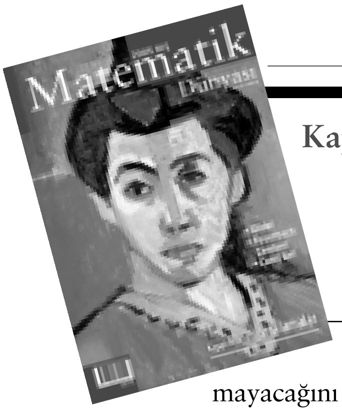



Kapak Konusu: Sıralamalar

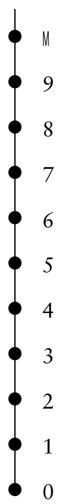
# Sıralama

İlk yazıda her şeyin sıralanmayacağını gördük. Ama bu, hiçbir şey sıralanmaz anlamına gelmez tabii ki. Bazı şeyler bal gibi sıralanır. Örneğin ÖSS sınav sonuçlarına göre gençlerimiz sıralanabilirler, sıralanıyorlar da...

Bu yazıda sıralamanın matematiksel anlamını ve bir sürü örnek göreceğiz. Matematiksel tanımı daha sonraya saklayarak örneklerle başlayalım.

**Örnek 1.** İlk örneğimiz doğal sayılar kümesi olsun. En küçük doğal sayı 0'dır, sonra 1 gelir, sonra 2, vs. Herhangi iki doğal sayıyı büyüklüklerine göre karşılaştırabiliriz. Örneğin $3 < 5$. Ayrıca $5 < 8$. Dolayısıyla $3 < 8$ vs. Doğal sayılar, herkesin bildiği üzere

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < ...$$



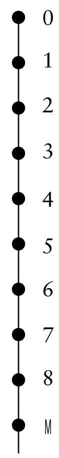

diye sıralanmışlardır. Bu sıralamanın ***en küçük elemanı*** vardır (o da 0'dır). Ama ***en büyük elemanı*** yoktur, her doğal sayıdan daha büyük doğal sayı vardır çünkü. Bu sıralamanın bir başka özelliği de her elemanın hemen ***bir büyüğü***nün olması, 25'in bir büyüğü 26'dır örneğin. Ayrıca, bu sıralamada, 0 dışında her elemanın ***bir öncesi*** de vardır.

Doğal sayıların bu sıralamasına ***doğal sıralama*** adını vereceğiz ve bu sıralamayı $(\mathbb{N}, <)$ olarak göstereceğiz. Doğal sayıların doğal sıralamasını solda resmettik. Küçük elemanları aşağıya, büyük elemanları yukarıya yazdık. Görsel olarak hep böyle yapacağız, küçükleri aşağıya, büyükleri yukarıya yazacağız.

> **ABCÇDEFGĞHIİJKLMNOÖPRSŞTUÜVYZ**
> Bir alfabe sadece harflerden oluşmaz. Bir alfabede harfler ayrıca sıraya dizilmişlerdir. Türkçenin 29 harfi 29! değişik biçimde sıraya dizilebilir, yani Türkçenin harflerinden 29! değişik alfabe oluşturulabilir.

**Örnek 2.** İkinci örneğimizde doğal sayılarda alışık olduğumuz sıralamayı ters çevirelim: Bu sefer en küçük sayı (yani 0) bu yeni sıralamaya göre en 'büyük' eleman olacak. Sayıları bir sınavda yapılan yanlış sayısı olarak yorumlarsak böyle bir sıralamanın neden gerekli olabileceğini anlarız. Bu kez 0 puan alan (yani 0 yanlış yapan) en iyisidir, ondan daha iyisi yoktur. 1 puan alan da fena değildir ama 0 puan kadar iyi değildir. Bu sıralamayı p işaretiyle gösterelim:

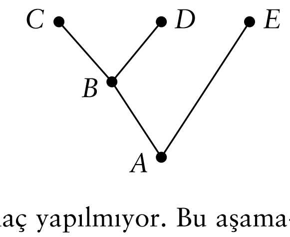
$$... \text{ p } 5 \text{ p } 4 \text{ p } 3 \text{ p } 2 \text{ p } 1 \text{ p } 0.$$




Bu yeni sıralamanın en büyük elemanı var, 0. Ama en küçük elemanı yok, her elemanın hemen bir küçüğü var, örneğin 5'in bir küçüğü bu sıralamaya göre 6. Ayrıca 0 dışında her sayının hemen bir büyüğü var. Bu sıralamaya göre 5'in hemen bir büyüğü 4'tür. Yandaki şekilde bu yeni sıralamayı resmettik. En büyük elemanı en tepede gösterdik, elemanlar küçüldükçe aşağılandılar. Aşağı doğru istediğimiz kadar gidebiliriz.

Doğal sayıların doğal sıralamasıyla karışmasın diye bu yeni sıralamayı p simgesiyle gösterdik. Doğal sayılar üstündeki bu yeni sıralamaya gelecekte $(\mathbb{N}, \text{p})$ olarak gönderme yapacağız.

**Örnek 3.** Üçüncü örneğimizi gönül işlerinden seçelim, daha heyecanlı oluyor. Diyelim Gül'ün beş talibi var: Ayhan, Burak, Can, Doğan ve Erdem. Gül, bu beş talipten birini seçmek için delikanlıları sınavdan geçiriyor. En öncelikli kıstası zekâ olduğundan önce taliplerine satranç oynatıyor. Ayhan herkese yeniliyor, Burak hem Can'a hem de Doğan'a yeniliyor. Zaman kalmadığından başka da maç yapılmıyor. Bu aşamada Gül'ün sıralamasını şöyle gösterebiliriz:




$$A < B < C, A < B < D \text{ ve } A < E.$$

Burada $A$ Ayhan'ı, $B$ Burak'ı vs temsil ediyor elbette. Sıralamayı yukarda şeklettik. En düşük puan alan Ayhan'ı en alt sıraya yerleştirdik.

Bu aşamada Gül Erdem'le Burak arasında bir kıyaslama yapamıyor henüz ama bu kıyaslayamama yukardakinin bir sıralama ya da yarısıralama olmasına engel olmayacak. (Matematiksel tanım biraz sonra...)

Gül, Erdem'le Can ve Doğan'ı da kıyaslayamıyor. Ama Can'ı ve Doğan'ı Burak'a tercih ediyor.

**Örnek 4.** Dördüncü örneğimizde bir kümenin altkümelerini 'küçükten büyüğe' sıralayacağız. $E$ bir küme olsun (Evren'in $E$'si.) $E$'nin altkümeleri kümesine $X$ diyelim. Örneğin $E = \{0, 1, 2\}$ olabilir. O zaman $X$'in şu 8 elemanı vardır:

$\emptyset$

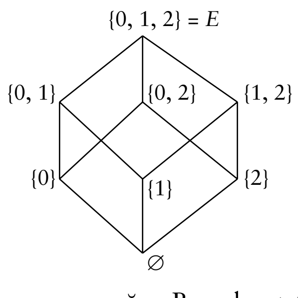
$\{0\}, \{1\}, \{2\},$

$\{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}$

$\{0, 1, 2\} = E.$

Eğer $A, B \in X$ ise, yani $A$ ve $B$, $E$'nin altkümeleriyse, '$A$, $B$'den küçüktür' ilişkisini $A \subset B$ olarak tanımlayalım. Yani $A$, $B$'nin özaltkümesiyse ($A \subseteq B$ ve $A \neq B$ ise), o zaman $A$'nın $B$'den küçük olduğunu söyleyelim. Bu, birazdan tanımlayacağımız anlamda bir sıralamadır.

