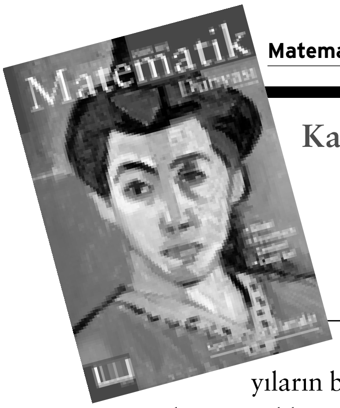


Kapak Konusu: Sıralamalar

Sayılabilir Yoğun Sıralamalar

Bu yazının konusu kesirli sayıların bildiğimiz $(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasıdır. Burada sözü edilen < eşitsizliği ilkokuldan beri âşina olduğumuz eşitsizliktir; örneğin $2/3 < 4/5$.

Daha sonra matematiksel olarak ifade edeceğimiz şu olguyu kanıtlayacağız:

$(\mathbb{Q}, <)$ *sıralamasının birazdan açıklayacağımız bazı özelliklerine sahip sıralamalar "aynen ama aynen"* $(\mathbb{Q}, <)$ *sıralamasına benzeyen sıralamalardır.*

Bir başka ama gene edebi bir deyişle, $(\mathbb{Q}, <)$ sıralaması birazdan sıralayacağımız birkaç özelliği tarafından betimlenebilir/karakterize edilir.

Şöyle (saçmasapan) bir örnek alalım: Bir ailenin her ferdinin alnının tam ortasında üçüncü bir göz varsa ve dünyada başka kimsede böyle bir üçüncü göz yoksa, o üçüncü soyadı yerine geçebilir! Buna benzer (!) bir kimlik arayışını $(\mathbb{Q}, <)$ sıralaması için yapacağız.

$(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasının özünü karakterize eden bu 'bazı özellikleri' birazdan sıralayacağız. 'Aynen ama aynen benzemek'i ise sayfa 28'de tanımladığımız 'eşyapısal olmak' anlamına kullandık. Gene de eşyapısallığı bu yazıda bir kez daha tanımlayacağız.

Önce $(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasını karakterize edecek olan önemli özelliklerini teker teker yazalım.

Her şeyden önce $(\mathbb{Q}, <)$ bir ***sıralama***dır, yani,

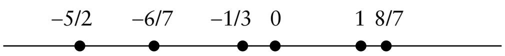
(1) *Hiç bir x için, $x < x$ doğru değildir.*

(2) *Her x, y, z için, eğer $x < y$ ve $y < z$ ise, o zaman $x < z$'dir.*

$(\mathbb{Q}, <)$ yalnızca bir sıralama değil, ayrıca bir ***tamsıralamadır*** da: Herhangi iki kesirli sayı birbiriyle kıyaslanabilir:

(3) *Her x, y için, ya $x < y$ ya $x = y$ ya da $y < x$.*

Bunun sonucu olarak kesirli sayıları bir doğru üstünde temsil edebiliriz. Matematkçiler arasında yapılan gizli bir anlaşma gereği, soldaki sayılar



$(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasının temsili. Mesafeler korunmamış olabilir ama sıralama korunmuştur.

sağdakilerden daha küçüktür.

Ayrıca $(\mathbb{Q}, <)$ ***yoğun*** bir sıralamadır: Herhangi iki kesirli sayı arasında üçüncü bir kesirli sayı vardır, daha matematiksel bir dille,

(4) *Her $x < y$ için, $x < z < y$ eşitsizliklerini sağlayan bir z vardır.*

Örneğin $z = (x + y)/2$ kesirli sayısı x'le y arasındadır.

En az iki elemanı olan bir yoğun sıralama sonsuz olmak zorundadır elbette. Öte yandan $(\mathbb{Z}, <)$ sıralaması sonsuzdur ama yoğun değildir.

$(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasında ne en küçük ne en büyük eleman vardır, yani her kesirli sayıdan daha büyük bir kesirli sayı ve her kesirli sayıdan daha küçük bir kesirli sayı vardır:

(5) *Her x için, $x < y$ eşitsizliğini sağlayan bir y vardır.*

(6) *Her x için, $y < x$ eşitsizliğini sağlayan bir y vardır.*

(5)'te $y = x + 1$, (6)'da $y = x - 1$ alabiliriz.

