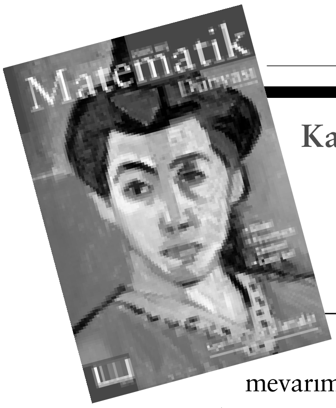


Kapak Konusu: Sıralamalar

İyisıralamalarda Tümevarım

Doğal sayılar kümesi N'de tümevarımla kanıt yapmasını biliyoruz. Anımsayalım:

Teorem [Doğal Sayılarda Tümevarım İlkesi 1]. $A \subseteq \mathrm{N}$ *bir altküme olsun. A'nın şu iki özelliği olduğunu varsayalım:*

1) $0 \in A$.
2) *Her n doğal sayısı için*, $n \in A$ *ise o zaman* $n + 1 \in A$.

Bu durumda $A = \mathrm{N}$*'dir.*

Bu teoremi doğal sayıları ve doğal sayılar kümesi N'yi tanımladığımız 2003-IV sayımızda sayfa 45'te kanıtlamıştık. Aynı sayıda, sayfa 48'de ikinci bir tümevarım ilkesi daha kanıtlamıştık:

Teorem [Doğal Sayılarda Tümevarım İlkesi 2]. $A \subseteq \mathrm{N}$ *bir altküme olsun. X'in şu özelliği olduğunu varsayalım:*

Her n doğal sayısı için, eğer
$$\{m \in \mathrm{N} : m < n\} \subseteq A$$
ise, o zaman $n \in A$.

Bu durumda $A = \mathrm{N}$*'dir.*

Bu teoremlerden en azından biri olmadan doğal sayılar hakkında ele gelir bir teorem kanıtlayamayız.

Birinci teorem doğal sayılarda toplamayla ilgili bir şey söylüyor. İkinci teoremde ise toplama yerine sadece < eşitsizliği var. Birinci teoremi olmasa da ikinci teoremi iyisıralamalara genelleştirebiliriz. En azından ikinci teoremin aynısını iyisıralamalar için formüle edip kanıtlamaya çalışabiliriz.

Birinci teorem de, yazıldığı biçimde değil ama buna yakın bir biçimde iyisıralamalara genelleştirilebilir. Bunu daha sonra ordinaller için yapacağız.

Bu yazının amacı bu ikinci tümevarım ilkesini doğal sayılardan iyisıralamalara genelleştirmek.

Teorem [İyisıralamalarda Tümevarım İlkesi]. $(X, <)$ *bir iyi sıralama olsun.* $A \subseteq X$ *bir altküme olsun. A'nın şu özelliği olduğunu varsayalım:*

Her $x \in X$ *için, eğer*
$$\{y \in X : y < x\} \subseteq A$$
ise, o zaman $x \in A$.

Bu durumda $Y = X$*'dir.*

Kanıt: Diyelim, A, X'e eşit değil. O zaman $X \setminus A$ kümesi boş değildir. Dolayısıyla X iyisıralamasının $X \setminus A$ altkümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x diyelim.

x, $X \setminus A$ altkümesinin en küçük elemanı olduğundan, x'ten küçük hiçbir eleman $X \setminus A$ kümesinde olamaz, yani x'ten küçük her eleman A'dadır. Varsayılan koşula göre x, A'da olmalı. Bir çelişki elde ettik. Demek ki A, X'e eşit olmalı. □

Görüldüğü gibi kanıt çok basit. Nasıl doğal sayılarla ilgili en küçük bir gerçeği kanıtlamak için tümevarım kullanılıyorsa, iyisıralamalarda da en küçük bir şeyi kanıtlamak için tümevarım gerekir. İyisıralamalarda tümevarımsız bir şey kanıtlanamaz. Şu tuhaf teorem dışında...

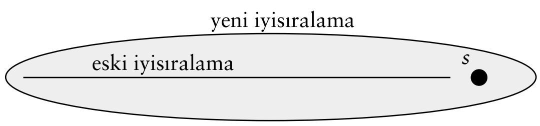
Teorem. *İyisıralı bir kümede sürekli azalan bir dizi yoktur.*

Kanıt: $(X, <)$ iyisıralı bir küme olsun. $(x_n)_n$, X'in sürekli azalan bir dizisi olsun. Demek ki her $n < m$ doğal sayıları için $x_n, x_m \in X$ ve eğer $n < m$ ise $x_m < x_n$. Bir çelişki elde edeceğiz.
$$A = \{x_n : n \in \mathrm{N}\}$$
olsun. A'nın bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x_n diyelim. Ama o zaman $x_{n+1} \in A$ ve $x_{n+1} < x_n$, bir çelişki. □

içi gri xx

Bir Uygulama. Yukardaki kanıt tekniğinin bir uygulamasını görelim şimdi.

