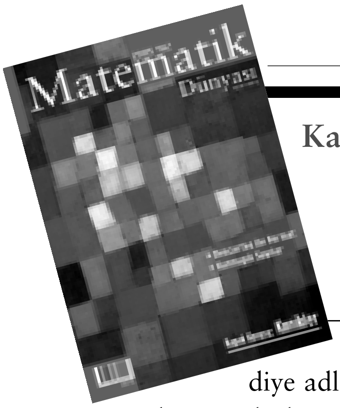


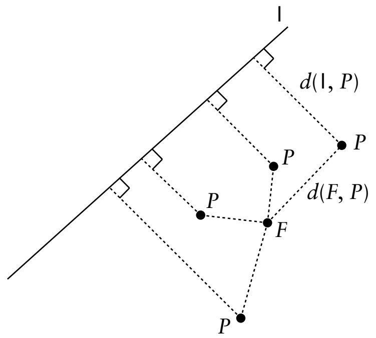
Kapak Konusu: Konikler

Koniklerin Geometrik Tanımı

Önceki iki yazıda, dejenere diye adlandırdığımız ve pek ilgi çekici olmayan birkaç şık dışında, koniklerin elips, parabol ve hiperbol adlı eğriler olduklarını gördük ve bu eğrileri, lise düzeyinde çizilebildiği kadar gerçekçi bir biçimde çizdik. Bu iki yazıda yaklaşımımız cebirseldi. Birinci yazıda, iki değişkenli ve ikinci dereceden bir polinomun kökleriyle (bir konikle) işe başladık ve bu köklerden oluşan kümeyi düzlemde evirip çevirerek polinomu basitleştirdik (birçok katsayı 0 oldu.) İkinci yazıda da bu basitleştirilmiş denklemleri sağlayan noktalar kümesini (eğrileri) düzlemde çizdik.

Bu üçüncü yazıda ise koniklere geometrik bir bakış açısıyla yaklaşacağız.

Düzlemde, adlarına sırasıyla ***doğrultman*** ve ***odak noktası*** diyeceğimiz bir l doğrusu ve bir F noktası verilmiş olsun. Bu doğru ve noktaya olan uzaklıklarının oranı sabit olan noktalar kümesini ele alalım.



Doğrultmana l, odak noktasına F dedik. Oran da e olsun. Bir P noktasının l doğrultmanına ve F odak noktasına olan uzaklıklarını sırasıyla $d(l, P)$ ve $d(F, P)$ olarak gösterelim. Dediğimiz gibi,

$$d(F, P) = e\cdot d(l, P)$$

eşitliğini sağlayan P noktalarının oluşturduğu kümeyle ilgileniyoruz. Bu, nasıl bir kümedir? Geometrik olarak neye benzer? Bu yazıda işte bu soruları yanıtlayacağız.

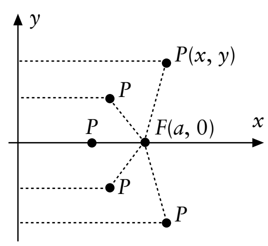
Kümenin şekli elbette e oranına göre değişir. Her şeyden önce eğer $e < 0$ ise, küme boştur, istediğimiz koşulu sağlayan bir P noktası yoktur. Ayrıca, eğer $e = 0$ ise, o zaman da sadece odak noktası verilen koşulu sağlar. Bundan böyle e'nin pozitif bir sayı olduğunu varsayalım.

Alıştırma. Eğer odak noktası doğrultmanın üstündeyse elde edilen küme, $e < 1$ ise boşkümedir, $e = 1$ ise bir doğrudur ve $e > 1$ ise iki doğrunun birleşimidir.

Yukardaki alıştırmayı gözönünde tutarak, bundan böyle odak noktasının doğrultmanın üstünde olmadığını, yani $F \notin$ l koşulunu varsayalım.

Kümenin daha çok geometrik özellikleriyle ilgilendiğimizden, l doğrultmanını ve F odak noktasını (aynı anda) döndürüp öteleyebiliriz. Bu dönüşümler kümenin geometrik özelliklerini bozmaz.

