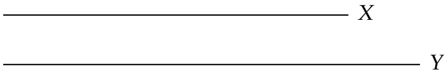
Kapak Konusu: Sıralamalar

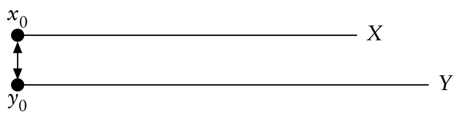
İyisıralamaları Birbirine Gömmek

İki iyi sıralama alalım: $(X, <)$ ve $(Y, <)$. Bunlar tamsıralama olduklarından, her ikisini de aşağıdaki şekildeki

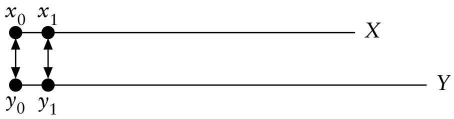


gibi birer doğru üzerinde temsil ederek çok büyük bir yalan söylemiş olmayız. (Temsilde sağdaki elemanlar soldakilerden daha büyük olacaklar.)

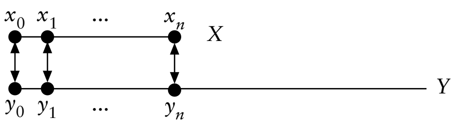
Eğer X ve Y boşküme değillerse her ikisinin de birer en küçük elemanı vardır. Bu elemanlara sırasıyla x_0 ve y_0 diyelim.



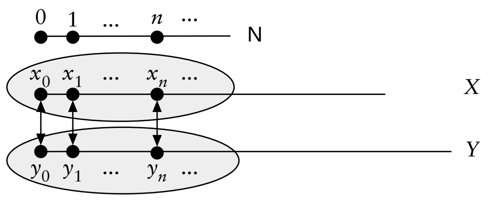
Eğer X ve Y'de eleman kalmışsa o zaman x_0 ve y_0'dan hemen sonra gelen elemanlar vardır. Bu elemanlara sırasıyla x_1 ve y_1 diyelim.



Bunu böyle sürdürebileceğimiz kadar sürdürelim. Eğer X ya da Y sonlu adımda biterse, önce bitenden diğerinin başlangıç dilimine giden bir eşyapı fonksiyonu buluruz. (Başlangıç diliminin tanımı için yan sütundaki gri kareye bakın.)



Eğer ne X ne de Y sonlu adımda bitmezse, o zaman her ikisinde de $\mathbb{N}$'yle eşyapısal olan bir başlangıç dilimi var demektir.



Başlangıç Dilimi

$(X, <)$ bir iyisıralama olsun. $I \subseteq X$ bir altküme olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$y < x \in I$$

koşulları doğru olduğunda,

$$y \in I$$

oluyorsa, I'ye ***başlangıç dilimi*** (İngilizcesi initial segment) adı verilir. Örneğin, her $a \in X$ için,

$$\{x \in X : x < a\}$$

ve

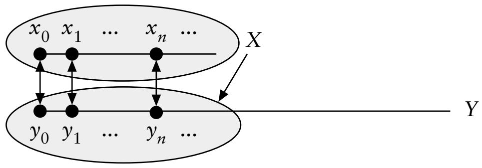
$$\{x \in X : x \leq a\}$$

kümeleri X'in birer başlangıç dilimleridir. Eğer bir başlangıç dilimi X'ten değişikse, o zaman bu başlangıç dilimi, belli bir $a \in X$ için,

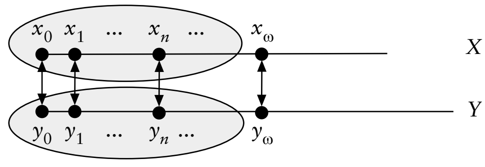
$$\{x \in X : x < a\}$$

kümesine eşit olmalıdır. Nitekim $I \subset X$ bir başlangıç dilimi olsun. a, $X \setminus I$ kümesinin en küçük elemanı olsun. Elbette $\{x \in X : x < a\} \subseteq I$. Diğer istikameti kanıtlayalım. $x \in I$ olsun. Eğer $a < x$ ise başlangıç diliminin tanımından dolayı $a \in I$ olmalı, ki bunun yanlış olduğunu biliyoruz. Eğer $a = x$ ise, o zaman $a = x \in I$ olur, gene yanlış. Demek ki $x < a$. İstediğimizi kanıtladık.