Bu sıralamada, üçüncü sıralamadaki gibi karşılaştırılamayan elemanlar vardır. Örneğin $X$'in $\{0\}$ ve $\{1\}$ elemanları (yani $E$'nin $\{0\}$ ve $\{1\}$ altkümeleri) karşılaştırılamazlar; birbirlerine eşit olmadıkları gibi ne biri diğerinin ne de beriki öbürünün özaltkümesidir.




Bu sıralamayı $E = \{0, 1, 2\}$ durumunda 'aşağıdan yukarı doğru' yandaki gibi resmedebiliriz.

Gelecekte bu sıralamaya $(\wp(E), \subset)$ sıralı çifti olarak gönderme yapacağız. Burada, $\wp(E)$, $E$'nin altkümeler kümesi, yani $X$ anlamına geliyor.

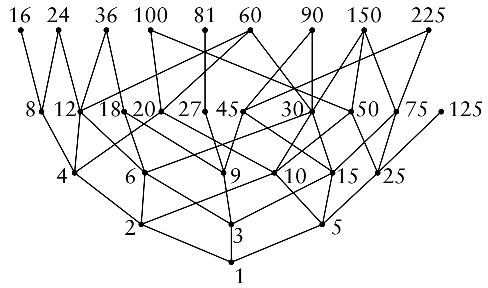
**Örnek 5.** Gene doğal sayıları ele alalım. Eğer $x$, $y$'yi (doğal sayılarda) bölüyorsa, yani $xz = y$ eşitliğini sağlayan bir $z$ doğal sayısı varsa, ama $x \neq y$ ise, $x$, $y$'den (şu anda tanımlamak üzere olduğumuz sıralamaya göre) 'küçük' olsun. Yani bölen sayılar küçük, bölünen sayılar büyük...

0, kendisi dışında hiçbir sayıyı bölmediğinden (çünkü $z$ ne olursa olsun $0z = 0 \neq y$), 0'dan büyük sayı yoktur. Öte yandan her sayı 0'ı böldüğünden (çünkü $x0 = 0$) her sayı 0'dan küçüktür. Dolayısıyla doğal sıralamanın en küçük elemanı olan 0 bu sıralamanın en büyük elemanıdır.

1 her sayıyı böldüğünden, 1 bu sıralamanın en küçük elemanıdır.

Asal sayılar 1'den bir büyük elemanlardır elbette. Ayrıca 1'le bir asal sayı arasında (bu sıralamaya göre) bir başka eleman yoktur.

Bu sıralamaya göre, bir $p$ asalından bir büyük elemanlar $p^2$ ve bir $q$ asalı için $pq$ biçiminde yazılan elemanlardır. İşte bu sıralamanın küçük bir parçasının bir resmi:




Bölen sayıları aşağıya, bölünen sayıları yukarı yazdık, ayrıca bu iki sayıyı bir doğruyla birleştirdik. Ancak şekil karışmasın diye, örneğin, 2 ile 36 arasına bir doğru çizmedik (bu yöntemle çizilen şekle bazen ***Hasse diyagramı*** denir.) 2'den 36'ya giden en az bir yükselen yol olduğundan 2'nin (bu sıralamaya göre) 36'dan küçük olduğu şekle bakınca anlaşılıyor.

Bu son sıralama çok ilgimi çeker benim. Tanımı son derece basit ama kendisi de bir o kadar karmaşık. Yukardaki şemaya bir de 7'yi eklerseniz bu sıralamanın ne kadar karmaşık bir sıralama olduğunu daha iyi anlarsınız, hatta sadece dördüncü katı tamamlamaya çalışın...

Bir sayıyı asallara ayırarak sayının 1'den yüksekliğini de hesaplayabiliriz. Örneğin,

$$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$$

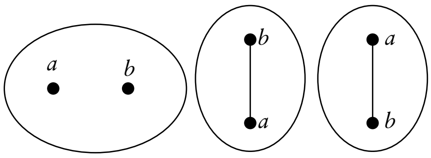
olduğundan, 60'ın yüksekliği $2 + 1 + 1 = 4$'tür, yani 1'den başlayarak tam dört adımda 60'a ulaşabiliriz, örneğin $1 - 2 - 6 - 30 - 60$ bu yollardan biridir.

Gelecekte bu sıralamaya $(\mathbb{N}, |)$ olarak gönderme yapacağız.

**Örnek 6. Sonlu Kümeler Üzerine Sıralama.** Her ne kadar matematiksel değeri olmasa da, pedagojik önemi olduğundan az sayıda elemanı olan kümeler üzerine sıralamaları bulalım.

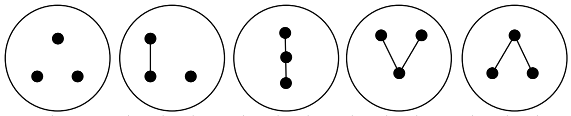
Eğer $X$ boşkümeyse ya da $X$'in tek bir elemanı varsa, $X$'te kıyaslayabileceğimiz iki değişik eleman olamayacağından bu durumlarda yapacak bir şey yok, bu kümeler üzerine sadece tek bir sıralama vardır: ***boşsıralama*** denilen ve hiçbir elemanın hiçbir elemanla kıyaslanmadığı tek bir sıralama.

Eğer $X$'in iki elemanı varsa, diyelim $X = \{a, b\}$ ise, o zaman $X$ üzerine aşağıda görülen üç değişik sıralama vardır. Bunlardan son ikisi birbirlerine çok benzerler, birbirlerinden 'gerçekten farklı' olduklarını söylemek zor... İlerde, 'eşyapısallığı' tanımladığımızda, son iki sıralamanın ***eşyapısal*** olduklarını söyleyeceğiz.




$a$ ve $b$ kıyaslanamaz, boşsıralama — $a < b$ — $b < a$

Şimdi $X$'in üç elemanı olduğunu varsayalım. O zaman, $X$ üzerine 19 tane değişik ama sadece 5 tane 'gerçekten değişik' yani 'eşyapısal olmayan' sıralama vardır.



boşsıralama, bunlardan 1 tane var — bunlardan 6 tane var — bunlardan da 6 tane var — bunlardan 3 tane var — bunlardan 3 tane var

Eleman sayısı dörde çıkarsa sıralama sayısı çok artar. Bunların sayısını bulmayı okura bırakıyoruz.

Sonlu sıralama örneklerini saymazsak, yukarda beş sıralama örneği verdik. İlk ikisi ve sonuncusunda doğal sayıları üç değişik biçimde sıraladık: $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{N}, \prec)$, $(\mathbb{N}, |)$. Birincisinde doğal sıralamayı aldık. İkincisinde doğal sıralamayı ters çevirdik. Sonuncusunda ise sıralamayı bölünebilirlikle tanımladık. Görüldüğü gibi aynı küme değişik biçimlerde sıralanabiliyor.

Son dört örnekte de görülebileceği gibi illa iki farklı elmandan birinin diğerinden küçük olması gerekmiyor. Bu durum ilk iki örnekte zuhur etmiyor; bu sıralamalarda birbirinden farklı herhangi iki elemanı karşılaştırabiliyoruz.

**Matematiksel Tanım.** Artık sıralamayı matematiksel olarak tanımlama zamanı geldi, yoksa bu yazı bitmeyecek. Üstünde bir sıralama tanımlayacağımız kümeye $X$ diyelim. $X$'in elemanlarını bir biçimde sıralamak istiyoruz. İlla birinci, ikinci diye değil, çünkü $X$'te birinci ya da ikinci olmayabilir.