Doğrultmanı F etrafında döndürerek doğrultmanın dikey bir doğru olduğunu varsayabiliriz. Bir de ayrıca hem doğrultmanı hem de odak noktasını aynı doğrultuda öteleyerek doğrultmanın y ekseni olduğunu ve odak noktasının x ekseni üstünde olduğunu varsayabiliriz. Ayrıca, gerekirse F noktasının y eksenine (yani doğrultmana) göre simetrisini alarak, F'nin y ekseninin sağında olduğunu varsayabiliriz.



F'nin koordinatlarına $(a, 0)$ diyelim. Burada $a > 0$ olmalı, çünkü F noktası doğrultmanın sağında. O zaman, bir $P(x, y)$ noktasının kümede olması için,

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = d(F,P) = e\cdot d(l,P) = e\,|\,x\,|$$

koşulunun sağlanması lazım. Her iki tarafın da karesini alırsak,

$$(x - a)^2 + y^2 = e^2x^2 \qquad (1)$$

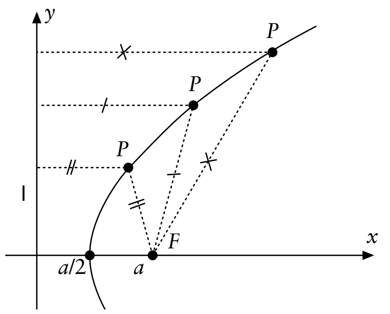
eşitliği sağlanmalı. Bu, iki değişkenli ve ikinci dereceden bir denklem, demek ki aradığımız küme bir konik.

Bundan böyle analizimize $0 < e < 1$, $e = 1$ ve $e > 1$ durumlarına göre devam edeceğiz. Ancak e'nin her zaman pozitif olduğunu unutmayalım.

Eğer $e = 1$ ise. O zaman $(x - a)^2 + y^2 = e^2x^2 = x^2$ denklemindeki x^2'ler sadeleşir ve geriye

$$x = y^2/2a + a/2$$

kalır. Bu denklemin, x eksenine göre simetrik bir parabolün denklem olduğu belli. Çizimi aşağıda.



Eğer $e \neq 1$ ise. Gene $(x - a)^2 + y^2 = e^2x^2$ denklemiyle oynayalım:

$$(x-a)^2 + y^2 = e^2x^2$$

$$\Leftrightarrow (1-e^2)x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{2a}{1-e^2}x + \frac{y^2}{1-e^2} + \frac{a^2}{1-e^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} + \frac{a^2}{1-e^2} - \frac{a^2}{(1-e^2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2a^2}{(1-e^2)^2}$$

Sonuncu denkleme bakalım. Eğer düzlemi yatay olarak yeterince ötelersek, denklemimiz,

$$X^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2a^2}{(1-e^2)^2} > 0$$

denklemine dönüşür. Bu denklem, $1 - e^2$'nin pozitif ya da negatif olmasına göre, ya bir elips ya da bir hiperbol verir. Eğer $e < 1$ ise elips, eğer $e > 1$ ise hiperbol elde ederiz. Her iki durumu ayrı ayrı irdeleyelim.

Eğer $0 < e < 1$ ise. Bu durumda bir elipsle karşı karşıya olduğumuzu biliyoruz. Denklemimiz,

$$\left(x - \frac{a}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2a^2}{(1-e^2)^2}$$

biçiminde. Elips çok bariz biçimde x eksenine göre simetrik, çünkü (x, y) noktası elipsin üstündeyse, $(x, -y)$ noktası da elipsin üstünde. Bir önceki yazıdan dolayı, diğer simetri doğrusu bu yatay simetri doğrusuna dik olmalı, yani dikey olmalı. İkinci simetri doğrusunu daha sonra bulacağız. Önce elipsin x eksenini kestiği noktaları bulalım. Bunun için yukardaki denklemde $y = 0$ almalıyız:

$$x = \pm\frac{ea}{1-e^2} + \frac{a}{1-e^2} = a\frac{1\pm e}{1-e^2} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-e} > \dfrac{a}{1+e} \\ \dfrac{a}{1+e} > \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