Eğer X ve Y'den biri sadece bu x_n ve y_n elemanlarından oluşmuşsa, o zaman, bu elemanlardan oluşandan (aşağıdaki resimde X'ten) diğerinin başlangıç dilimine giden bir eşyapı fonksiyonu vardır.



Eğer hem X'te hem de Y'de eleman kalmışsa, x_ω ve y_ω kalan elemanların en küçüğü olsun.



Bunu böylecene sürdürebiliriz ve X ya da Y'nin elemanlarını bir zaman sonra tüketebiliriz. Böylece, önce tükeneni diğerinin bir başlangıç dilimine gömebiliriz... gibi bir hisse kapılabilir insan ilk anda ama ikinci anda bundan matematiksel olarak henüz emin olamayacağımızı anlarız...

Yukardaki akıl yürütmenin beyne değil hislere hitap ettiğinin farkına vardınız mı? Matematikte "bunu böylecene sürdürebiliriz" diye bir tümce yazılamaz, böyle bir tümce ancak yazın sanatında yer alabilir. Oysa burada matematik yapılmaktadır.

Bu yazıda yukardaki edebiyatı matematiğe dönüştürerek şu teoremi kanıtlayacağız

Teorem A. $(X, <)$ *ve* $(Y, <)$ *iki iyisıralama olsun. O zaman ikisinden birinden diğerinin bir başlangıç dilimine giden bir eşyapı fonksiyonu vardır ve bu eşyapı fonksiyonu bir tanedir.*

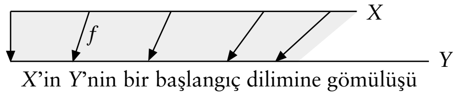
Ayrıca her ikisinden de diğerinin başlangıç dilimine giden eşyapı fonksiyonları varsa, bu eşyapı fonksiyonları eşyapı eşlemeleri (izomorfizmalar) olmak zorundadırlar.

Teoremi şöyle yazmayı tercih ediyoruz:

Teorem A. $(X, <)$ *ve* $(Y, <)$ *iki iyisıralama olsun. O zaman ikisinden biri diğerinin başlangıç dilimine gömülür.*

Ayrıca her ikisi de diğerinin başlangıç dilimine gömülüyorsa, bu gömmeler eşyapı eşlemeleri (izomorfizma) olmak zorundadırlar.

Matematiksel tanımı verelim de sonradan maraza çıkmasın. $(X, <)$ ve $(Y, <)$ birer iyisıralama olsun. $f : X \to Y$ sıralamayı koruyan bir fonksiyon olsun, yani $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ olsun. Bir de ayrıca $f(X)$'in Y'nin bir başlangıç dilimi olduğunu varsayalım. O zaman f'nin X'in Y'nin bir ***başlangıç dilimine gömülüşü*** olduğunu ya da f'nin X'i Y'nin bir ***başlangıç dilimine gömdüğünü*** ve X'in Y'nin ***başlangıç dilimine gömüldüğünü*** söyleyeceğiz.



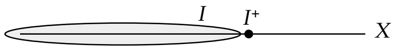
X'in Y'nin bir başlangıç dilimine gömülüşü

Teoremi kanıtlamak biraz zaman alacak. İyisıralamalarda tümevarımla kanıt ilkesini sık sık kullanacağız. (Bkz. sayfa 43-44.)

Bundan böyle X ve Y, iyisıralanmış birer küme simgeleyecekler.

Başlangıç Dilimleri. Tümevarım ilkesini kullanabilmek için bir iki tanıma ihtiyacımız var.

Eğer $I \neq X$ bir başlangıç dilimi ise, I^+, $X \setminus I$ kümesinin en küçük elemanını simgeleyecek. Yani I^+, X'in I'nin bütün elemanlarından daha büyük olan



en küçük elemanıdır. Demek ki $I = \{x \in X : x < I^+\}$. (Bir önceki sayfadaki gri kareye bakın, bu I^+ oradaki a.) Bu arada $I \cup \{I^+\}$ kümesinin de bir başlangıç dilimi olduğuna dikkatinizi çekerim.