Son iki özelliği sağlayan sıralamalara (ucu bucağı olmayan anlamında) ***uçsuz sıralamalar*** denir. Örneğin, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, pozitif kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}^{>0}$, $(0, 1)$ gerçel aralığı ve $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ kümeleri doğal sıralamayla birlikte uçsuz ve yoğun sıralamalardır. Öte yandan $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ gerçel sayı aralığı uçsuz değildir.

$\mathbb{Q}$ kümesinin bir özelliği daha vardır:

(7) *Sayılabilir sonsuzluktadır.*

Yani kesirli sayıları 0, 1, 2, 3, 4, ... diye doğal sayıları kullanarak koyun sayar gibi hiçbirini atlamadan teker teker sayabiliriz; her kesirli sayıyı doğal sayılarla numaralandırabiliriz (bunu nasıl yapabileceğimizin üç değişik yöntemini sayfa 17-18'de görmüştük). Öte yandan, gerçel sayıları tanımlayacağımız sayıda göreceğimiz üzere, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ sayılabilir sonsuzlukta değildir, elemanları teker teker doğal sayılarla sayılamaz.

Yukardaki (1-7) özelliklerini sağlayan $(X, <)$ yapılarına ***uçsuz, yoğun ve sayılabilir tamsıralamalar*** denir. Örneğin $(\mathbb{Q}, <)$ bu tür sıralamalardandır.

Şimdi bu yedi özelliğin $(\mathbb{Q}, <)$ yapısını (hemen aşağıda tanımlayacağımız anlamda) karakterize ettiğini göstereceğiz. Kanıta geçmeden önce, "karakterize etmek"i hangi matematiksel anlamda kullandığımızı söylemeliyiz.

$(X, <)$ ve $(Y, <)$ sıralamaları verilmiş olsun. Demek ki her iki yapı da (1) ve (2) özelliklerini sağlıyor. $f : X \to Y$, her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

özelliğini sağlayan bir eşleme[1] olsun. Böyle bir f fonksiyonuna ***eşyapı eşlemesi*** ya da ***izomorfizma*** adı verilir ve bu durumda X ve Y'nin ***eşyapısal*** oldukları söylenir ve $(X, <) \approx (Y, <)$ ya da eğer sıralamlar biliniyorsa kısaca $X \approx Y$ yazılır.

Şimdi artık kanıtlamak istediğimiz teoremi yazabiliriz.

Teorem. *Uçsuz, yoğun ve sayılabilir herhangi iki tamsıralama eşyapısaldır.*

$(\mathbb{Q}, <)$ sıralaması uçsuz, yoğun ve sayılabilir olduğundan, teoremden, her uçsuz, yoğun ve sayılabilir sıralamanın $(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasıyla eşyapısal olduğu çıkar.

Örnekler. Teoremi kanıtlamadan önce uçsuz, yoğun ve sayılabilir sıralamalara örnekler verelim ve bu sıralamalar arasında eşyapı eşlemesi bulalım.

1) En bilineni: $(\mathbb{Q}, <)$.

2) Pozitif kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}^{>0}$, doğal sırlamayla. Bundan sonraki tüm örneklermizin sıralaması doğal sıralama olacağından, sadece kümeyi yazmakla yetineceğiz.

3) Negatif kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}^{<0}$.

4) Sıfır olmayan kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}^*$.

5) $\mathbb{Q} \cup \{\pi\}$.

6) $(\sqrt{2}, \infty)_\mathbb{Q}$, yani $(\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$ kümesi.

7) $(0, \sqrt{2})_\mathbb{Q} = (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$.

8) $(0, 1)_\mathbb{Q} = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

9) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})_\mathbb{Q} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$.

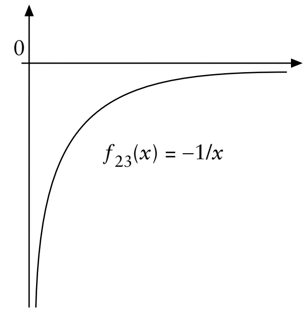
Teoreme göre bu sıralamaların herbiri eşyapısal olmalı, çünkü herbiri uçsuz, yoğun ve sayılabilir sonsuzluktadır. Bu sıralamalar arasında eşyapı eşlemeleri bulalım. Örneklerimiz eğlendirici ve öğretici olmasaydı, hiç böyle bir zahmete girmezdik.