Sıralama dediğimiz şey, $X$'in bazı elemanlarının $X$'in bazı elemanlarından daha küçük (ya da daha büyük) olduklarını buyurmaktır. Öylesine bir buyruk değil ama... Bu buyruğun şu iki özelliği sağlaması gerekir:

**S1.** *Hiçbir eleman kendinden küçük olamaz.*

**S2.** *Eğer x, y'den küçükse ve y de z'den küçükse, o zaman x, z'den küçük olmalıdır.*

Bu iki özelliği sağlayan ikili bir ilişkiye ***sıralama*** denir. "İkili ilişki" dediğimiz iki eleman arasında bir "ilişki"dir; yani $X$'in **iki** elemanını karşılaştırıyoruz.

Eğer "$x$, $y$'den küçüktür" ifadesini $x < y$ olarak kısaltırsak, o zaman yukardaki S1 ve S2 koşulları şu biçimde yazılırlar:

**S1.** *Hiçbir* $x \in X$ *için* $x < x$.

**S2.** *Her* $x, y, z \in X$ *için, eğer* $x < y$ *ve* $y < z$ *ise,* $x < z$*'dir*[1].

Dikkat ederseniz herhangi iki elemanın karşılaştırılabileceğini söylemiyor sıralama koşulları, yani $x$'in $y$'den küçük olmadığı, $y$'nin de $x$'ten küçük olmadığı $x \neq y$ elemanları olabilir. Bu yüzden bu koşulları sağlayan bir sıralamaya kimi zaman ***yarı-sıralama*** dendiği de olur.

Herhangi iki elemanın karşılaştırılabildiği bir sıralamaya, yani S1 ve S2 dışında,

**S.** *Her* $x, y \in X$ *için, ya* $x < y$ *ya* $y < x$ *ya da* $x = y$

koşulunu sağlayan bir sıralamaya ***tamsıralama*** denir. Yazının başında verdiğimiz ilk iki örnek birer tamsıralamadır, son üç örnek ise tamsıralama olmayan yarı-sıralamalardır çünkü son üç örnekte karşılaştırılamayan (ve eşit olmayan) elemanlar vardır.

Tam sıralamaları daha sonraki yazılarda daha ayrıntılı olarak konu edeceğiz.

Bir sıralamada $<$ yerine kimi zaman $\subset$ (dördüncü örnekte olduğu gibi), $\prec$, $\sqsubset$, $\lhd$ gibi başka imgelerin kullanıldığı da olur. Örneğin doğal sayıları tersten sıraladığımız ikinci örneğimizde "doğal sıralama"yla karışmasın diye $<$ yerine $\prec$ imgesini kullanmıştık. Gene doğal sayıları sıraladığımız beşinci örneğimizde sıralama bölünebilirliğe göre tanımlandığından, $<$ yerine $|$ imgesini kullanmak yerinde bir karardı.

1 S1 özelliğine sahip bir ikili ilişkiye ***antirefleksif*** ya da ***yansımayan*** ilişki denir. S2 özelliğine sahip bir ikili ilişkiye ise ***tranzitif*** ya da ***geçişli ilişki*** denir.

### Daha Matematiksel Bir Deyişle...

Sıralamanın asıl matematiksel tanımı şöyledir. $X$ bir küme olsun. $A \subseteq X \times X$,

**S1.** *Her $x \in X$ için $(x, x) \notin A$,*

**S2.** *Her $x, y, z \in X$ için, eğer $(x, y) \in A$ ve $(y, z) \in A$ ise o zaman $(x, z) \in A$'dir*

özelliklerini sağlayan bir altküme olsun. O zaman $A$'ya $X$ üzerine bir ***sıralama*** denir ve bu sıralama $(X, A)$ olarak yazılır.

$X$ üzerine bir ***ikili ilişki*** sadece $X \times X$'in bir altkümesidir. Demek ki bir sıralama S1 ve S2 özelliklerini sağlayan bir ikili ilişkidir.

Eğer $(X, A)$ bir sıralamaysa, sık sık $(x, y) \in A$ yerine $x < y$ gibi sezgilerimize daha fazla hitap eden ve daha fazla anlam ima eden bir yazılım kullanılır. O zaman sıralama $(X, A)$ yerine $(X, <)$ olarak yazılır.

Bu tanımdan da anlaşılacağı üzere, eğer $A = \varnothing$ ise S1 ve S2 özellikleri doğru olur ve böylece hiçbir elemanın hiçbir elemanla karşılaştırılmadığı ***boşsıralama*** adı verilen $(X, \varnothing)$ sıralamasını elde ederiz. Boşsıralamaya ***kararsız*** sıralama adını da verebiliriz. Zaten tek bir elemanı olan bir küme üzerine sadece boşsıralama olabilir. Hayatta boşsıralamadan daha ilginç sıralamalar vardır.

Bir $X$ kümesi üzerine bir tamsıralama, $A$'nın en büyük olduğu $(X, A)$ sıralamasıdır.

---

Eğer bir sıralamada $x < y$ ise, $y$'nin (bu sıralama için) $x$'ten ***daha büyük*** olduğunu söyleriz.

Bir sıralamada hem $x$, $y$'den hem de $y$, $x$'ten küçük olamaz, çünkü o zaman S2'de $z = x$ alarak, $x < x$ buluruz ki bu da S1'le çelişir.

Eğer $<$ diye adlandırılan bir sıralama verilmişse, elemanlar arasında eşitliği de içeren ve genellikle $\leq$ imiyle simgelenen ikili bir ilişki şöyle tanımlanır:

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ ya da } x = y. \qquad (1)$$

$\leq$ ikili ilişkisi şu özellikler sağlar:

**T1.** *Her $x \in X$ için $x \leq x$.*

**T2.** *Her $x, y, z \in X$ için, eğer $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise, $x \leq z$'dir.*

**T3.** *Her $x, y \in X$ için, eğer $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise, $x = y$ eşitliği doğrudur.*

T1 ve T2'nin doğrulukları çok bariz. T3'ü kanıtlayalım. $x \leq y$ ve $y \leq x$ olsun. Eğer $x \neq y$ ise, $\leq$ ilişkisinin tanımına göre $x < y$ ve $y < x$. Bundan ve S2'den $x < x$ çıkar, ki bu da S1'le çelişir.

Eğer bir $X$ kümesi üzerine yukardaki T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ ikili ilişkisi verilmişse ve $<$ ikili ilişkisini,

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \text{ ve } x \neq y \qquad (2)$$

olarak tanımlarsak, o zaman $<$ ilişkisi S1 ve S2 özelliklerini sağlar, dolayısıyla bir sıralama olur. Bunun kanıtı çok basittir ve okura bırakılmıştır.

Kolayca görüleceği üzere S1 ve S2 özelliğini sağlayan bir sıralamayla, T1, T2 ve T3 özelliğini sağlayan ikili ilişkiler arasında bir eşleme vardır. Birinden diğeri açıklanan yöntemlerle elde edilir. Ve açıklanan yöntemler iki kez uygulandığında başlanan ikili ilişki bulunur. Yani S1 ve S2 özelliklerini sağlayan bir $<$ sıralamasından başlarsak ve bu sıralamaya önce (1), sonra da (2) yöntemini uygularsak başladığımız $<$ sıralamasını buluruz. Ayrıca eğer T1, T2 ve T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ ilişkisinden başlarsak ve bu ilişkiye önce (1), sonra da (2) yöntemini uygularsak başladığımız $\leq$ ilişkisini buluruz.