Yukarda söylenenlerden hemen şu sonuç çıkar:

Önsav 1. *Eğer I ve J, X'in birer başlangıç kümesiyse, ya $I \subseteq J$ ya da $J \subseteq I$.*

Kanıt: Eğer I ya da J, X ise, sorun yok. Böyle olmadığını varsayalaım. Eğer $I^+ \leq J^+$ ise $I \subseteq J$, aksi halde $J \subseteq I$. □

Aşağıdaki sonuç da yukardakinden çıkar ama biz çeşni olsun diye başka bir kanıt vereceğiz.

Önsav 2. *$\wp$, elemanları X'in bazı başlangıç dilimlerinden oluşan bir küme olsun. O zaman $\cup\wp$, yani $\bigcup_{I \in \wp} I$ bir başlangıç dilimidir.*

Kanıt: $x \in \bigcup_{I \in \wp} I$ ve $y < x$ olsun. Demek ki bir $I \in \wp$ için $x \in I$. Ama I bir başlangıç dilimi. Demek ki $y \in I$. Dolayısıyla $y \in \bigcup_{I \in \wp} I$. □

Alıştırma. $\{I^+ : I \in \wp\}$ kümesiyle $(\bigcup_{I \in \wp} I)^+$ elemanı arasında nasıl bir ilişki vardır?

Bir sonraki önsavın tümevarımda nasıl kullanılacağını görmek için kâhin olmaya gerek yok.

Önsav 3. *f, X'in Y'nin bir başlangıç dilimine bir gömülüşü olsun. I, X' in bir başlangıç dilimi olsun.*

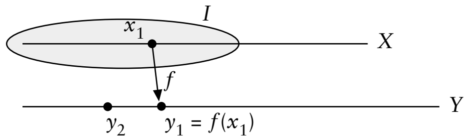
a) *O zaman $f(I)$, Y'nin bir başlangıç dilimidir.*

b) *Eğer $I \neq X$ ise, $f(I^+) = f(I)^+$.*

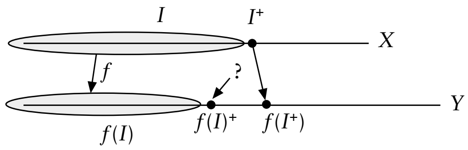
Kanıt: a) $y_1 \in f(I)$ ve $y_2 < y_1$ olsun. y_2'nin $f(I)$'de olduğunu kanıtlayacağız.

Madem ki $y_1 \in f(I)$, $f(x_1) = y_1$ eşitliğini sağlayan bir $x_1 \in I$ vardır.

$y_1 \in f(X)$ ve $f(X)$ bir başlangıç dilimi olduğundan, y_1'den küçük olan y_2 de $f(X)$'in bir elemanıdır. $f(x_2) = y_2$ eşitliğini sağlayan bir $x_2 \in X$ elemanı alalım. $f(x_2) = y_2 < y_1 = f(x_1)$ olduğundan, $x_2 < x_1$ olmalı. Ama $x_1 \in I$. Demek ki $x_2 \in I$ ve $y_2 = f(x_2) \in f(I)$.



b) I^+, I'nin bütün elemanlarından daha büyük olduğundan, $f(I^+)$, $f(I)$'nin bütün elemanlarından daha büyük olmalı. Demek ki $f(I)^+ \leq f(I^+)$. Dolayısıyla ($f(X)$ bir başlangıç dilimi olduğundan) $f(I)^+$



$\in f(X)$ ve bir $x \in X$ için, $f(x) = f(I)^+$ olmalı. $f(x) = f(I)^+ \leq f(I^+)$ olduğundan, $x \leq I^+$ olmalı. Eğer $x < I^+$ ise, o zaman $x \in I$ ve $f(x) \in f(I)$ olur ki bu da $f(x) = f(I)^+ \notin f(I)$ ile çelişir. Demek ki $x = I^+$. □

Önsav 4. *X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine en fazla bir tane gömme vardır.*

Kanıt: f ve g, X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden iki gömme olsun. Her $x \in X$ için $f(x) = g(x)$ eşitliğini kanıtlayacağız. Demek ki,

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

tanımını yaparsak, A'nın X'e eşit olduğunu kanıtlamamız gerekiyor. Tümevarımla kanıt ilkesini kullanacağız.

