sağlıyorsa, her $n \in \mathsf{Z}$ için, $\theta + 2n\pi$ de aynı eşitliği sağlar, yukarda bulunan θ sayısından tek bir tane yoktur. Ama θ'yı her zaman $[0, 2\pi)$ aralığından tek bir biçimde seçebiliriz.

$\zeta = \cos\theta + i\sin\theta$ eşitliğini sağlayan bir θ sayısına ζ'nın bir açısı diyelim.

Artık S^1'in ne tür karmaşık sayılar içerdiğini biliyoruz. S^1'den iki α ve α_1 karmaşık sayısı alıp bunları

$$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$$

ve

$$\alpha_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$$

biçiminde yazıp çarpalım:

$$\alpha\alpha_1 = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$= (\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1)$$

$+ (\cos\theta \sin\theta_1 + \sin\theta\cos\theta_1)i.$

Ama, birazcık trigonometri (bkz. MD-2003-IV sayfa 67-68) bilgisi olan okur,

$$\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1 = \cos(\theta + \theta_1)$$

ve

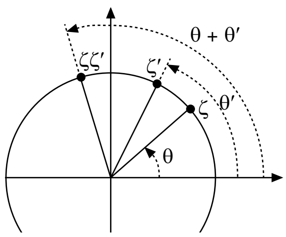
$$\cos\theta\sin\theta_1 + \sin\theta\cos\theta_1 = \sin(\theta + \theta_1)$$

eşitliklerini biliyordur. Dolayısıyla,

$$\zeta\zeta_1 = \cos(\theta + \theta_1) + i\sin(\theta + \theta_1)$$

eşitliği geçerlidir. Çok ilginç bir eşitlik bu: ζ'nın bir açısıyla ζ_1'in bir açısının toplamı, $\zeta\zeta_1$'in çarpımının bir açısıdır:

(23) $$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = \cos(\theta + \theta_1) + i\sin(\theta + \theta_1).$$



Yani S^1 çemberindeki elemanların çarpımının açısı, elemanların açılarının toplamına eşit. Açı logaritma gibi davranıyor, çarpmayı toplamaya dönüştürüyor: Eğer

(24) $$\arg(\zeta) = \theta$$

yazarsak (***argüman***),

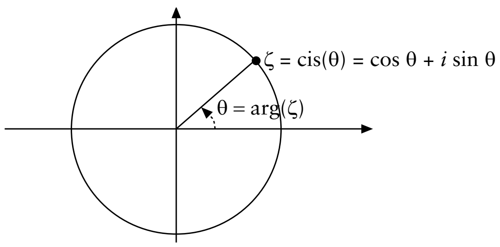
(25) $$\arg(\zeta\zeta_1) = \arg(\zeta) + \arg(\zeta_1)$$

ilişkisi çıkar; yani arg - aynen logaritma gibi - çarpmayı toplamaya dönüştürüyor. (Dikkat: $\arg(\zeta)$'nın tanımının ve yukardaki eşitliğin anlamlı olması için biraz daha dikkatli olmamız gerekirdi. Neden dikkatli olmamız gerektiğini anlayabiliyor musunuz?)

15. cis Fonksiyonu. Şimdi, bir $\theta \in \mathsf{R}$ için,

(26) $$\mathrm{cis}(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

tanımını yapalım. Bu tanımda θ herhangi bir gerçel



sayı olabilir. O zaman, her $\theta, \theta_1 \in \mathsf{R}$ için, (26) ve (23)'ten dolayı

(27) $$\mathrm{cis}(\theta)\mathrm{cis}(\theta_1) = \mathrm{cis}(\theta + \theta_1)$$

eşitliği elde edilir.

Birkaç örnek verelim:

$\mathrm{cis}(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$

$\mathrm{cis}(2\pi) = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1,$

$\mathrm{cis}(\pi) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

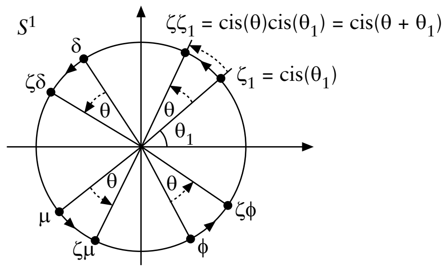
$\mathrm{cis}(\pi/2) = \cos\pi/2 + i\sin\pi/2 = i,$