$(2 \approx 3)$. Önce ikinciyle üçüncünün eşyapısal olduğunu gösterelim. Şu iki eşlemenin bileşkesini alalım:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}^{>0} & \to & \mathbb{Q}^{>0} & \to & \mathbb{Q}^{<0} \\ x & \mapsto & 1/x & \mapsto & -1/x \end{array}$$

Her ikisi de sıralamayı ters çevirdiğinden (yani azalan fonksiyonlar olduklarından) bileşkeleri sıralamayı korur. Bu eşyapı eşlemesine f_{23} diyelim:

$$f_{23}(x) = -1/x.$$



$(3 \approx 8)$. Şimdi üçüncüyle sekizincinin eşyapısal olduğunu gösterelim. Aşağıdaki eşlemeleri takip edelim:

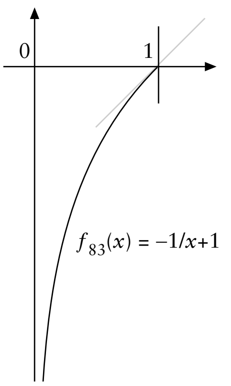
$$\begin{array}{ccccccc} (0, 1)_\mathbb{Q} & \to & (1, \infty)_\mathbb{Q} & \to & (-\infty, -1)_\mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q}^{<0} \\ x & \mapsto & 1/x & \mapsto & -1/x & \mapsto & -1/x + 1 \end{array}$$

Birinci ve ikinci eşleme sıralamayı ters çevirir, üçüncüsü korur, dolayısıyla üçünün bileşimi sıralamayı iki kez ters çevirerek sıralamayı korur.

Bu eşyapı eşlemesine f_{83} diyelim:

$$f_{83}(x) = -1/x + 1.$$

Görmek isteyen için f_{83} fonksiyonunun grafiği sağda.



$(1 \approx 2)$. $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{Q}^{>0}$ sıralamaları arasında bir eşyapı eşlemesi bulacağız. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q}^{>0}$ kümelerini şöyle uygun biçimde parçalayalım:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{<0} \text{ ø } \mathbb{Q}^{\geq 0} \approx (0, 1)_\mathbb{Q} \text{ ø } [1, \infty)_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{>0}.$$

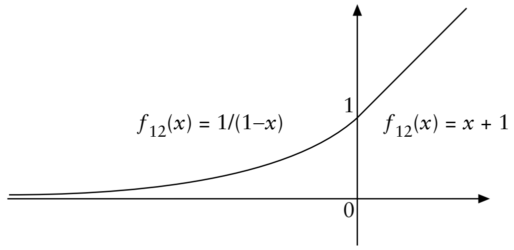
(ø simgesi, $\cup$ gibi birleşim anlamına gelir, ancak, ayrıca, birleşimi alınan kümelerin ayrık olduğunu söyler.) Şimdi bu parçalanmaya bakarak, $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{Q}^{>0}$ sıralamaları arasında bir f_{12} eşyapı eşlemesi bulunabilir:

$$f_{12}(x) = \begin{cases} f_{38}(x) = \dfrac{1}{1-x} & \text{eğer } x < 0 \text{ ise} \\ x + 1 & \text{eğer } x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu eşyapı eşlemesinin grafiği bir sonraki sayfada.

$(7 \approx 8)$. Önce, herhangi iki kesirli $a < b$ sayısı için, $(0, 1)_\mathbb{Q} \approx (a, b)_\mathbb{Q}$ eşyapısallığı gösterelim:

1 Her $x_1, x_2 \in X$ için, $f(x_1) = f(x_2)$ eşitliği ancak $x_1 = x_2$ için sağlanıyorsa, yani Y'nin her elemanına X'in en fazla bir elemanı erişiyorsa $f : X \to Y$ fonksiyonuna ***birebir*** denir. Eğer her $y \in Y$ için, $f(x) = y$ eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ varsa $f : X \to Y$ fonksiyonuna ***örten*** denir. Eğer her $y \in Y$ için, $f(x) = y$ eşitliğini sağlayan bir ve bir tek $x \in X$ varsa, yani hem birebir hem de örtense $f : X \to Y$ fonksiyonuna ***eşleme*** (***bijeksiyon***) denir.



$$(0, 1)_{\mathbb{Q}} \to (0, b-a)_{\mathbb{Q}} \to (a, b)_{\mathbb{Q}}$$
$$x \mapsto (b-a)x \mapsto (b-a)x + a$$