Demek ki S1 ve S2 özelliklerini sağlayan bir sıralamayla T1, T2 ve T3 özelliklerini sağlayan bir ikili ilişki arasında pek bir fark yoktur. Bu yüzden bundan böyle T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir ikili ilişkiye de ***sıralama*** diyeceğiz. Eğer sıralamayı $<, \prec, \subset, \sqsubset, \lhd$ gibi bir simgeyle tanımlarsak sıralamanın S1 ve S2 özelliklerini sağladığını, eğer $\leq, \leqq, \lesssim, \subseteq, \sqsubseteq, \unlhd$ gibi bir simgeyle tanımlarsak T1, T2, T3 özelliklerini sağladığını varsayacağız.

T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ sıralamasının bir tamsıralama olması için,

**T.** *Her $x, y \in X$ için, ya $x \leq y$ ya da $y \leq x$*

özelliğinin sağlanması gerekir elbette.

T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ sıralamasında eğer $x \leq y$ ise, "$x$, $y$'den ***küçükeşit***tir" ya da "$y$, $x$'ten ***büyükeşit***tir" diyeceğiz.

Eğer bir sıralama verilmişse, $>, \geq, \not<, \not>, \not\leq, \not\geq, \nprec, \nsucc$ gibi anlamı bariz olan ve alışık olduğumuz simgeleri hiç çekinmeden kullanacağız. Örneğin:

$x > y \Leftrightarrow y < x$

$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$

$x \not\geq y \Leftrightarrow x \geq y$ doğru değilse

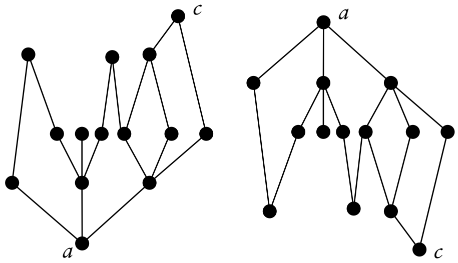
$x \nprec y \Leftrightarrow x \prec y$ doğru değilse

Dikkat! Eğer $(X, <)$ bir tamsıralama değilse, $x \not< y$ illa $x \geq y$ anlamına gelmeyebilir, çünkü $x$ ve $y$ karşılaştırılamaz da olabilirler.

Dört sayfayı aşan bir örnek ve tanım faslından sonra yazının kalan kısmında sıralamaların bazı özelliklerini ve bazı sıralama örnekleri göstereceğiz.

### Eskilerden Yeni Sıralamalar Türetmek

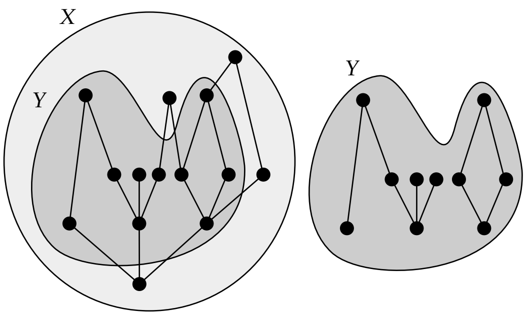
**Bir Sıralamayı Ters Çevirmek.** İkinci örneğimiz olan (N, p) sıralamasında birinci örneğimiz olan (N, <) sıralamasını ters çevirmiştik, birinci örnekte büyük olan elemanlar ikinci örnekte küçük olmuşlardı. Genel olarak, herhangi bir sıralamayı




Bir sıralama ve onun ters çevrilmiş hali

ters çevirerek yeni bir sıralama elde edebiliriz: Eğer $<$, $X$ kümesi üzerine bir sıralamaysa, $x \prec y$ ilişkisini $y < x$ olarak tanımlayalım; o zaman $\prec$ de $X$ üzerine bir sıralamadır. Bu iki sıralama arasında kaydadeğer bir fark yoktur.

**Sıralı Bir Kümenin Bir Altkümesini Sıralamak.** Sıralı bir $X$ kümesinin bir $Y$ altkümesi verilmişse, $X$'in sıralamasını $Y$'ye kısıtlayarak $Y$'yi de sıralayabiliriz, yani $Y$ kümesi $X$ üstkümesinin sıralamasıyla sıralanır. $X$'in sıralamasını sadece $Y$'nin elemanları-

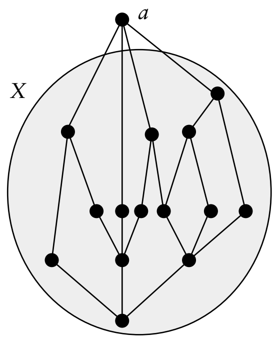



Bir sıralama ve bir altkümesi

na kısıtlamak yeterlidir bunun için. Bu durumda $Y$'nin sıralamasının $X$'in sıralamasından ***miras kaldığı*** ya da $X$'in sıralamasının ***kalıntısı*** olduğu söylenir. Örneğin Z'nin doğal sıralaması hem Q'nün hem de R'nin doğal sıralamasının kalıntısıdır. N'nin doğal sıralaması da hem Z'nin hem Q'nün hem de R'nin doğal sıralamasının kalıntısıdır.

$Y$'nin bu sıralamasına $X$'in ***altsıralaması*** denir.

**Yeni Bir Eleman Eklemek.** Eğer bir $(X, <)$ sıralaması verilmişse ve $a$, $X$'te olmayan bir elemansa, $X \cup \{a\}$ kümesini $X$'in sıralamasını bozmayacak şekilde çeşitli biçimlerde sıralayabiliriz. En kolayı ve




Sıralanmış bir $X$ kümesinin tepesine bir eleman eklemek

en çok kullanım alanı bulanı $a$'yı en tepeye koymaktır, yani $a$'yı en büyük eleman yapmaktır. $X \cup \{a\}$ kümesinin bu sıralamasında, $X$'in eski düzeni aynen korunur, bir de ayrıca $a$'nın $X$'in tüm elemanlarından daha büyük olacağı buyrulur. Yani her $x, y \in X \cup \{a\}$ için, $x < y$ ancak ve ancak

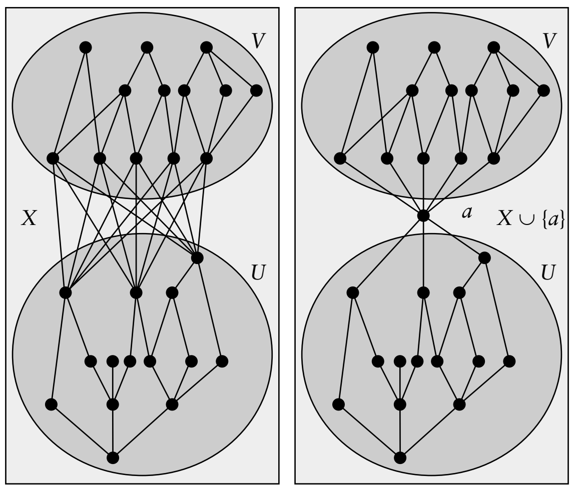
$$x, y \in X \text{ ve } (X, <)\text{'de } x < y \text{ ise}$$

ya da

$$x \in X \text{ ve } y = a \text{ ise.}$$

$a$ elemanı yukardaki gibi $X$'in tepesine eklendiğinde $a$ yerine $\infty$ yazmak nerdeyse bir gelenek halini almıştır.