Elipsin merkezi bu iki noktanın tam ortasındadır, yani x ekseni üstünde ve birinci koordinatı

$$\frac{\dfrac{a}{1+e} + \dfrac{a}{1-e}}{2} = \frac{a}{1-e^2} > a$$

olan noktadır. Dikey simetri doğrusu da bu merkez noktasından geçer. Bunu, elipsin denklemine bakarak doğrudan da anlayabilirdik. Elipsin bu dikey simetri doğrusunu kestiği noktaları bulmak için, elipsin denkleminde

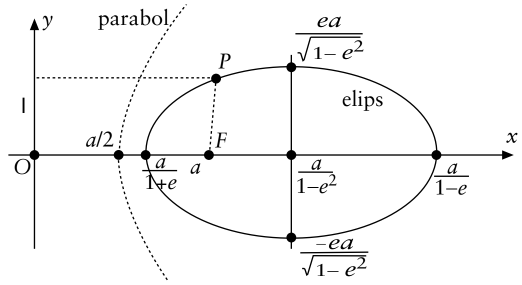
$$x = \frac{a}{1-e^2}$$

almak yeterlidir. Sonuç,

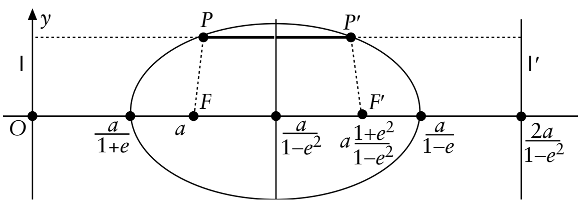
$$y = \pm\frac{ea}{\sqrt{1-e^2}}$$

olarak bulunur. Buradan, elipsin yüksekliğinin boyundan daha küçük olduğu kolaylıkla çıkar.

Tüm bu bulduklarımızla elipsin şekli oldukça kolay biçimde bulunur:



Simetriden dolayı elipsin bir başka doğrultmanı ve bir başka odak noktası daha vardır: Dikey simetri eksenine göre eskilerinin simetriğini alırsak



yenilerini buluruz. Yani elipsin bir başka odak noktası ve bir başka doğrultmanı vardır:

$$F'\left(a\frac{1+e^2}{1-e^2}, 0\right) \text{ noktası ve } x = \frac{2a}{1-e^2} \text{ doğrusu.}$$

Bu yeni odak noktası ve doğrultman yukardaki resimde gösterilmiştir. (e, soldan 1'e yakınsadığında bu yeni odak noktası ve doğrultman "artı" sonsuza giderler ve elips parabole dönüşür.) Ayrıca yeni odak noktası ve doğrultmana göre oran da değişmez, yani elips üzerinde alınmış herhangi bir P noktası için,

$$d(F', P) = e \cdot d(l', P)$$

eşitliği sağlanır. Tüm bunların kanıtı çok kolaydır. (Yukardaki şekil kanıtın ipucunu vermektedir: Simetriyi kullanın.)

Bu arada e oranı 0'a yakınsadığında, ikinci odak noktasının birincisine yakınsadığını, elipsin gitgide çembere benzediğini ve limitte bir noktaya büzüştüğünü görmek zor değil. Elipslerin ancak $e = 0$ olduğunda bir çember olduklarını (o da tek noktası olan bir çember) gözlemleyelim. Öte yandan e, 1'e yakınsadığında, ikinci odak noktası sonsuza gider ve elips gitgide parabolleşir.

Eğer $e > 1$ ise. Bu sefer bir hiperbolle karşı karşıya olduğumuzu biliyoruz. (1) denklemini

$$\left(x+\frac{a}{e^2-1}\right)^2-\frac{y^2}{e^2-1}=\frac{e^2a^2}{(e^2-1)^2} \qquad (2)$$

biçiminde yazalım. $e^2 - 1$ sayısının pozitif olduğunu unutmayalım.