$\mathrm{cis}(\pi/3) = \cos\pi/3 + i\sin\pi/3 = (1 + i\sqrt{3})/2,$

16. S^1'de Çarpma. Şimdi (27) formülündeki θ'yı sabit tutup θ_1'i değiştirelim. θ_1 değiştikçe $\mathrm{cis}(\theta_1)$ sayısı S^1 üzerinde tüm ζ_1 değerlerini alır. Bu $\zeta_1 = \mathrm{cis}(\theta_1)$ sayılarını gene S^1'in $\zeta = \mathrm{cis}(\theta)$ sabit sayısıyla çarpıyoruz. O zaman,

$$\zeta\zeta_1 = \mathrm{cis}(\theta)\mathrm{cis}(\theta_1) = \mathrm{cis}((\theta + \theta_1))$$

formülüne göre, θ_1 açısı θ artıp $\theta_1 + \theta$ oluyor. Yani $\zeta_1 = \mathrm{cis}(\theta_1)$ karmaşık sayısının geometrik temsili, sayı ζ ile çarpılınca θ radyan dönüyor.



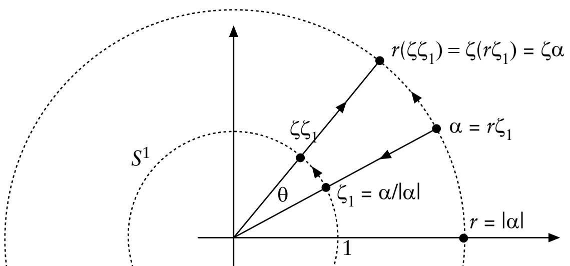
$\zeta = \mathrm{cis}(\theta)$ sayısıyla çarpıldığında, her $\zeta_1 = \mathrm{cis}(\theta_1)$ sayısının geometrik temsili saatin ters yönünde $\theta = \arg(\zeta)$ radyan döner.

Sonuç olarak, S^1'in elemanlarını gene S^1'in bir sayısıyla çarptığımızda, S^1'in tüm elemanlarının geometrik temsillerini belli bir derece (ya da radyan) döndürürüz; eğer sayıları $\zeta = \mathrm{cis}(\theta)$ sayısıyla çarpıyorsak, $\theta = \arg(\zeta)$ kadar döndürürüz.

17. Çarpma. Şimdi, herhangi bir $\alpha \neq 0$ karmaşık sayısını $\zeta = \mathrm{cis}(\theta) \in S^1$ sayısıyla çarpmanın geometrik yorumunu anlayalım. Önce α karmaşık sayısının kutupsal ayrışımını yazalım: $\alpha = r\zeta_1$. Burada $r > 0$ ve $\zeta_1 \in S^1$. Şimdi çarpalım:

$$\zeta\alpha = \zeta(r\zeta_1) = r(\zeta\zeta_1).$$

$\zeta\zeta_1$'in geometrik anlamını biliyoruz, ζ_1'in geometrik temsilini $\arg(\zeta) = \theta$ kadar döndürmek demek. Bunu bir de $r > 0$ gerçel sayısıyla çarpacağız; bunun da geometrik anlamını biliyoruz.

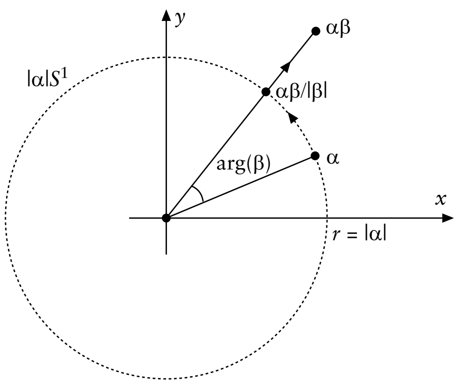


$\alpha \neq 0$ karmaşık sayısını $\zeta = \mathrm{cis}(\theta)$ ile çarpmak için,
1) α'nın poler ayrışımını bul: $\alpha = r\zeta_1$. Burada $r = |\alpha| > 0$ ve $\zeta_1 = \alpha/|\alpha| \in S^1$.
2) ζ_1'i ζ ile çarp. Bu, ζ_1'in temsilini $\arg(\zeta)$, yani θ kadar döndürmek demek.
3) $\zeta\zeta_1$'i $r > 0$ gerçel sayısıyla çarp. Böylece $\zeta\alpha$ bulunur.
Sonuç: $\zeta\alpha$ çarpımının geometrik temsili, α'nın temsili $\theta = \arg(\zeta)$ açısı kadar döndürülerek bulunur.

Bir önceki sayfadaki şekilde de açıklandığı üzere herhangi bir $\alpha \neq 0$ karmaşık sayısıyla $\zeta = \text{cis}(\theta) \in S^1$ sayısının çarpmının geometrik temsili, α'nın geometrik temsili $\arg(\zeta) = \theta$ kadar döndürülerek elde edilir.