$x \in X$ olsun ve $I = \{y \in X : y < x\}$ kümesinin A'nın bir altkümesi olduğunu varsayalım. Eğer x'in de A'da olduğunu kanıtlarsak, tümevarım ilkesine göre A'nın X'e eşit olduğunu kanıtlamış olacağız ve önsavımız kanıtlanmış olacak.

Ama $x = I^+$ ve Önsav 1b'ye göre, $f(x) = f(I^+) = f(I)^+ = g(I)^+ = g(I^+) = g(x)$. Demek ki $x \in A$. □

Yukardaki önsava göre X'in bir başlangıç diliminden Y'nin bir başlangıç dilimine en fazla bir tane gömme vardır. Nitekim eğer I, X'in bir başlangıç dilimiyse, Önsav 4'ü X yerine I'ye uygulayabiliriz.

Önsav 5. *Özdeşlik fonksiyonu* Id, *X'ten X'in bir başlangıç dilimine giden bir gömmedir. Önsav 4'ten dolayı başka da böyle bir gömme yoktur.* □

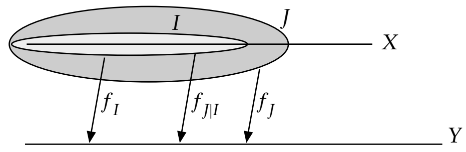
Teoremin Birinci Yarısının Kanıtı: $\wp$, Y'nin bir başlangıç dilimine gömülen X'in başlangıç dilimleri kümesi olsun. Yani,

$$\wp = \{ I \subseteq X : I \text{ başlangıç dilimi ve } I\text{'den } Y\text{'nin bir başlangıç dilimine giden bir gömme var}\}$$

olsun.

Önsav 4'e göre, eğer $I \in \wp$ ise, I'den Y'nin bir başlangıç kümesine giden sadece bir tane gömme vardır. Bu gömmeye f_I adını verelim.

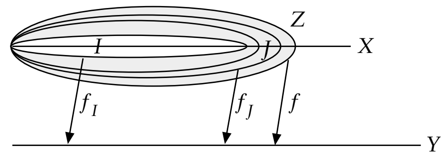
Eğer I ve J, X'in iki başlangıç dilimiyse, Önsav 1'e göre ya $I \subseteq J$ ya da $J \subseteq I$. Diyelim $I \subseteq J$. f_J gömmesi J'den Y'ye gidiyor ve $I \subseteq J$ olduğundan, f_J fonksiyonunu I'de değerlendirebiliriz. Şimdi $x \in I$ için, $f_J(x) = f_I(x)$ eşitliğini savlıyorum ve hemen kanıta geçiyorum.



f_J fonksiyonunun I'ye kısıtlanmasına $f_{J|I}$ diyelim. Yani, $f_{J|I}$ fonksiyonu, her $x \in I$ için,

$$f_{J|I}(x) = f_J(x)$$

kuralıyla tanımlanan I'den Y'ye giden fonksiyondur. $f_{J|I}(I) = f_J(I)$ olduğundan, Önsav 3'e göre $f_{J|I}(I)$ bir başlangıç dilimidir. Demek ki $f_{J|I}$ de f_I



gibi, I'den Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir gömme. Önsav 4'e göre,

$$f_{J|I} = f_I.$$

Demek ki, her $x \in I$ için, $f_I(x) = f_{J|I}(x) = f_J(x)$.

Şimdi $Z = \cup\wp = \bigcup_{I \in \wp} I$ olsun. Z'nin $\wp$'de olduğunu kanıtlayacağız. Bu da Z'nin $\wp$'nin en büyük elemanı olduğunu gösterecek, çünkü ne de olsa Z, $\wp$'nin elemanlarının birleşimi.