Hiperbol x eksenine göre simetrik, çünkü (x, y) noktası elipsin üstündeyse, $(x, -y)$ noktası da elipsin üstünde. Bir önceki yazıdan dolayı diğer simetri doğrusu bu simetri doğrusuna dik olmalı, yani dikey olmalı. İkinci simetri doğrusunu daha sonra bulacağız. Önce hiperbolün x eksenini kestiği noktaları bulalım. Bunun için denklemde $y = 0$ almalıyız:

$$x=\pm\frac{ea}{e^2-1}-\frac{a}{e^2-1}=a\frac{\pm e-1}{e^2-1}=\begin{cases}\dfrac{a}{e+1}<\left|\dfrac{-a}{e-1}\right|\\[2ex] \dfrac{-a}{e-1}\end{cases}$$

(Elipsle aynı yanıtı bulduğumuza dikkat çekerim.)

Hiperbolün dikey simetri doğrusu bu iki noktanın ortasından geçer, yani

$$x=\frac{-a}{e^2-1}$$

denklemiyle verilen doğrudur.

Geriye bilmediğimiz pek bir şey kalmadı. Bir de asimptotları bulalım. Asimptotun tanımını anımsayalım: x çok büyüdüğünde hiperbolün çok yakın olduğu doğruya (eğer varsa öyle bir doğru) ***asimptot*** denir. Fransız kültürüyle yetişmişler asemptot derler.

Hiperbolün (2) denklemini x^2'ye bölüp, x'i sonsuza götürelim. O zaman eşitliğin sağ tarafı 0'a gider, en soldaki terim 1'e gider ve

$$\frac{y^2/x^2}{e^2-1}\approx 1$$

olur. Dolayısıyla, x çok büyükken,

$$y/x\approx\pm\sqrt{e^2-1}$$

olur. Bir başka deyişle asimptotların eğimi

$$\pm\sqrt{e^2-1}$$

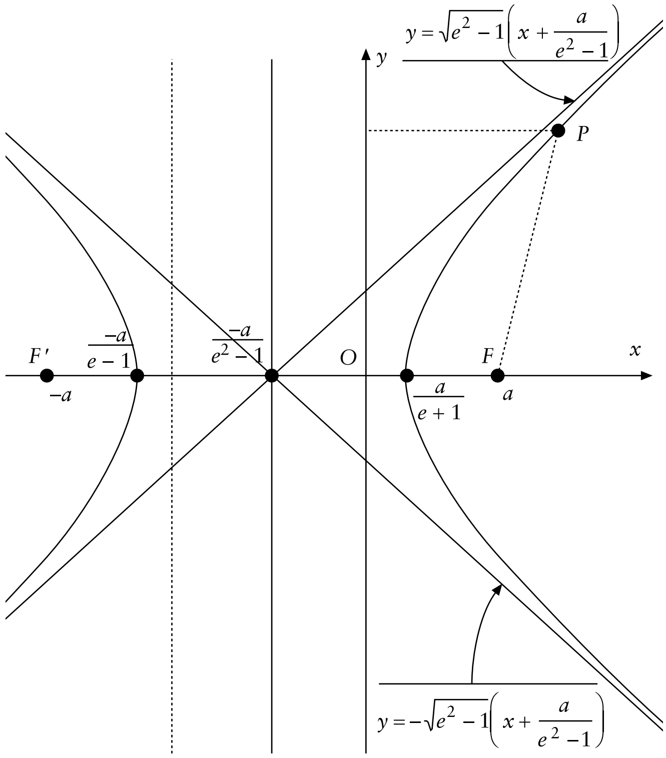
dir. Ayrıca asimptotlar hiperbolün merkezi olan