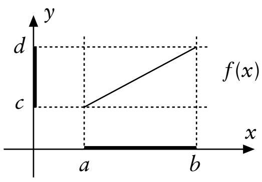
Böylece, $(0, 1)_{\mathbb{Q}}$ ile $(a, b)_{\mathbb{Q}}$ sıralamaları arasında sıralamayı koruyan bir eşleme elde etmiş oluruz. Bundan da her $a < b$ ve $c < d$ kesirli sayıları için,

$$(a, b)_{\mathbb{Q}} \approx (c, d)_{\mathbb{Q}}$$

ve

$$[a, b)_{\mathbb{Q}} \approx [c, d)_{\mathbb{Q}}$$

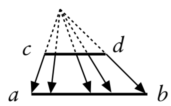
eşyapısallıkları çıkar.



$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}x + c - \frac{d-c}{b-a}a$$

$[a, b] \approx [c, d]$

Sıralamayı koruyan bir eşleşmeyi şöyle de gösterebiliriz:



Şimdi, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için, $a_n = 1 - 1/(n+1)$ olsun. $(a_n)_n$ artarak 1'e yakınsayan bir kesirli sayılar dizisidir. $(b_n)_n$ de artarak $\sqrt{2}$'ye yakınsayan bir kesirli sayılar dizisi olsun. Örneğin b_n'yi $\sqrt{2}$'nin ilk n basamağı olarak alabiliriz, o zaman,

$$\sqrt{2} = 1{,}41421713562373...$$

olduğundan,

$$b_0 = 0$$
$$b_1 = 1$$
$$b_2 = 1{,}4$$
$$b_3 = 1{,}41$$
$$b_4 = 1{,}414$$
$$b_5 = 1{,}4142$$

olur. Biraz yukarda gördüğümüz üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$[a_n, a_{n+1})_{\mathbb{Q}} \approx [b_n, b_{n+1})_{\mathbb{Q}}.$$

Bu eşyapısallığı gerçekleştiren fonksiyona f_n diyelim:

$$f_n : [a_n, a_{n+1})_{\mathbb{Q}} \to [b_n, b_{n+1})_{\mathbb{Q}}.$$

Şimdi,

$$[0, 1)_{\mathbb{Q}} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, a_{n+1})_{\mathbb{Q}}$$

ve

$$[0, \sqrt{2})_{\mathbb{Q}} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} [b_n, b_{n+1})_{\mathbb{Q}}$$

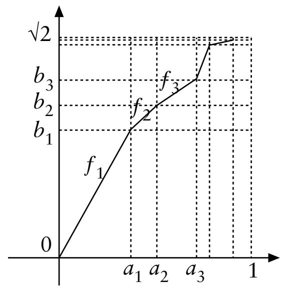
eşitliklerinden yola çıkarak f_n fonksiyonmlarını yapıştırsak,

$$f : [0, 1)_{\mathbb{Q}} \to [0, \sqrt{2})_{\mathbb{Q}}$$

eşyapı eşlemesini elde ederiz. f'nin biçimsel tanımı şöyle:

$$f(x) = f_n(x) \text{ eğer } x \in [a_n, a_{n+1})_{\mathbb{Q}} \text{ ise.}$$

f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



($6 \approx 8 \approx 9$). Benzer biçimde kanıtlanır. Alıştırma olarak okura bırakılmıştır.

($1 \approx 4$). Daha önce kanıtladığımız eşyapısallıklar ve benzerlerinden,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\approx (0, 2) && (1 \approx 8)\\ &= (0, \sqrt{2}) \sqcup (\sqrt{2}, 2) &&\\ &\approx (0, 1) \sqcup (1, 2) && (8 \approx 7)\\ &\approx \mathbb{Q}^{<0} \sqcup \mathbb{Q}^{>0} = \mathbb{Q}^* && (7 \approx 2) \end{aligned}$$

çıkar.