$a$'yı $X$'in tepesi yerine başka bir yerine de ekleyebiliriz. Örneğin $X$'in içinde şu özellikleri sağlayan $U$ ve $V$ kümeleri olduğunu varsayalım: $U \cup V = X$ ve $U$'nun her elemanı $V$'nin her elemanından




$a$'yı $U$ ile $V$ arasına koymak

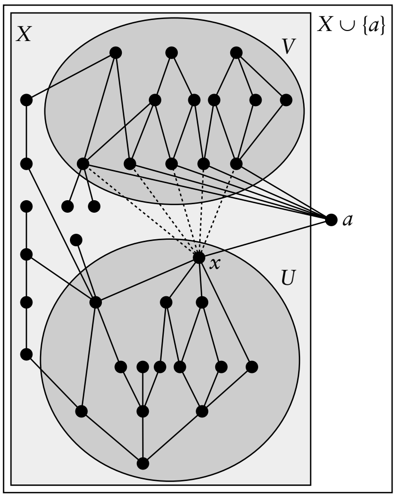
küçük. Şimdi $a$'yı $U$ ile $V$ arasına koyalım, yani $a$'yı $U$'nun her elemanından büyük ve $V$'nin her elemanından küçük yapalım. $X \cup \{a\}$ kümesi üstünde yeni bir sıralama elde ederiz.

Aslında $a$'yı en sona koymak bunun özel bir halidir: Eğer yukardaki inşada $U = X$ ve $V = \varnothing$ alırsak, $a$'yı en tepeye koymuş oluruz.

Bunun bir başka varyasyonu şöyledir: $x \in X$ ve

$V = \{y \in X : x < y\}$ ve $U = \{y \in X : y \geq x\}$

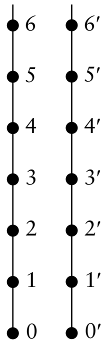
olsun. Şimdi $a$'nın $V$'nın elemanlarından küçük ve $U$'nun elemanlarından büyük olduğunu buyuralım. Böylece $a$'yı $x$'ten hemen sonra koymuş oluruz. Bunun resmi de aşağıda.




$a$'yı $x$'ten hemen sonra koymak

**İki Sıralamayı Toplamak.** $(U, <)$ ve $(V, <)$ iki sıralama olsun. $U$ ile $V$'nin ayrık olduklarını, yani kesişimlerinin boş olduğunu varsayalım. Şimdi, $U$ ve $V$'de varolan sıralama dışında yeni herhangi bir sıralama eklemeden $U \cup V$ kümesini sıralı bir küme olarak algılayabiliriz. $(U \sqcup V, <)$ olarak simgeleyeceğimiz bu sıralamada $U$'nun elemanlarıyla $V$'nin elemanları birbirleriyle kıyaslanamazlar.

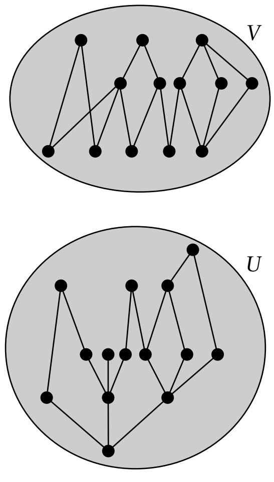
Eğer $U$ ve $V$ kümeleri ayrık değillerse ve illa $U$ ve $V$ ile yukardaki inşayı yapmak istersek, önce bu iki kümeyi bir biçimde 'ayrıklaştırmak' gerekir. Bunun standart yolu $U$ yerine $U \times \{0\}$, $V$ yerine $V \times \{1\}$ yazmaktır. Ayrıca $U$ ve $V$'nin sıralamalarını bozmadan $U \times \{0\}$ ve $V \times \{1\}$ kümelerine taşınır. Eğer bu çok meşakkatli geliyorsa, $V$'nin elemanlarına ($U$'nunkilere değil!) $v$ yerine $v'$ adını verilir. Yandaki şekilde $U = V = \mathbb{N}$ durumunda bunun resmini yanda yaptık.



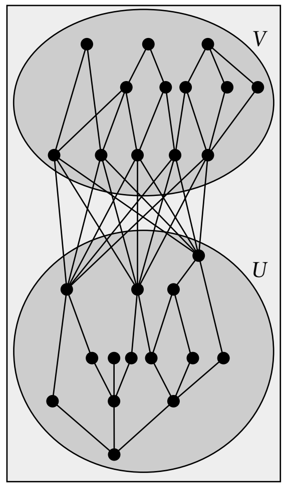

$\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$

$U \cup V$ birleşimini (kümeler hâlâ ayrık) şöyle de sıralayabiliriz. $U$ ve $V$'nin varolan sıralamasını kabullenip ayrıca $U$'nun her elemanını $V$'nin her elemanından küçük addedebiliriz. $U \cup V$ kümesi üzerindeki bu sıralamaya $U + V$ olarak gösterilir. Resmi yan sütunda.

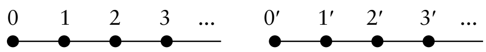
$\mathbb{N} + \mathbb{N}$ sıralaması önemlidir. Aşağıda bu sıralamayı gösterdik, ancak yerden kazanmak için $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ sıralamasını 'aşağıdan yukarıya değil, soldan sağa yazdık. Zaten ilerde de elemanları küçükten büyüğe yazarken soldan sağa yazacağız.




$U$ ve $V$ sıralamaları




$U + V$




$\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$

**Fonksiyonla Sıralama.** $(Y, <)$ bir sıralama, $X$ bir küme ve $f : X \to Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. $X$ üzerine şu $<$ ikili ilişkisini tanımlayalım: $x_1$, $x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

olsun. Bu, kolayca kanıtlanabileceği üzere $X$ üzerine bir sıralama tanımlar.

Dikkat: Tanımı

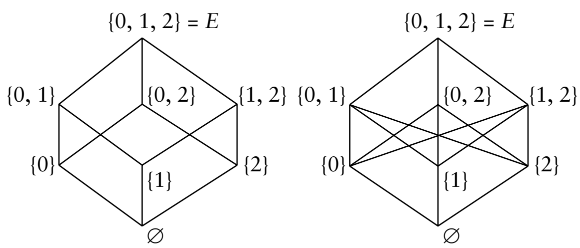
$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

olarak yapsaydık, eğer $f$ birebir değilse, bu tanım bir sıralama tanımlamaz; çünkü $x_1 \neq x_2$, için $f(x_1) = f(x_2)$ olursa, o zaman, $x_1 \leq x_2$ ve $x_2 \leq x_1$ olur ama $x_1 = x_2$ olmaz.

**Örnek:** $E$ bir küme olsun. $X$, $E$'nin sonlu altkümeleri kümesi olsun. $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow |x_1| < |x_2|$$

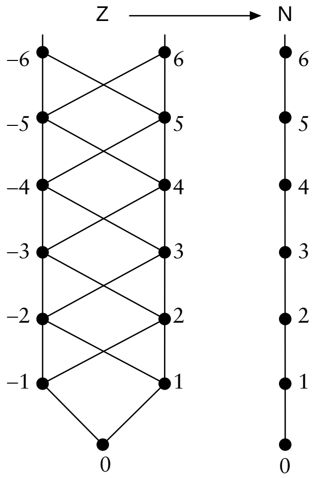
ilişkisi ($|x|$, $x$ altkümesinin eleman sayısıdır) $X$ üzerine bir sıralama tanımlar. Bu sıralama $(X, \subset)$ sıralamasından daha "ince" bir sıralamadır çünkü eğer $x_1 \subset x_2$ ise $x_1 < x_2$'dir. Eğer $E = \{1, 2, 3\}$ ise her iki sıralamanın resmi aşağıda.



**Örnek:** $X = \mathbb{Z}$ olsun. $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ için,

$$x_1 \sqsubset x_2 \Leftrightarrow |x_1| < |x_2|$$

ilişkisi ($|x|$, $x$ sayısının mutlak değeridir) $\mathbb{Z}$ üzerine bir sıralama tanımlar. Resmi aşağıda olan ve büyüklüğün mutlak değere göre ölçüldüğü bu sırala-




maya göre, örneğin, −3, 2'den daha büyüktür, yani $2 \sqsubset -3$'tür. Ama bu sıralamada, mutlak değerleri aynı olan sayılar karşılaştırılmaz.