$$\left(\frac{-a}{e^2-1},0\right)$$

noktasından geçmek zorunda olduklarından, asimptotların denklemleri,

$$y=\pm\sqrt{e^2-1}\left(x+\frac{a}{e^2-1}\right)$$

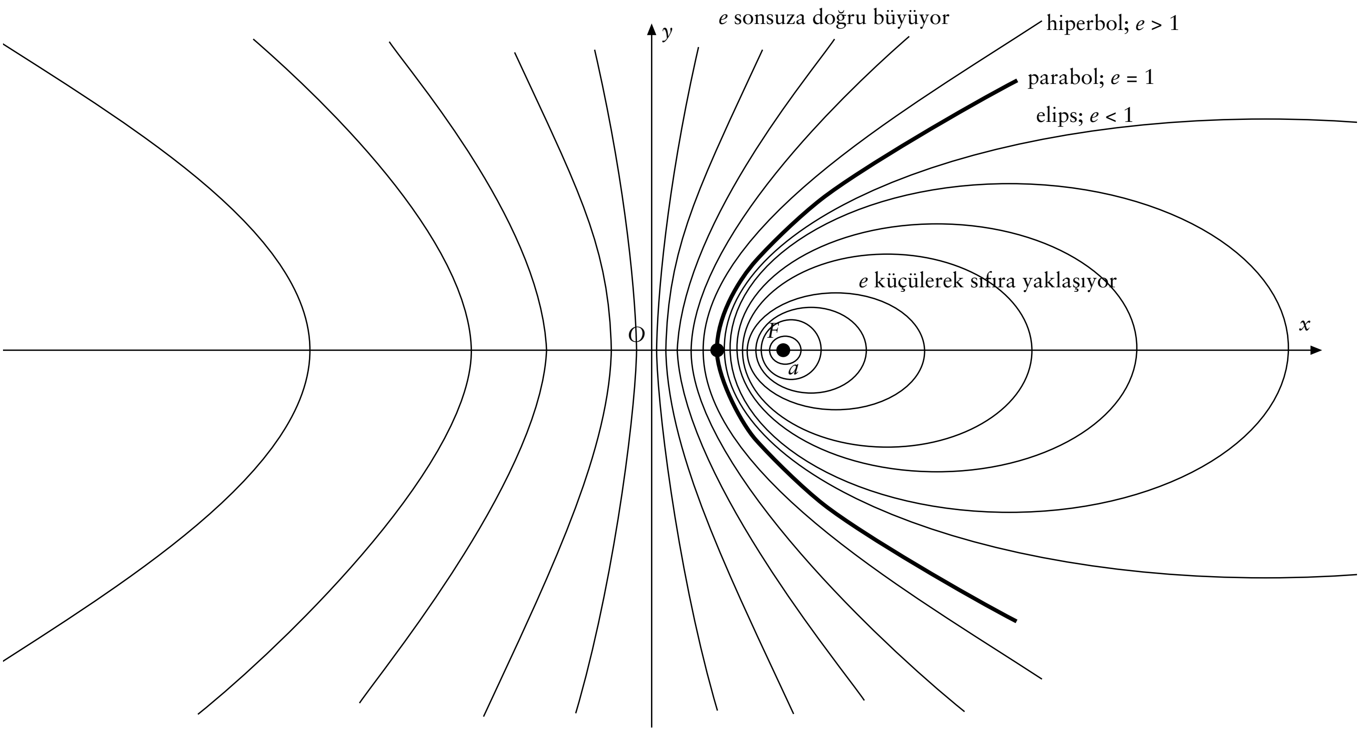
dir. Artık hiperbolümüzü çizebiliriz.



Aynen elipste olduğu gibi, hiperbolde de, dikey simetriden dolayı ikinci bir odak noktası (yukardaki resimde F') ve doğrultman (yukardaki resimde noktalı çizilen dikey doğru) vardır.

e, sağdan 1'e (yani 1^+'ya) yakınsadığı zaman, ikinci odak noktası ve doğrultman "eksi sonsuz"a doğru giderler ve hiperbol gitgide parabolleşir. Öte yandan e çok büyüdüğünde hiperbol y eksenine yaklaşmaya çalışır; ayrıca asimptotlar dikleşir ve x ve y eksenleriyle kesişim noktaları düzlemin merkezine, yani O noktasına yakınsarlar.

Ayrıntılara girmeden bulduklarımızı bir teoremde özetleyelim:



Burada, a'yı sabit tutarak ama e'yi 0'dan sonsuza doğru değiştirerek, elipsleri ($0 < e < 1$), parabolü ($e = 1$) ve hiperbolleri ($1 < e$) aynı grafiğin üstünde çizdik.