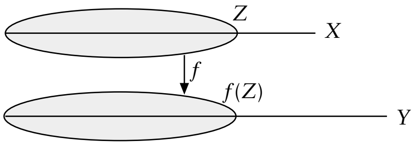
Önsav 2'ye göre Z, X'in bir başlangıç dilimidir. Z'den Y'ye giden bir f fonksiyonu tanımlayacağız. $x \in Z$ olsun. O zaman bir $I \in \wp$ için $x \in I$. Şimdi $f(x)$'i $f_I(x)$ olarak tanımlayalım. Bu tanım yasaldır çünkü, I yerine, x'in içinde bulunduğu bir başka $J \in \wp$ seçseydik, bir üstteki paragrafta yaptıklarımızdan dolayı $f_I(x) = f_J(x)$ olur. Yani $f(x)$'in tanımı, seçilen I başlangıç diliminden bağımsızdır. Bu da tanımın yasal olduğunu gösterir.

Şimdi f'nin sıralamaya saygı duyan bir fonksiyon olduğunu kanıtlayacağım. Bunun kanıtı oldukça kolay. $y < x \in Z$ olsun. Demek ki bir $I \in \wp$ için $x \in I$. O zaman y de I'de. Demek ki,

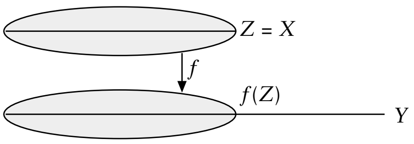
$$f(y) = f_I(y) < f_I(x) = f(x).$$

Böylece f'nin sıralamaya saygı duyduğunu kanıtlamış olduk.

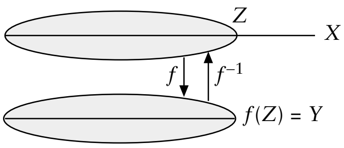
Önsav 3a'dan dolayı $f(Z)$'nin Y'nin bir başlangıç dilimi olduğunu biliyoruz. Demek ki f, Z'den Y'nin bir başlangıç dilimine bir gömme. Dolayısıyla $Z \in \wp$ ve Z, $\wp$'nin en büyük elemanı. Durum şöyle:



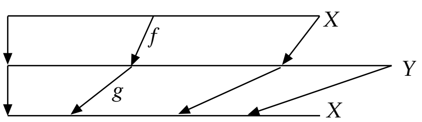
Eğer $Z = X$ ise işimiz bitmiştir, çünkü o zaman X, Y'nin bir başlangıç dilimine gömülür.



Eğer $f(Z) = Y$ ise de işimiz bitmiştir, çünkü o zaman Y, f^{-1} sayesinde X'in bir başlangıç dilimine (Z'ye) gömülür.

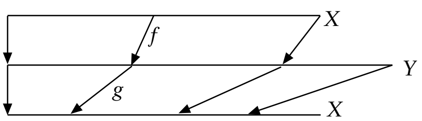


Şimdi $Z \neq X$ ve $f(Z) \neq Y$ varsayımlarını yapalım. Bir çelişki elde edeceğiz. Bu durumda Z^+ ve $f(Z)^+$ elemanları vardır. Şimdi X'in $Z \cup \{Z^+\}$ baş-

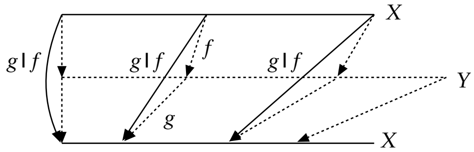


langıç kümesinden Y'nin $f(Z) \cup \{f(Z)^+\}$ başlangıç kümesine giden ve sıralamayı koruyan bir fonksiyon bulabiliriz. Bunun için, Z üzerine tanımlı olan f'yi Z^+ elemanını $f(Z)^+$ elemanına götürecek biçimde genişletmek yeterli. Ama o zaman da $Z \cup \{Z^+\} \in \wp$ olur. Bu da Z'nin $\wp$'nin en büyük elemanı olmasıyla çelişir. □

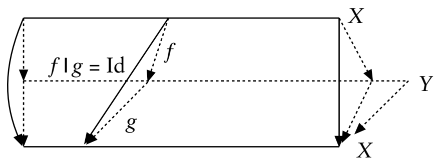
Teoremin İkinci Yarısının Kanıtı: f, X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir gömme olsun. g, Y'den X'in bir başlangıç dilimine giden bir



gömme olsun. O zaman, $g \mid f$, X'ten X'in bir başlangıç dilimine giden bir gömmedir. Önsav 4'e gö-



re $g \mid f = \mathrm{Id}$. Demek ki her $x \in X$ için $g(f(x)) = x$. Dolayısıyla g örtendir, yani bir eşyapı eşlemesidir.