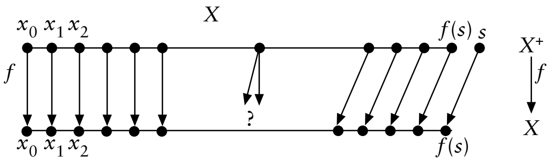
Sayfa 23'te, bir iyisıralamanın sonuna yeni bir eleman ekleyerek yeni bir iyisıralama elde ettik. Yeni iyisıralamanın resmi aşağıdaki gibi.



Eğer X bir iyisıralamaysa, X'in sonuna bir eleman eklenerek elde edilen sıralamaya X^+ diyelim.

Bu yazıda X iyisıralamasıyla X^+ iyisıralamasının gerçekten farklı olduklarını kanıtlayacağız. Daha matematiksel bir deyişle, aralarında bir eşyapı eşlemesi olmadığını kanıtlayacağız. Daha açık bir deyişle, X^+'dan X'e giden ve sıralamayı koruyan (yani artan) bir eşleme olmadığını kanıtlayacağız.

Kanıta girişmeden önce problemi biraz tartışalım. Diyelim X^+'dan X'e giden ve sıralamayı koruyan (yani artan) bir eşleme var. Bu eşlemeye f diyelim ve f'yi anlamaya çalışalım.



Yukardaki şekilden takip edin. f, X^+ iyisıralamasının ilk elemanlarını (ki bunlar X'in de ilk elemanlarıdır) gene kendilerine götürmeli, yani f başlangıçta her x'i gene kendisine götüren özdeşlik fonksiyonu olmalı. Örneğin X^+'nın ilk elemanı (ki bu X'in ilk elemanıdır) f altında gene X'in ilk elemanına gitmeli, yoksa f hiçbir zaman X'in ilk elemanına değemez ve dolayısıyla örten olamaz.

X'in ilk elemanlarına şekildeki gibi x_n dersek, $f(x_n) = x_n$ eşitliği hemen hemen bariz olmalı. Yani sol tarafta asayiş berkemal, her eleman f altında kendisine gidiyor.

Öte yandan, X^+'nın en son elemanına, şekilde olduğu gibi, s dersek, $f(s)$, X'in en son elemanı olmalı, çünkü eğer $y \in X$ ise, belli bir $x \in X^+$ için, $y = f(x)$'tir ve $x \leq s$ olduğundan, $y = f(x) \leq f(s)$'dir.

Şimdi $f(s)$'nin f altında gittiği eleman olan $f(f(s))$'ye, yani $f^2(s)$'ye bakalım. Bu eleman $f(s)$'den hemen önceki eleman olmalı, çünkü $f(s)$, s'den hemen önceki elemandır. Aynı nedenden, $f^2(s)$, $f(s)$'den hemen önce gelen eleman olduğundan, $f^3(s)$, $f^2(s)$'den hemen önce gelen eleman olmalı.

Görüldüğü gibi sol tarafta özdeşlik fonksiyonu olan f, sağ tarafta elemanları bir eksiltiyor... Ortalarda bir yerde sorun çıkmalı... Bir yerde f elemanı kendisine mi götürmek, yoksa eksiltmek mi gerektiğine birtürlü karar verememeli...

Yukardaki parlak fikir ne yazık ki matematiksel olarak beş para etmez. "Ortalarda bir yer" diye bir yerden sözedilemez matematikte.

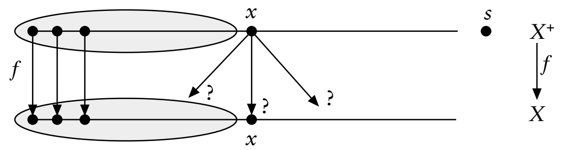
Söylediğimizi kanıtlayacağız ama tümevarım kullanarak kanıtlayacağız. Tümevarımla, her $x \in X$ için $f(x) = x$ eşitliğini kanıtlayacağız. Böylece s'ye gidecek yer kalmayacak ve bir çelişki elde edeceğiz.

$$A = \{x \in X : f(x) = x\}$$

olsun. A'nın X'e eşit olduğunu kanıtlayacağız. Bunun için, X'ten herhangi bir x elemanı alıp,

$$\{y \in X : y < x\} \subseteq A$$

varsayımından yola çıkıp $x \in A$ ilişkisini kanıtlamalıyız.



oynadım
xx

Demek ki x'ten küçük her elemanın f altında kendisine gittiğini varsayıyoruz ve x'in de f altında kendisine gittiğini kanıtlayacağız.

$f(x)$ elemanına bakalım. Bu elemanın nerede olduğunu anlamaya çalışacağız.

$f(x)$, x'ten küçük olamaz. Aksi takdirde $f(x) \in A$, yani $f(f(x)) = f(x)$ olurdu ve f birebir olduğundan $f(x) = x$ olurdu, bir çelişki.

$f(x)$, x'ten büyük olamaz. Aksi takdirde X^+'nın hiçbir elemanı x'e değemezdi. Nitekim eğer $f(y) = x$ ise, $f(y) = x < f(x)$ ve $y < x$. Ama o zaman da $y \in A$ ve $x = f(y) = y < x$ eşitsizliği bize beklediğimiz çelişkiyi verir.

Demek ki $f(x) = x$. ♣