Teorem 1. *Düzlemde bir* ℓ *doğrusu ve bu doğrunun üstünde olmayan bir* F *noktası verilmiş olsun. Ayrıca pozitif bir* e *sayısı verilmiş olsun. O zaman,*

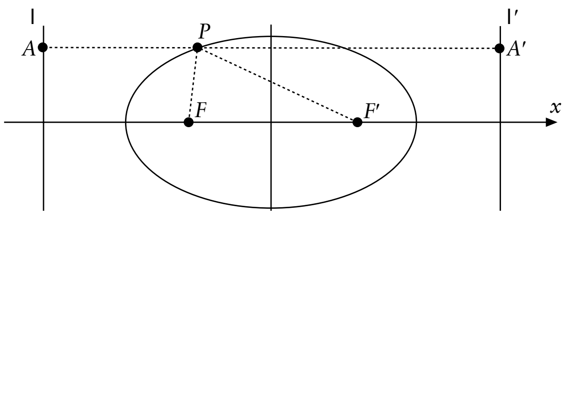
$$\{P : d(P, F) = e \cdot d(P, \ell)\}$$

bir koniktir. Eğer $0 < e < 1$ *ise bir elipstir,* $e = 1$ *ise bir paraboldür ve* $e > 1$ *ise bir hiperboldür.*

Bir Başka Geometrik Yaklaşım

Elipsle hiperbolün parabole göre bir ayrıcalığı var: Elips ve hiperbolde iki değişik odak noktası ve doğrultman çifti vardır (üstelik aynı e oranı için), ama parabolde bir tane odak noktası ve doğrultman çifti vardır. (Bu son söylediğimizi kanıtlayabilir misiniz?) Elipsle hiperbolün bu özelliği onların geometrik olarak başka türlü tanınmasına izin verir.

Elips. Önce elipsi ele alalım. Aşağıda bir elips ve bu elipsin (F, ℓ) ve (F', ℓ') odak noktası ve doğrultman çiftlerini çizdik. Elipsin üstünde herhangi bir P noktası alalım. P'nin ℓ ve ℓ' doğrultmanları üstüne olan izdüşümüne A ve A' diyelim. ℓ ve ℓ' arasındaki mesafeye de $2a$ diyelim: $d(A, A') = 2a$. Elipsin tanımından dolayı,



$$d(F, P) = e \cdot d(A, P)$$

ve

$$d(F', P) = e \cdot d(A', P)$$

eşitlikleri sağlanır. Bunları toplarsak

$$d(F, P) + d(F', P) = e(d(A, P) + d(A', P)) = 2ae,$$

yani

$$d(F, P) + d(F', P) = 2ae$$

buluruz, yani elipsin üstünde alınan P noktası ne olursa olsun, P'nin odak noktalarına olan uzaklıklarının toplamı bir sabittir.

Bunun tersi de doğrudur, yani düzlemde herhangi iki F ve F' noktaları verilmiş olsun. Ayrıca, $2a$, $d(F, F')$ mesafesinden büyük bir sayı olsun. O zaman,

$$\{P : d(P, F) + d(P, F') = 2a\}$$

kümesi bir elipstir. Bunu kanıtlayalım: Genelliği bozmadan F ve F' noktalarının koordinatlarının, bir $0 < c < a$ için, $(c, 0)$ ve $(-c, 0)$ olduklarını varsayabiliriz. Kümeden bir $P(x, y)$ noktası alalım. O zaman, $d(P, F) + d(P, F') = 2a$ koşulu bize

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

verir. Bunu

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

olarak yazıp (yaptığımız yapacağımız tek zeki şey bu olacak) her iki tarafın da karesini alalım. Basit bir iki sadeleştirmeden sonra,

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

buluruz. Bunun da karesini alıp sadeleştirmeleri yaptığımızda,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

denklemine varırız, ki bu da elbette, $a > c$ olduğundan, bir elipsin denklemidir.