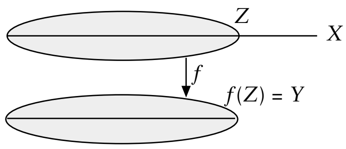
Eğer f örten değilse, o zaman Y' de $f(X)^+$ diye bir eleman vardır. Elbette her $x \in X$ için, $f(x) < f(X)^+$. Bu eşitsizliğin her iki tarafına da g'yi uygularsak, her $x \in X$ için, $x = g(f(x)) < g(f(X)^+)$, yani

$$x < g(f(X)^+)$$

olur. Bu eşitlikte eğer $x = g(f(X)^+)$ alırsak, ki g örten olduğundan bunu yapabiliriz, bir çelişki elde ederiz. Demek ki f de örtendir, yani f de bir eşyapı eşlemesidir. □

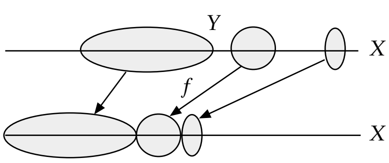
Yukardaki teoremin kanıtından aşağıdaki sonuç çıkar:

Kanıtın Sonucu 6. *X ve Y birer iyisıralama olsun. O zaman, Y' nin bir başlangıç dilimine gömülen X' in bir en büyük Z başlangıç dilimi vardır ve bir tanedir. Ayrıca eğer $Z \neq X$ ise bu gömme örten olmak durumundadır, yani $Z \approx Y$' dir.*



Nitekim kanıtta bulunan X' in Z altkümesi tam bu başlangıç dilimidir.

Teorem B. *X'in her altkümesi (iyisıralı bir küme olarak) X' in tek bir başlangıç dilimine ve tek bir biçimde gömülür.*



Teoremin Tartışması. Yukardaki şekilden de görüleceği üzere X'in Y altkümesini sola kaydıracağız. Sorun, bu "sola kaydırma"yı matematikçe ifade edip teoremi kanıtlamak. Ve aslında teoremi kanıtlamakta karşılaşılan tek sorun bu.

Teorem, solda her zaman Y için **yeterince** yer olduğunu söylüyor. Yani arka kapıdan binilen bir otobüste, ayaktaki yolcular ön kapıya doğru ilerleyip yanyana durabilirler, yolcular ön kapıya doğru ilerlediklerinde arkada yer açılır, otobüste yer kalmaması diye bir sorun yaşanmaz, yolcu sayısı sonsuz, hatta çok çok sonsuz bile olsa...

Benim engin deneyimime göre birinci sınıf matematik öğrencileri burada neyin kanıtlanması gerektiğini anlayamıyorlar. "Elbette Y'nin elemanlarını sola doğru itekleyebiliriz" diyorlar. Belki Y sonluysa 'elbette' de, Y sonsuz olduğunda "elbette" kanıtı hafif kaçabilir. Ayrıca, bariz bile olsa, matematikte her şeyin kanıtlanması gerekir.

Bir derste iki saatimi bu 'itelemenin' hiç de bariz olmadığını, burada bir şeylerin kanıtlaması gerektiğinin anlaşılmasına harcadığımı anımsıyorum. Öğrencilerden ısrarla "sola kaydırmayı" matematikçeye çevirmelerini istedim. Sonunda buldular. "Sola kaydırmak" demek "f gömmesi artmayan bir fonksiyondur" demektir, yani her $y \in Y$ için $f(y) \leq y$ eşitsizliği geçerlidir demektir. "Y'yi sola kaydırmak" edebiyattır, oysa

"her $y \in Y$ için $f(y) \leq y$"

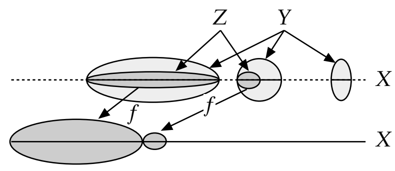
matematiktir. (Bkz. aşağıdaki kanıttaki Arasav.)