**Alfabetik Sıralama.** En çok kullanılan ve en yararlı sıralamalardan biridir. $(X, <)$ ve $(Y, <)$ birer sıralama olsun. $X \times Y$ kartezyen çarpımı üzerine şu sıralamayı koyalım: $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ için,

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$$

ancak ve ancak

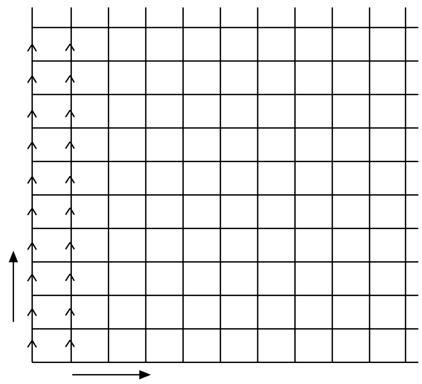
$$x_1 < x_2 \text{ ya da } x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 < y_2$$

ise. Bunun S1 ve S2 koşullarını sağlayan bir sıralama olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz. (Mutlaka yapılmalı!)

Birkaç örnek vermekte yarar var. Bu sıralamaya göre $(5, 0) > (4, 100) > (4, 5) > (4, 0) > (3, 1000) > (2, 1) > (2, 0) > (1, 5) > (0, 600) > (0, 1) > (0, 0)$.

Bu sıralamada bir $(x, y)$ çiftinin yerini saptamak için önce $x$'e bakılır. $x$ ne kadar küçükse $(x, y)$ de o kadar küçüktür. Eğer birinci koordinatlar eşitse, o zaman ikinci koordinatlara bakılır.

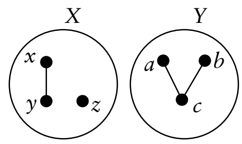
Örnek olarak $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$'nin alfabetik sıralamasına bakalım. $(0, 0)$ bu sıralamanın en küçük elemanıdır. Bu elemandan bir sonra gelen eleman $(0, 1)$'dır. Sonra $(0, 2)$, $(0, 3)$ vs gelir. Tüm $(0, n)$'ler bittikten sonra (!) ilk gelen eleman $(1, 0)$'dır. Bunun ardından $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ vs gelir. $(1, n)$ türünden elemanlar bittikten sonra $(2, 0)$ elemanı gelir ve sıralama böylecene sürer gider.



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ızgarasının elemanları sağa ve yukarı gittikçe büyürler. İkinci sütunun tüm elemanları birinci sütunun tüm elemanları daha büyüktür. Üçüncü sütunun tüm elemanları ikinci sütunu tüm elemanlarından daha büyüktür.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ örneğinde her elemandan hemen sonra gelen bir eleman vardır: $(n, m)$ elemanından hemen sonra $(n, m + 1)$ elemanı gelir. Ayrıca $(n, 0)$ türünden elemanlar dışında her elemanın hemen bir öncesi vardır: Eğer $m \neq 0$ ise, $(n, m)$'den hemen önce gelen eleman $(n, m - 1)$ elemanıdır.

**Alıştırmalar.**




**1.** Eğer $X$ ve $Y$ yandaki gibiyse $X$ x $Y$ alfabetik sıralamasını bulun.

Aşağıdaki alıştırmalar matematiksel ifade edilmemişseler de okur sıralamaları kavramaya çalışarak ne sorulmak istendiğini anlayabilir.

**2.** $X$ herhangi sıralı bir küme olsun. $\{0, 1\}$ kümesini $0 < 1$ olarak sıralayalım. $X \times \{0, 1\}$ alfabetik sıralamasıyla $X + X$ sıralamasının bir anlamda 'aynı' sıralama olduklarını gösterin.

**3.** $\{0, 1\}$ kümesini yukardaki gibi, $\mathbb{N}$'yi de doğal sıralayalım. $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ sıralamasıyla $\mathbb{N}$ sıralaması arasında 'pek fark olmadığını' gösterin.

4. $\{0, 1\}$ kümesini yukardaki gibi, $\{a, b\}$ kümesi de boşsıralansın. $\{0, 1\} \times \{a, b\}$ alfabetik sıralamasıyla $\{a, b\} \times \{0, 1\}$ sıralamasının ayrı sıralamalar olduklarını gösterin.

### Sıralamaların Özel Elemanları

**En Küçük ve En Büyük Elemanlar.** Bir sıralamada en küçük ya da en büyük eleman olabileceğini de olmayabileceğini de gördük. $\mathbb{N}$'nin doğal sıralamasının en küçük elemanı vardır ama en büyük elemanı yoktur. Bunun ters yüz edilmişi olan $(\mathbb{N}, \mathrm{p})$ sıralamasının en büyük elemanı vardır (0'dır) ama en küçük elemanı yoktur. $\mathbb{Z}$'nin doğal sıralamasının ne en küçük ne de en büyük elemanı vardır. Öte yandan $(\wp(E), \subset)$ sıralamasının hem en küçük ($\emptyset$) hem de en büyük ($E$) elemanı vardır.

$X$, $E$'nin sonlu altkümeleri kümesi olsun. $X$'i $\subset$ ilişkisine göre sıralayalım, yani $(X, \subset)$ sıralamasına bakalım. Eğer $E$ sonsuz bir kümeyse, bu sıralamanın en büyük elemanı yoktur, çünkü herhangi bir sonlu $A$ kümesine $E$'den $A$'da olmayan bir eleman eklersek, $A$'dan daha büyük bir küme elde etmiş oluruz.

$(\mathbb{Z}, |)$ sıralamasında 0 en büyük elemandır ama $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, |)$ sıralamasının en büyük elemanı yoktur.

Matematiksel tanım şöyle: Bir $(X, <)$ sıralamasının ***en büyük eleman***ı "her $x \in X$ için $x \leq a$" özelliğini sağlayan bir $a \in X$ elemanıdır. ***En küçük eleman*** benzer biçimde tanımlanır. Eğer $A \subseteq X$ ise $A$'nın en büyük elemanı "her $x \in A$ için $x \leq a$" özelliğini sağlayan bir $a \in A$ elemanıdır. Burada $a$'nın $A$'da olması önemlidir. Örneğin $X = \mathbb{R}$ (doğal sıralamayla) ve $A = (0, 1)$ aralığı ise, $A$'nın en büyük elemanı yoktur. Ama $A = (0, 1]$ ise, $A$'nın en büyük elemanı vardır. $A$'nın en küçük elemanı benzer biçimde tanımlanır.

$A$'nın en büyük elemanı (eğer varsa) bir tanedir, çünkü $a$ ve $b$, $A$'nın en büyük elemanlarıysa hem $a \leq b$ hem de $b \leq a$ eşitsizlikleri geçerli olduğundan $a = b$ olur.

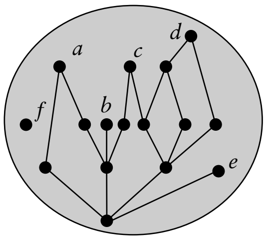
**Maksimum ve Minimum Elemanlar.** $A$'nın ***maksimum*** elemanları her $x \in A$ için $x \not> a$ özelliğini sağlayan $a \in A$ elemanlarıdır. Burada, $a$'nın $A$'da olması gerektiğine dikkatinizi çekerim.

En büyük eleman, eğer varsa, tek maksimum elemandır. Ama aşağıdaki şekildeki örnekte de görüleceği üzere maksimum elemanlardan birkaç tane olabilir.