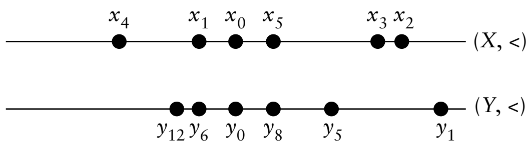
($1 \approx 5$). Daha önce kanıtladığımız eşyapısallıklar ve benzerlerinden,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \sqcup \{\pi\} &\approx \mathbb{Q}^* \sqcup \{\pi\} && (1 \approx 2)\\ &= \mathbb{Q}^{<0} \sqcup \mathbb{Q}^{>0} \sqcup \{\pi\} &&\\ &\approx (-\infty, \pi)_{\mathbb{Q}} \sqcup \{\pi\} \sqcup (\pi, \infty)_{\mathbb{Q}} && (3 \approx 6)\\ &= \mathbb{Q}. && \end{aligned}$$

Yazının geri kalan kısmında teoremi kanıtlayacağız. Kanıtın yöntemine ***gelgit yöntemi*** adı verilir. Bu yöntemi daha önce MD-2003-2, sayfa 19-22'de başka bir konuda bir başka teoremi kanıtlamak için kullanmıştık. Bu da yöntemin önemini gösterir.

Teoremin Kanıtı. Sıralamalar $(X, <)$ ve $(Y, <)$ olsun. X ve Y sayılabilir olduklarından, X ve Y kümelerinin elemanlarını $n \in \mathbb{N}$ için, x_n ve y_n olarak yazabiliriz. Burada, $n \neq m$ için $x_n \neq x_m$ ve $y_n \neq y_m$ varsayımlarını yapıyoruz.

X ve Y'nin elemanlarının numaralandırılmaları birbirleriyle ilgisiz olabilirler. X'ten ilk altı eleman alalım. Y'den de rastgele altı eleman alalım.

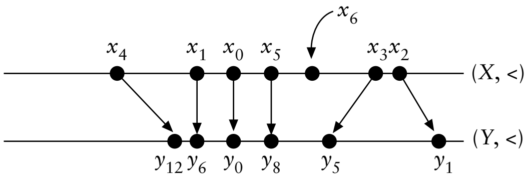


Bu elemanların dizilişi yukardaki gibi olabilir. Gene de dikkat ederseniz ilk altı eleman için sıralamalar birbirlerine benziyorlar (ne de olsa altışar elemanı olan iki tamsıralamadan söz ediyoruz.)

x_4 a y_{12}
x_1 a y_6
x_0 a y_0
x_5 a y_8
x_3 a y_5
x_2 a y_1

eşlemesi bu iki sonlu sıralama arasında bir eşyapı eşlemesidir. Buna ***kısmi eşyapı eşlemesi*** denir.

Şimdi bir sonraki eleman olan x_6'ya ve x_6'nın $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ elemanlarına göre pozisyonuna bakalım. x_6 bu altı eleman tarafından belirlenen 7 aralıktan birinde olmalı. Diyelim x_6'nın yeri şöyle:



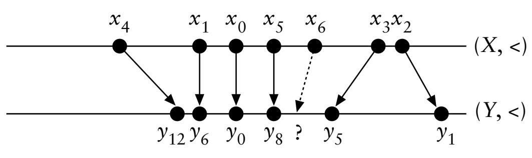
Y'nin,

$$y_{12} < y_6 < y_0 < y_8 < y_5 < y_1$$

elemanlarına göre pozisyonu, X'te x_6'nın

$$x_4 < x_1 < x_0 < x_5 < x_3 < x_2$$

elemanlarına göre pozisyonuna benzer olan bir y elemanı bulabilir miyiz? x_6 elemanı x_5 ile x_3 arasında olduğundan, Y'de y_8 ile y_5 arasında bir eleman bulmalıyız. Y'de böyle bir eleman var mıdır? Evet



vardır, çünkü Y'nin sıralaması yoğun olduğundan, herhangi iki eleman arasında üçüncü bir eleman vardır. Dolayısıyla y_8 ile y_5 arasında da bir eleman vardır. y_8 ile y_5 arasında olan elemanlardan numarası (endisi, göstergesi) en küçük olanı alalım, diyelim bu elemanın numarası 7 olsun. Demek ki

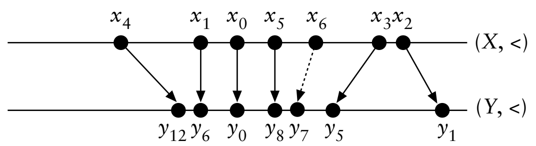
$$y_{12} < y_6 < y_0 < y_8 < y_7 < y_5 < y_1.$$

Dolayısıyla x_6'nın $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ elemanlarına göre pozisyonu, aynen y_7'nin $y_{12}, y_6, y_0, y_8, y_5, y_1$ elemanlarına göre pozisyonu.

