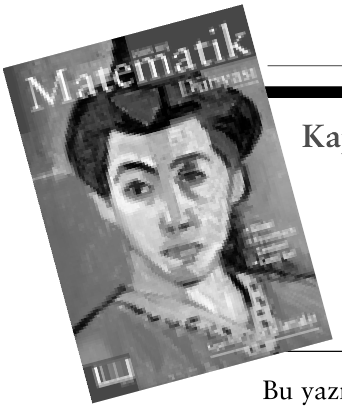
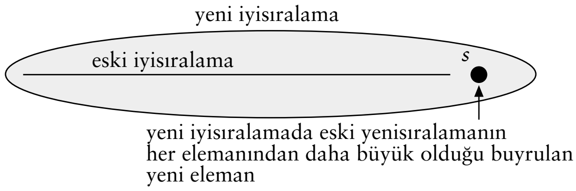


Kapak Konusu: Sıralamalar

Eski İyisıralamalardan Yeni İyisıralamalar Türetmek

Bu yazıda eski iyisıralamalardan yenilerini elde etmeyi öğreneceğiz. Basitten zora doğru gideceğiz.

İyisıralamanın sonuna bir eleman eklemek. Bu paragrafta, bir iyisıralamanın 'en sonuna' yeni bir eleman ekleyeceğiz.



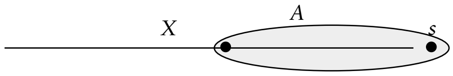
$(X, <)$ bir iyisıralama olsun. s, X'te olmayan bir eleman olsun. X'teki sıralamayı koruyarak ama s'yi X'in her elemanından büyük yaparak $X \cup \{s\}$ kümesini sıralayabiliriz. $X \cup \{s\}$ kümesi üzerine kurulan ve $\bullet$ olarak simgeleyeceğimiz bu yeni sıralama biçimsel olarak şöyle tanımlanır: $x, y \in X \cup \{s\}$ için, $x \bullet y$ ancak ve ancak

1) $x, y \in X$ ve $x < y$ ise

ya da

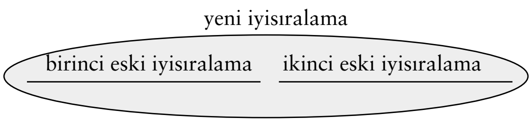
2) $x \in X$ ve $y = s$ ise.

Bu sıralama da bir iyisıralamadır. Nitekim A, $X \cup \{s\}$ kümesinin boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer $A \cap X \neq \emptyset$ ise, o zaman $A \cap X$ kümesinin $<$ sıralamasına göre en küçük elemanı A'nın $\bullet$



sıralamasına göre en küçük elemanıdır. Öte yandan eğer $A \cap X = \emptyset$ ise o zaman $A = \{s\}$ olmak zorundadır ve s elbette bu durumda A'nın en küçük elemanıdır.

İki İyisıralamayı Toplamak. Bu paragrafta bir iyisıralamayı bir başka iyisıralamanın 'sonuna' ekleyerek yeni bir iyisıralama elde edeceğiz.



$(X, <)$ ve $(Y, <)$ iki iyisıralama olsun. Şimdilik X ve Y kümelerinin ayrık olduklarını (yani kesişmediklerini) varsayalım. $X \cup Y$ kümesi üzerine, $X + Y$ adını vereceğimiz bir sıralama tanımlayacağız. $X \cup Y$ kümesini, X ve Y'nin sıralamalarını koruyarak, ama Y'nin elemanlarını X'in elemanlarından daha büyük olduklarına hükmederek sıralayalım. Biçimsel tanım şöyle: $u, v \in X \cup Y$ için, $u \bullet v$ ancak ve ancak

1) $u, v \in X$ ve $u < v$ ise

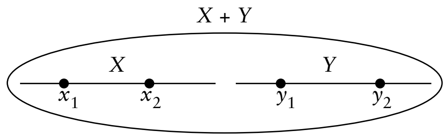
ya da

2) $u, v \in Y$ ve $u < v$ ise

ya da

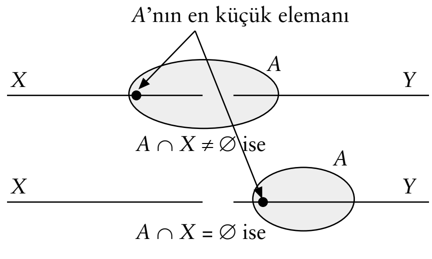
3) $u \in X$ ve $v \in Y$ ise.

$X + Y$ sıralamasının resmi aşağıda.



$X + Y$ sıralaması; $x_1 \bullet x_2 \bullet y_1 \bullet y_2$

Bu da bir iyisıralamadır. Nitekim A, $X \cup Y$ kümesinin boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer A'nın X'le kesişimi boş değilse, o zaman $A \cap X$ altkümesinin X sıralamasına göre en küçük elemanı A'nın en küçük elemanıdır. Eğer A'nın X'le kesişi-

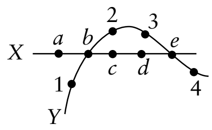


mi boşsa, o zaman A, Y'nin boş olmayan bir altkümesidir ve A'nın Y sıralamasındaki en küçük elemanı A'nın $X + Y$'nin sıralamasındaki en küçük elemanıdır.

Eğer X ve Y kümeleri kesişiyorlarsa, o zaman X yerine $X \times \{0\}$, Y yerine $Y \times \{1\}$ alalım ve X ve Y'nin sıralamalarını sırasıyla $X \times \{0\}$ ve $Y \times \{1\}$ kümelerinin üstüne taşıyalım. Sonra yukarda X ve Y

ile yaptığımızı artık ayrık olan $X \times \{0\}$ ve $Y \times \{1\}$ kümeleriyle yapalım.