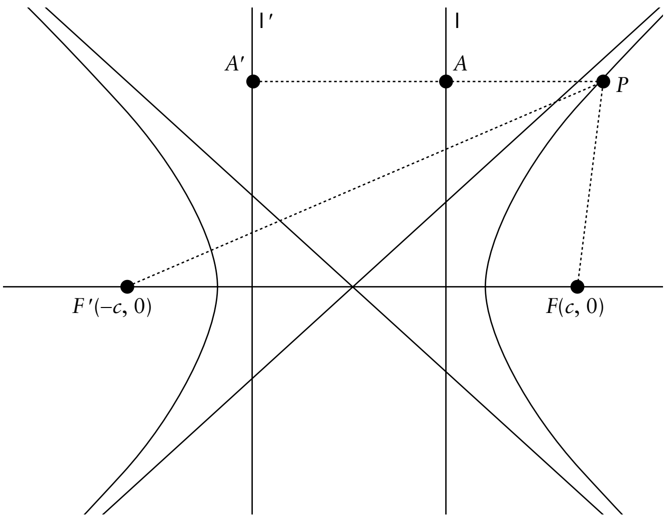
Daha sonra bu elipsin odak noktalarının F ve F' olduklarını kanıtlayacağız.

Bulduklarımızı bir teoremde toparlayalım.

Teorem 2. *Bir elipsin noktalarının her iki odak noktasına olan mesafelerinin toplamı bir sabittir. Eğer elips $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ denklemiyle verilmişse bu sabit $2a$'dır.*

Bunun tersi de doğrudur: Eğer düzlemde herhangi iki F ve F′ noktası ve $2a > d(F, F')$ sayısı verilmişse, o zaman, $\{P : d(P, F) + d(P, F') = 2a\}$ kümesi bir elipstir.

Hiperbol. Yukarda elips için yaptığımızı bu kez hiperbol için yapalım. Aşağıda bir hiperbol ve bu hiperbolün (F, l) ve (F', l') odak noktası ve doğrultman çiftlerini çizdik. Hiperbolün sağ dalın-



dan herhangi bir P noktası alalım. P'nin l ve l' doğrultmanları üstüne olan izdüşümlerine sırasıyla A ve A' diyelim. l ve l' doğrultmanları arasındaki mesafeye de d diyelim: $d(A, A') = d$. Hiperbolün tanımından dolayı,

$$d(F, P) = e \cdot d(A, P)$$

ve

$$d(F', P) = e \cdot d(A', P)$$

eşitlikleri sağlanır. Birinciyi ikinciden çıkarırsak,

$$d(F', P) - d(F, P) = e(d(A', P) - d(A, P)) = ed,$$

yani

$$d(F', P) - d(F, P) = ed$$

buluruz. Eğer, hiperbolün sol dalından bir nokta seçseydik,

$$d(F, P) - d(F', P) = ed$$

bulacaktık. Demek ki her iki durumda da,

$$|d(F, P) - d(F', P)| = ed,$$

yani hiperbolün üstünden alınan P noktası ne olursa olsun, P'nin odak noktalarına olan uzaklıklarının farkının mutlak değeri bir sabittir.

Bunun tersi de doğrudur: Düzlemde herhangi iki F ve F' noktaları verilmiş olsun. Ayrıca, $2a > d(F, F')$ herhangi bir sayı olsun. O zaman,

$$\{P : |d(P, F) - d(P, F')| = 2a\}$$

kümesi bir hiperboldür. Bunu kanıtlayalım: Genelliği bozmadan F ve F' noktalarının koordinatlarının, bir $0 < c < a$ için, $(c, 0)$ ve $(-c, 0)$ olduklarını varsayabiliriz. Kümeden bir $P(x, y)$ noktası alalım. O zaman, $|d(P, F) - d(P, F')| = 2a$ koşulu bize

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

verir. Bunu

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

olarak yazıp her iki tarafın da karesini alalım. Basit bir iki sadeleştirmeden sonra,

$$x - a = \pm\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

buluruz. Bunun da karesini alıp sadeleştirmeleri yaptığımızda,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

denklemine varırız, ki bu da, $a > c$ olduğundan, bir hiperbolün denklemidir.

Daha sonra bu hiperbolün odak noktalarının F ve F' olduklarını kanıtlayacağız.

Bulduklarımızı bir teoremde toparlayalım.

Teorem 3. *Bir hiperbolün noktalarının her iki odak noktasına olan mesafelerinin farkının mutlak değeri bir sabittir. Bunun tersi de doğrudur: Eğer düzlemde herhangi iki F ve F′ noktası ve $2a > d(F, F')$ sayısı verilmişse, o zaman,*

$$\{P : |d(P, F) - d(P, F')| = 2a\}$$

kümesi bir hiperboldür. ♥