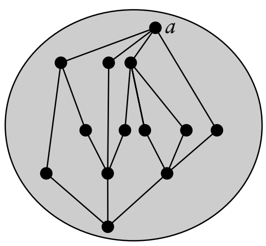
Bir tamsıralamada en büyük elemanla maximum eleman arasında fark yoktur ve bu durumda en büyük eleman $\max A$ olarak gösterilir.

$A$'nın ***minimum*** elemanları benzer şekilde tanımlanırlar.

Sonlu bir sıralı kümede mutlaka minimum ve maksimum elemanlar olmak zorundadır.



maksimum elemanlar:
$a, b, c, d, e, f$



en büyük eleman: $a$

$(\mathbb{Z} \setminus \{1\}, |)$ sıralamasının en küçük elemanı yoktur. Ama bu sıralamada asal sayılardan daha küçük eleman olmadığından, asal sayılar bu sıralamanın minimum elemanlarıdır.

**Alıştırmalar**

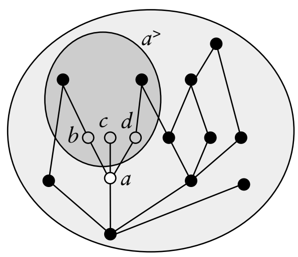
**1.** $X$ ve $Y$ sıralamalarının en büyük elemanları varsa, $X \times Y$ alfabetik sıralamasının da en büyük elemanı olduğunu gösterin.

**2.** $X \times Y$ alfabetik sıralamasının en büyük elemanı varsa, $X$ ve $Y$ sıralamalarının da en büyük elemanları olduğunu gösterin.

**Hemen Sonraki ve Hemen Önceki Elemanlar.** $(X, <)$ bir sıralama ve $x \in X$ olsun. Verdiğimiz tüm örneklerde, belki son eleman dışında, her elemandan hemen sonra gelen en az bir eleman vardı. Örneğin bölünmeyle tanımlanmış beşinci örneğimizde, hem 4, hem 6, hem 10, 2'den hemen sonra gelen elemanlar. Ama $(\mathbb{Q}, <)$ ya da $(\mathbb{R}, <)$ sıralamalarında hiçbir elemandan **hemen sonra** gelen bir eleman yoktur, çünkü her $a < b$ için, örneğin,

$$a < (a + b)/2 < b$$

eşitsizlikleri sağlanır. $(\wp(E), \subset)$ sıralamasında $E$ dışında her elemandan hemen sonra gelen bir eleman vardır.



$a$'dan hemen sonra gelen elemanlar:
$b, c, d$

Eğer $x \in X$ ise, $(x, \infty)$ kümesini

$$(x, \infty) = \{y \in X : x < y\}$$

olarak tanımlayalım. (Burada, $\infty$, yepyeni bir simgedir; $X$'te $\infty$ diye bir elemanın olmadığını varsayıyoruz.) O zaman $x$'ten ***hemen sonra gelen elemanlar*** $(x, \infty)$ kümesinin en küçük elemanlarıdır. Yani bir $y \in X$ elemanı eğer $x < y$ eşitsizliğini sağlıyorsa ve hiçbir $z \in X$ için $x < z < y$ eşitsizlikleri sağlanmıyorsa, o zaman $y$, $x$'ten hemen sonra gelen elemanlardan biridir.

Eğer $x$'ten hemen sonra gelen eleman bir taneyse, bu eleman $x^+$ olarak yazılır.

$x$'ten ***hemen önce gelen elemanlar*** benzer biçimde tanımlanırlar.

Her elemandan hemen sonra gelen bir eleman olmayabilir. Örneğin $(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasında, 0'dan (ya da herhangi bir başka elemandan) hemen sonra gelen eleman yoktur.

Eğer bir sıralamada her $a < b$ için, $a < c < b$ eşitsizliklerini sağlayan bir $c$ elemanı varsa o zaman bu sıralamaya ***yoğun sıralama*** denir. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$'nin doğal sıralamaları yoğun sıralamalardır ama $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$'nin doğal sıralamaları yoğun sıralamalar değillerdir. $(\wp(E), \subset)$ sıralaması da yoğun bir sıralama değildir, örneğin, eğer $a \in E$ ise, $\emptyset$ ile $\{a\}$ arasında bir başka eleman yoktur.

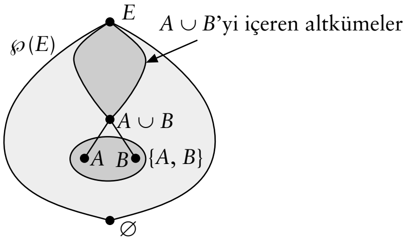
Yoğun sıralamalarda hiçbir zaman bir elemandan hemen sonraki ya da bir elemandan hemen önceki elemanlar olmaz. Ama yoğun bir sıralamada en küçük ya da en büyük elemanlar olabilir; örneğin $[0, 1]$ kapalı aralığı (doğal sıralamayla) böyle bir sıralamadır.

**Üstsınır ve Altsınır.** $(X, <)$ bir sıralama olsun. $A$'nın $X$ bir altkümesi olsun. $A$'nın tüm elemanlarından büyükeşit olan $X$'in bir elemanına $A$'nın ***üstsınırı*** adı verilir. Demek ki $b$'nin $A$'nın bir üstsınırı olabilmesi için her $a \in A$ için $a \leq b$ eşitsizliği sağlanmalıdır. ***Altsınır*** benzer biçimde tanımlanır.

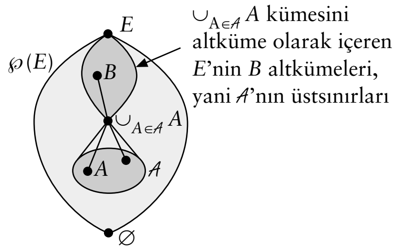
Birkaç örnek verelim. $X = \mathbb{R}$ (doğal sıralamayla) olsun. 1 ve 1'den büyük her gerçel sayı hem $[0, 1]$ hem de $(0, 1)$ aralıklarının üstsınırıdır. Ama $\mathbb{R}$'de, örneğin, $\mathbb{Z}$'nin üstsınırı yoktur.

$(\mathbb{Z}, |)$ sıralamasında, eğer $A$ sonlu bir kümeyse, $A$'daki sayıların en küçük ortak çarpımına bölünen her sayı $A$'nın bir üstsınırıdır; en küçük ortak çarpım da en küçük üstsınırdır. Bu sıralamada sonsuz kümelerin üstsınırı 0'dır. Ancak $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, |)$ sıralamasında, sonsuz altkümelerin üstsınırı yoktur.

Şimdi örnek olarak $(\wp(E), \subset)$ sıralamasını ele alalım. $A, B \subseteq E$ olsun, yani $A, B \in \wp(E)$ olsun. O zaman $\{A, B\}$, $\wp(E)$'nin bir altkümesidir. $E$'nin, hem $A$'yı hem de $B$'yi (altküme olarak) içeren bir altkümesi, yani $E$'nin $A \cup B$'yi içeren bir altkümesi $\{A, B\}$'nin bir üstsınırıdır. $A \cup B$ de $\{A, B\}$ altkümesinin bir üstsınırıdır ve üstsınırların en küçüğüdür.

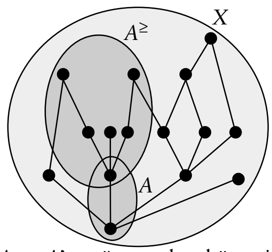



$(\wp(E), \subset)$ sıralamasında $\wp(E)$'nin her altkümesinin bir üstsınırı vardır. $E$ bunlardan biridir elbette. (Bir sıralamanın en büyük elemanı her altkümenin üstsınırıdır elbette!) Eğer $\mathcal{A}$, $\wp(E)$'nin bir altkümesiyse, yani $E$'nin bazı altkümelerinden oluşan bir kümeyse, o zaman $E$'nin $\cup_{A \in \mathcal{A}} A$ altkümesi ve bu altkümenin her üstkümesi $\mathcal{A}$'nın bir üstsınırıdır ve üstelik $\mathcal{A}$'nın üstsınırlarının en küçüğüdür.