> Düzlemde bildiğimiz döndürüyü karmaşık sayıların çarpımı olarak elde ettiğimize dikkatinizi çekerim. Aynı şeyi üç boyutlu uzayın döndürüleri için yapmaya çalışmak XIX. yüzyıl cebircilerini bayağı uğraştırmıştır. Hamilton, üç boyutlu uzayın döndürülerini veren bir cebir için üç boyutu aşmak gerektiğini anlamış, dört boyuta çıkarak kendi adıyla anılan sayıları bulmuştur. Hamilton sayılarını bir başka MD'de ele alırız.

Şimdi herhangi iki α ve β karmaşık sayısının çarpımının geometrik yorumunu bulalım. β, 0 olmasın, yoksa yanıt çok kolay. α'nın geometrik temsilini $\arg(\beta)$ kadar döndürüp çıkan sonucu $|\beta|$ ile çarparsak $\alpha\beta$'nın geometrik temsilidir.



18. De Moivre Formülü. R'den S^1'e giden cis fonksiyonuna biraz daha yakından bakalım. Anımsarsanız, cis fonksiyonu,

$$\text{cis}(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

formülüyle tanımlanmıştır. (27)'ye göre cis fonksiyonu toplamayı çarpmaya dönüştürüyor. (Logaritma çarpmayı toplamaya çevirir, bu tam tersini yapıyor.) Yani her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$\text{cis}(x + y) = \text{cis}(x)\text{cis}(y)$$

eşitliği geçerlidir. Bundan hemen, her $n \in \mathbb{N}$ için,

(28) $$\text{cis}(nx) = \text{cis}^n x$$

formülü çıkar. Burada $\text{cis}^n x$, $(\text{cis } x)^n$ anlamına gelmektedir. Bu formül, illa kanıtlamak gerekiyorsa, n üzerine tümevarımla kolaylıkla kanıtlanabilir. (28) uygulamada çok pratik bir formüldür.

Uygulama. Tanımdan dolayı, bir yandan,

$$\text{cis}(3x) = \cos(3x) + i\sin(3x);$$

diğer yandan,

$$\text{cis}^3 x = (\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x).$$

(28)'i $n = 3$ için yazacak olursak, $\text{cis}(3x) = \text{cis}(x)^3$ elde ederiz ve yukardaki iki formülden,

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x) + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$$

elde edilir. Gerçel ve sanal kısımları eşleyerek,

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$$
$$\sin(3x) = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$$

formüllerini elde ederiz. Benzer yolla, her n için $\cos(nx)$ ve $\sin(nx)$'i $\cos x$ ve $\sin x$ cinsinden yazan formüller elde edebiliriz.

Peki n negatif bir tamsayıysa $\text{cis}(nx)$ neye eşit olacaktır? Bunu bulmak için $\text{cis}(0) = 1$ eşitliğini kullanacağız:

$$1 = \text{cis}(0) = \text{cis}((-n)x + nx) = \text{cis}(-nx)\,\text{cis}(nx).$$

Ama, $-n \in \mathbb{N}$ olduğundan, biraz önce gördüğümüz üzere, $\text{cis}(-nx) = \text{cis}^{-n}x$. Demek ki,

$$1 = \text{cis}(-nx)\text{cis}(nx) = \text{cis}^{-n}x\ \text{cis}(nx).$$

Dolayısıyla,

$$\text{cis}(nx) = 1/\text{cis}^{-n}x = \text{cis}^n x.$$

Bundan da, (28) formülünün yalnızca n doğal sayıları için değil, her n tamsayısı için geçerli olduğu çıkar.

Şimdi de kesirli bir n sayısı için, $\text{cis}(nx)$'in neye eşit olduğunu bulalım. $n = p/q$ olsun. Burada, $p, q \in \mathbb{Z}$. (28) formülünün doğruluğunu tamsayılar için bildiğimizden,

$$\text{cis}^p(x) = \text{cis}(px) = \text{cis}(qnx) = \text{cis}^q(nx),$$

yani

$$\text{cis}^p(x) = \text{cis}^q(nx),$$

elde ederiz. Her iki tarafın da q-üncü kökünü alırsak,

$$\text{cis}^{p/q}(x) = \text{cis}(nx),$$

yani

$$\text{cis}^n(x) = \text{cis}(nx),$$

elde ederiz. Demek ki (28) formülü kesirli sayılar için de geçerlidir.

Buradan, (28) formülünün gerçel sayılar için de geçerli olduğunu söylemek istiyoruz, ancak a ve b gerçel sayıları için a^b sayısının nasıl tanımlandığını bugünkü müfredatla bir lise öğrencisinin bilmesine imkan yoktur. Bu tanım bilinseydi, (28) formülünün gerçel sayılar için de geçerli olduğunu kanıtlayabilirdik. (28) formülüne ***De Moivre formülü*** adı verilir. ♥