Şimdi yukardaki kısmi eşyapı eşlemesini x_6'yı y_7'ye gidecek şekilde büyütebiliriz:

x_4 a y_{12}
x_1 a y_6
x_0 a y_0
x_5 a y_8
x_6 a y_7
x_3 a y_5
x_2 a y_1

Şimdilik resim şöyle:



Bir sonraki x_7 elemanını da ekleyip kısmi eşyapı eşlemesini bir adım daha genişletebiliriz. Bunun için x_7'nin $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ elemanlarına göre pozisyonunu belirlemek ve Y'de bu pozisyona uyan bir eleman bulmak yeterlidir.

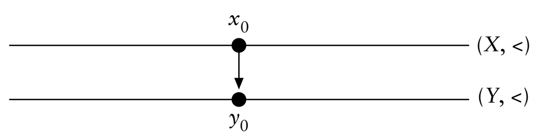
Bunu sürekli yapabiliriz ve sonuçta X'ten Y'ye giden ve sıralamaya saygı duyan bir fonksiyon bulabiliriz. Bu fonksiyon birebir olacaktır ama ne yazık ki örten olmak zorunda değildir.

Fonksiyonu örten yapmak için bir X'ten Y'ye bir de (Y'de hiçbir eleman unutmamak için) Y'den X'e gitmeliyiz.

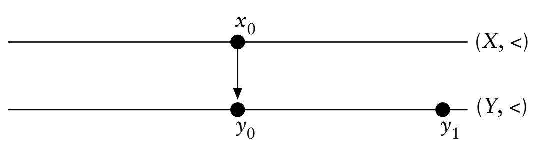
Yöntem şöyle. İlk adımda X'in x_0 elemanını Y'de herhangi bir elemana yollayalım. Bu eleman y_0 olsun:

x_0 a y_0

İlk kısmi eşyapı eşlemesini bulduk. Resmi aşağıda.



Bu ilk adımda X'ten Y'ye gittik. Şimdi Y'den X'e gideceğiz. Y'de şimdiye kadar erişmediğimiz ilk elemanı alalım. Y'nin ilk erişilmeyen elemanı y_1. y_1'in y_0'a göre konumuna bakalım. İki şık var



ya $y_1 < y_0$ ya da $y_1 > y_0$. İkinci şıkta olduğumuzu varsayalım.

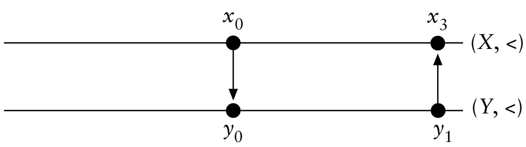
Şimdi $(X, <)$ sıralamasında, x_0'a göre konumu y_1'in y_0'a göre konumuna benzeyen bir eleman bulmaya çalışacağız. y_1, y_0'dan daha büyük olduğundan, X'te x_0'dan daha büyük bir eleman bulmalıyız. X'te böyle bir eleman var mı? Evet vardır, çünkü X'in en büyük elemanı olmadığından, her elemandan, x_0'dan da büyük bir eleman var. Bu eleman x_1 olmayabilir belki, belki x_2 de olmayabilir, ama mutlaka x_0'dan büyük bir eleman olmalı. x_0'dan büyük elemanlar arasından endisi en küçük olanını seçelim. Bu elemana x_3 diyelim. (Demek ki x_1 ve x_2 elemanları x_0'dan daha küçük, ama bunun gelecekte hiçbir önemi olmayacak.) Şimdi x_3'le y_1'i eşleştirip daha önceki

x_0 a y_0

kısmi eşyapı eşlemesini genişletelim:

x_0 a y_0
x_3 a y_1

Bu da ikinci kısmi eşleme. Resmi aşağıda:



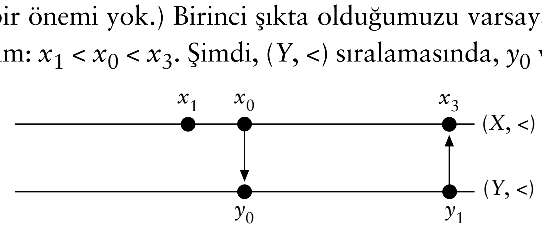
İkinci adımda Y'den X'e gittik. Üçüncü adımda X'ten Y'ye gideceğiz. X'in daha önce dokunmadığımız elemanlarından en küçük endislisini seçelim. X'in x_0 ve x_3 elemanlarına dokunmuşuz. x_1'e daha dokunmamışız. x_1'in daha önce dokunulmuş olan x_0 ve x_3 elemanlarına göre konumuna bakalım. Önümüzde üç şık var.