Bunu bir örnekle gösterelim. X ve Y bir sonraki şekildeki gibi olsunlar.



Yani

$$X = \{a < b < c < d < e\}$$

ve

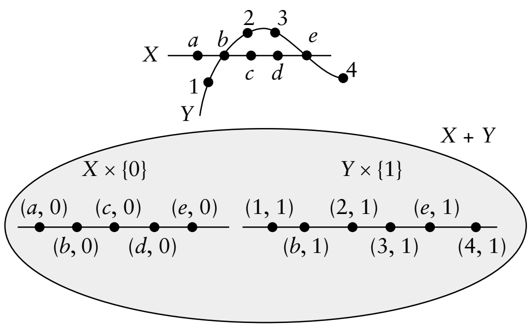
$$Y = \{1 < b < 2 < 3 < e < 4\}$$

olsun. Bu iki sıralamayı şöyle yazalım:

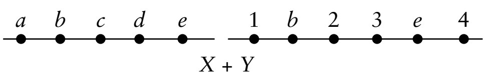
$X \times \{0\}$: $(a,0) < (b,0) < (c,0) < (d,0) < (e,0)$,

$Y \times \{1\}$: $(1,1) < (b,1) < (2,1) < (3,1) < (e,1) < (4,1)$.

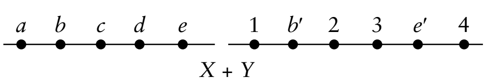
Dikkat ederseniz X'ten $X \times \{0\}$'a geçerken X'in sıralamasını koruduk. Aynı özeni Y için de gösterdik. Şimdi, aşağıdaki şekildeki gibi $X \times \{0\}$'ın elemanlarından hemen sonra $Y \times \{1\}$'in elemanlarını yazalım.



Matematikçi günlük koşuşturma arasında bu kadar çok özen göstermez. X ve Y kesişse bile X ve Y'nin elemanlarını iki kez yazar. Örneğin, profesyonel matematikçi yukardaki örneği,

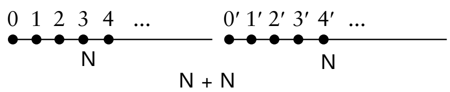


olarak yazar, ama bilir ki birinci b ile ikinci b farklı elemanlardır. Eğer çok başı sıkışırsa, $X + Y$'yi



olarak gösterir.

Örneğin N + N iyisıralaması, N iyisıralamasının sonuna aynı sıralamanın bir kopyası konarak elde edilir. İşte resmi:



Alfabetik Sıralama ya da İki İyisıralamayı Çarpmak. $(X, <)$ ve $(Y, <)$ iki iyisıralama olsun. Bu bölümde $X \times Y$ kümesini iyisıralayacağız. $X \times Y$ kümesininin (x, y) elemanlarını önce y'ye göre sıralayacağız, yani ikinci koordinatı büyük olan çift büyük olacak. Eğer ikinci koordinatlar eşitse, o zaman birinci koordinatlara bakacağız, yani ikinci koordinatları eşit olan çiftleri birinci koordinatlara göre sıralayacağız. Tanım şöyle: (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) çiftleri $X \times Y$ kümesininin iki elemanı olsun. Eğer

$$x_1 < x_2$$

ise ya da

$$x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 < y_2$$

ise, (x_1, y_1)'in (x_2, y_2)'den daha küçük olduğunu söyleyeceğiz ve bunu

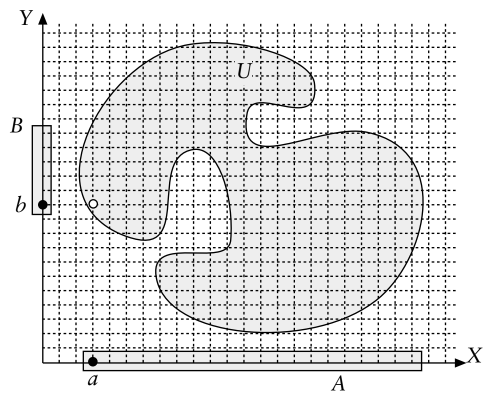
$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$$

olarak yazacağız.

Bunun bir sıralama olduğu çok bellidir. Bir iyisıralama olduğunu kanıtlayalım. U, $X \times Y$ kümesininin boş olmayan bir altkümesi olsun.

$$A = \{x \in X : \text{bir } y \in Y \text{ için } (x, y) \in U\}$$

olsun. A, boşküme olamaz. Demek ki A'nın bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana a diyelim.



$$B = \{y \in Y : (a, y) \in U\} = (\{b\} \times Y) \cap U$$

olsun. $a \in A$ olduğundan, B boşküme olamaz. Demek ki B'nin de bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana b diyelim. $b \in B$ olduğundan, $(a, b) \in U$.

Şimdi (a, b)'nin U'nun en küçük elemanı olduğunu savlıyorum ve hemen kanıtlıyorum.

(x, y), U'nun herhangi bir elemanı olsun. Demek ki $x \in A$. Dolayısıyla $x \geq a$. Eğer $x > a$ ise, elbette $(a, b) < (x, y)$. Eğer $x = a$ ise, o zaman $(a, y) = (x, y)$ in U olduğundan, $y \in B$. Demek ki $y \geq b$. Eğer $y > b$ ise, o zaman elbette $(a, b) = (x, b) < (x, y)$. Eğer $y = b$ ise, o zaman $(a, b) = (x, y)$. Kanıtımız tamamlanmıştır. ♣