Öğretmen arkadaşlarıma yukardaki aşamayı ısrarla öğrencilere atlatmalarını öneririm. Bu alıştırma matematiğin ne olduğunu öğretme konusunda son derece faydalıdır.

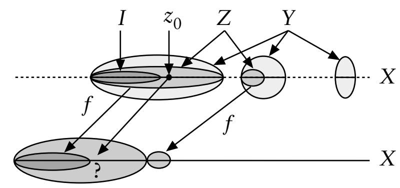
Teoremin Kanıtı: X'in altkümesine Y diyelim. Y de iyisıralı bir altkümedir (iyisıralamayı X'ten miras almıştır.) Yukarda kanıtladığımız teoreme göre ya X, Y'nin ya da Y, X'in bir başlangıç dilimine gömülür. Dolayısıyla eğer X, Y'nin başlangıç dilimine gömülmüyorsa o zaman teoremimiz kanıtlanmıştır. Ama ne yazık ki X bazen Y'nin başlangıç dilimine gömülebilir. Örnek: $X = \mathbb{N}$ ve $Y = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ise, $f(x) = x + 1$ fonksiyonu X'i Y'ye (ki Y, Y'nin bir başlangıç dilimidir) gömer. Dolayısıyla bu kanıt denemesi fiyaskoyla sonuçlanır.

Bir başka yol bulmalıyız.

Biraz önce çıkardığımız sonucu (Sonuç 6'yı) kullanacağız. O sonuçta X ile Y'nin yerlerini değiştirelim. O zaman X'in bir başlangıç dilimine gömülen Y'nin en büyük bir başlangıç dilimi vardır. Bu başlangıç dilimine Z diyelim. Z'nin Y'ye eşit olduğunu kanıtlamak istiyoruz.



Z'yi X'in başlangıç dilimine gömen gömmeye de f adını verelim.



oynandı xx

Z'nin Y'ye eşit olmadığını varsayıp bir çelişki elde etmeye çalışalım. Eğer $Z \neq Y$ ise, o zaman Sonuç 6'ya göre $f(Z) = X$ olmalı. (Kanıtı anımsayın: Yoksa f'yi bir adım daha genişleterek Z'den daha büyük bir başlangıç dilimi bulabiliriz ve bu bir çelişki olur.)

Arasav. *Her $z \in Z$ için $f(z) \leq z$.*

Savın Kanıtı: Savı tümevarımla kanıtlayacağız.

$$A = \{z \in Z : f(z) \leq z\}$$

olsun. A'nın Z'ye eşit olduğunu tümevarımla kanıtlayacağız. Bir $z_0 \in Z$ için, Z'nin z_0'dan küçük elemanlarının A'da olduklarını varsayıp, z_0 elemanının A'da olduğunu kanıtlayalım. Yani

$$I = \{z \in Z : z < z_0\} \subseteq A$$

varsayımında bulunup $z_0 \in A$ ilişkisini kanıtlayalım. Ama $I^+ = z_0$ ve Önsav 3b'ye göre

$$f(z_0) = f(I^+) = f(I)^+.$$

Öte yandan her $z \in I \subseteq A$ için, $f(z) \leq z < z_0$. Demek ki z_0, $f(I)$'nin her elemanından daha büyük, yani $f(I)^+ \leq z_0$. Bundan da $f(z_0) = f(I^+) = f(I)^+ \leq z_0$ çıkar. Arasavımız kanıtlanmıştır.

Şimdi teoremin kanıtının sonunu getirebiliriz. Eğer $Z \neq Y$ ise, o zaman $Y \setminus Z$ boşküme değildir. $Y \setminus Z$ kümesinden bir y elemanı alalım. O zaman, her $z \in Z$ için, $f(z) \leq z < y$. Dolayısıyla y, $f(Z)$'de değil. Demek ki $f(Z) \neq X$ ve bu Sonuç 6'yla çelişir. □

Sonuç 7. *Eğer bir X iyisıralamasından bir Y iyisıralamasına giden sıralamayı koruyan bir fonksiyon varsa, o zaman X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir (ve bir tek) gömme vardır.* ♣