Birinci şık: $x_1 < x_0 < x_3$.

İkinci şık: $x_0 < x_1 < x_3$.

Üçüncü şık: $x_0 < x_3 < x_1$.

(Aslında birinci şıkta olmamız gerektiğini biliyoruz, ama daha önce söylediğimiz gibi bunun hiçbir önemi yok.) Birinci şıkta olduğumuzu varsayalım: $x_1 < x_0 < x_3$. Şimdi, $(Y, <)$ sıralamasında, y_0 ve



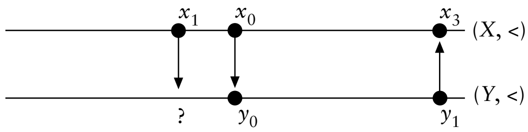
y_1'e göre konumu, x_1'in x_0 ve x_3'e göre olan konumuna benzeyen bir eleman bulmaya çalışacağız.

$$x_1 < x_0 < x_3$$

olduğundan, Y'de

$$y < y_0 < y_1$$

eşitsizliklerini, yani $y < y_0$ eşitsizliğini sağlayan bir y elemanı bulmalıyız. Böyle bir eleman var mıdır?



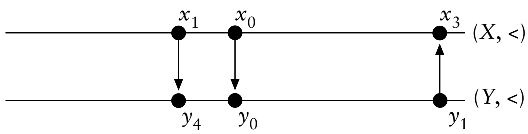
Vardır, çünkü Y'nin ilk elemanı olmadığından, her elemandan, y_0'dan da küçük bir eleman vardır. Bu eleman y_2 olmayabilir, y_3 de olmayabilir, ama böyle bir eleman mutlaka olmalı. Bu koşulu sağlayan ve daha önce dokunulmamış elemanlardan en küçük endislisini alalım, diyelim y_4. Şimdi, daha önce bulduğumuz,

x_0 a y_0
x_3 a y_1

kısmi eşyapı eşleşmesini

x_0 a y_0
x_1 a y_4
x_3 a y_1

olarak genişletelim. Resmi aşağıda:



Bir sonraki adımda, ki bu üçüncü adım, Y'den hareket edeceğiz. Y'de daha önce bulaşmadığımız en küçük endisli eleman y_2. Bu y_2 elemanının daha önce bulaşılmış olan y_0, y_1 ve y_4 elemanlarına göre konumuna bakalım. Dört şık olabilir.

Birinci şık: $y_2 < y_4 < y_0 < y_1$.

İkinci şık: $y_4 < y_2 < y_0 < y_1$.

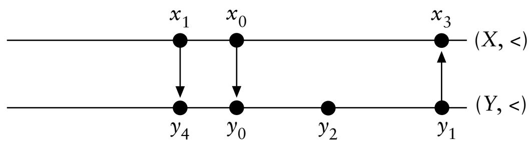
Üçüncü şık: $y_4 < y_0 < y_2 < y_1$.

Dördüncü şık: $y_4 < y_0 < y_2 < y_1$.

Üçüncü şıkta olduğumuzu varsayalım:

$$y_4 < y_0 < y_2 < y_1.$$

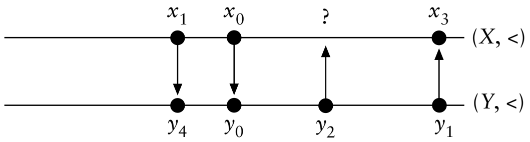
Durum şöyle:



Şimdi, $(X, <)$ sıralamasında, x_0, x_1 ve x_3'e göre konumu, y_2'nin y_0, y_1 ve y_4'e göre olan konumuna benzeyen bir eleman bulmaya çalışacağız. Yani X'te

$$x_1 < x_0 < x < x_3.$$

eşitsizliklerini, yani $x_0 < x < x_3$ eşitsizliklerini sağlayan bir x elemanı bulmalıyız. Böyle bir eleman var mıdır?



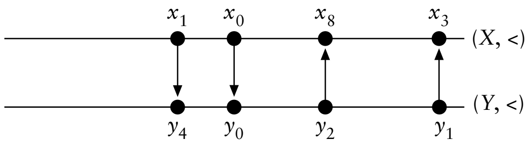
Vardır, çünkü *X*'in sıralaması yoğundur; herhangi iki eleman arasında olduğu gibi, x_0 ve x_3 elemanları arasında da bir eleman vardır. Bu elemanlar arasından endisi en küçük olanı seçelim. Diyelim x_8 elemanı $x_0 < x_8 < x_3$ eşitsizliklerini sağlayan en küçük endisli eleman. Şimdi, daha önce bulduğumuz,

$$x_0 \text{ a } y_0$$
$$x_1 \text{ a } y_4$$
$$x_3 \text{ a } y_1$$

kısmi eşyapı eşleşmesini

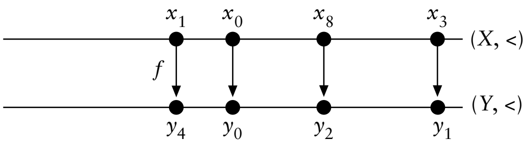
$$x_0 \text{ a } y_0$$
$$x_1 \text{ a } y_4$$
$$x_3 \text{ a } y_1$$
$$x_8 \text{ a } y_2$$

olarak genişletelim. Resmi aşağıda:



Bunu böylece sürdürebiliriz. Ne *X*'te ne de *Y*'de bir eleman unutmadığımızdan emin olmak için, tek sayılı adımlarda *X*'ten, çift sayılı adımlarda *Y*'den başlarız.

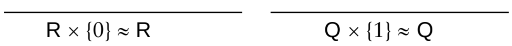
X ve *Y* sayılabilir olduğundan, bu yöntemi sonsuza kadar sürdürürsek, *X* ve *Y*'nin sıralamalarının eşyapısal olduklarını görürüz. Yukardaki örnekte elde edilen eşleme şöyle olur:



Sayılamaz Sonsuzluktaki Yoğun ve Uçsuz Sıralamalar. Eğer kümeler sayılabilir sonsuzlukta değilse teorem yanlıştır. Örneğin gerçel sayılar kümesi R'nin sonuna kesirli sayılar kümesi Q'yü koyalım, yani (R × {0}) ø (Q × {1}) kümesini alalım ve bu kümeyi şöyle sıralayalım:

$(x, 0) < (y, 0) \Leftrightarrow$ R'de $x < y$ ise
$(x, 1) < (y, 1) \Leftrightarrow$ Q'de $x < y$ ise
$(x, 0) < (y, 1)$ her koşulda.

Bu sıralamanın resmi şöyle:



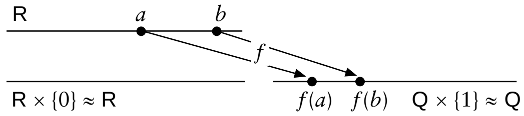
Bu sıralamaya (kümeye de) R + Q adını verelim. Bu sıralamanın uçsuz ve yoğun olduğu çok açık olmalı.

R + Q kümesiyle R kümesi arasında bir eşleşme vardır. (Bu eşlemeyi bulabilir misiniz?) Ama bu iki sıralama arasında bir eşyapı eşlemesi yoktur. Bunu kanıtlayalım.

Diyelim R sıralamasından R + Q sıralamasına giden bir f eşyapı eşleşmesi var. O zaman

$$f(a) = (0, 1)$$
$$f(b) = (1, 1)$$

eşitliklerini sağlayan $a, b \in$ R vardır. $0 < 1$ olduğundan $(0, 1) < (1, 1)$'dir, dolayısıyla $a < b$. f sıra-



lamaya saygı duyduğundan $[a, b]$ aralığı f altında $(0, 1)$ ile $(1, 1)$ arasındaki tüm elemanlara yani

$$[0, 1]_Q \times \{1\}$$

kümesine gitmelidir. Bu da $[a, b]$ aralığı ile $[0, 1]_Q$ kesirli sayılar arasında bir eşlemeye yol açar ki, bir gerçel sayı aralığının sayılabilir sonsuzlukta olamayacağı bilinir. (Bunu daha sonraki sayılarımızda kanıtlayacağız.) ♣