**En Küçük Üstsınır.** $(X, <)$ bir sıralama olsun. $A$, $X$'in bir altkümesi olsun. $A^{\geq}$, $A$'nın üstsınırları kümesini temsil etsin:

$$A^{\geq} = \{x \in X : \text{her } a \in A \text{ için } a \leq x\}.$$




$A$ ve $A$'nın üstsınırları kümesi $A^{\geq}$

Eğer $x$ in $X$ için, $[x, \infty)$ kümesini

$$[x, \infty) = \{y \in X : x \leq y\}$$

olarak tanımlarsak,

$$A^{\geq} = \cap_{a \in A} [a, \infty)$$

olur.

$A^{\geq}$ kümesinin en küçük elemanına (eğer varsa) $A$'nın ***en küçük üstsınırı*** adı verilir. Demek ki $A$'nın en küçük üstsınırı, her şeyden önce $A$'nın bir üstsınırıdır ve ayrıca $A$'nın tüm üstsınırlarından küçükeşittir.

$A$'nın ***en küçük üstsınırı***, eğer varsa, bir tanedir, çünkü hem $a$ hem de $b$, $A$'nın en küçük üstsınırlarıysa, o zaman hem $a \leq b$ hem de $b \leq a$ olur, yani $a = b$ olur.

$A$'nın en küçük üstsınırı $\sup A$ olarak gösterilir. En büyük altsınır benzer biçimde tanımlanır ve $\inf A$ olarak gösterilir.

$A$'nin en büyük elemanı varsa o zaman bu eleman $A$'nın en küçük üstsınırıdır. Ayrıca eğer $A$'nın en küçük üstsınırı varsa ve $A$'daysa, o zaman bu eleman $A$'nın en büyük elemanı olmak zorundadır.

$(\mathbb{N}, <)$ ve $(\mathbb{Z}, <)$ sıralamalarında, üstsınırı olan ve boş olmayan her altkümenin en küçük üstsınırı vardır, ancak aynı şey $(\mathbb{Q}, <)$ sıralaması için doğru değildir. Örneğin,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\} \subseteq \mathbb{Q}$$

ise $A$'nın üstsınırları vardır (örneğin 5) ama en küçük üstsınırı yoktur, çünkü $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildir. Öte yandan,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 5\} \subseteq \mathbb{Q}$$

kümesinin $\mathbb{Q}$'deki en küçük üstsınırı 5'tir.

$(\mathbb{R}, <)$ sıralamasında üstsınırı olan ve boş olmayan her altkümenin bir en küçük üstsınırı vardır. Bu çok önemli olguyu kanıtlamak için MD okurları şu anda yeterli bilgiye sahip değiller, çünkü MD'de henüz gerçel sayılar kümesini tanımlanmadı. Birkaç sayı sonra tanımlandığında bu olguyu da kanıtlayacağız.

$(\mathbb{Z}, |)$ sıralamasında, eğer $A$ sonlu bir kümeyse, $A$'daki sayıların en küçük ortak çarpımına (ekok) bölünen her sayı $A$'nın bir üstsınırıdır ve en küçük ortak çarpım bu sonlu kümenin en küçük üstsınırıdır. 0 her altkümenin üstsınırıdır. Sonsuz kümelerin üstsınırı 0'dır. Öte yandan $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, |)$ sıralamasında sonsuz kümelerin en küçük üstsınırı yoktur çünkü bu sıralamada sonsuz kümelerin üstsınırları yoktur.

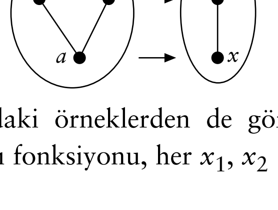
### Sıralamaların Eşyapı Fonksiyonları

$(X, <)$ ve $(Y, \prec)$ iki sıralama olsun. Eğer $X$'ten $Y$'ye giden bir $f$ fonksiyonu her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \prec f(x_2) \quad (1)$$

koşulunu sağlıyorsa, yani sıralamaya saygı duyuyorsa, o zaman $f$'ye ***eşyapı fonksiyonu*** adı verilir. Bu fonksiyonlara ***artan fonksiyonlar*** da denir.

Bir eşyapı göndermesi birebir olmak zorunda değildir. Örneğin $X = \{a, b\}$ boşsıralamayla sıralanmışsa ve $Y = \{c\}$ ise, $X$'ten $Y$'ye giden sabit $c$ fonksiyonu yukardaki koşulu sağlar ama birebir değildir elbet. Aşağıda birebir olmayan bir başka eşyapı fonksiyonu örneği var. Bu örnekte $f(a) = x < y = f(b) = f(c)$.




Yukardaki örneklerden de görüleceği üzere, bir $f$ eşyapı fonksiyonu, her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 \le x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \preccurlyeq f(x_2) \quad (2)$$

koşulunu sağlamayabilir.

Öte yandan (2) koşulunu sağlayan bir $f$ fonksiyonu, ki bunlara ***azalmayan fonksiyonlar*** diyebiliriz, birebir olmalıdır. Nitekim, eğer $f(x_1) = f(x_2)$ ise, hem $f(x_1) \le f(x_2)$ hem de $f(x_2) \le f(x_1)$ olduğundan, hem $x_1 \le x_2$ hem de $x_2 \le x_1$ koşulları sağlanır; dolayısıyla $x_1 = x_2$ olmak zorundadır.

Dolayısıyla eğer $f$ fonksiyonu (2) koşulunu sağlıyorsa (1) koşulunu da sağlar.

Bu aşamada fikir değiştirip bir eşyapı fonksiyonundan (1) yerine daha güçlü olan (2) koşulunu sağlamasını isteyebiliriz. Şöyle de yapabiliriz: (1) koşulunu sağlayanlara ***<-eşyapı fonksiyonu***, (2) koşulunu sağlayanlara ***≤-eşyapı fonksiyonu*** diyebiliriz. Herhangi biri sözkonusu olduğunda da kısaca ***eşyapı fonksiyonu*** diyeceğiz. Örneğin:

a. İki eşyapı fonksiyonunun bileşkesi bir eşyapı fonksiyonudur.

b. Özdeşlik fonksiyonu $\mathrm{Id}_X$, $X$'ten $X$'e giden bir eşyapı fonksiyonudur.

c. Eğer $f$ bir eşyapı eşlemesiyse (yani birebir ve örtense), o zaman $f^{-1}$ de bir eşyapı fonksiyonudur.

Bunların kolay kanıtını okura bırakıyoruz.

Eğer $X$ bir tamsıralamaysa, $X$'ten $Y$'ye giden bir <-eşyapı fonksiyonu birebir olmak zorundadır. Nitekim $f(x_1) = f(x_2)$ olsun. Eğer $x_1 < x_2$ ise $f(x_1) < f(x_2)$ olur ve bu bir çelişkidir. Eğer $x_2 < x_1$ ise benzer şekilde bir çelişki elde edilir. Demek ki $x_1 = x_2$ .

Ayrıca birebir bir <-eşyapı fonksiyonu bir ≤-eşyapı fonksiyonu olmak zorundadır. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz. Demek ki bu durumda iki kavram arasında bir ayrım yok. Dolayısıyla $X$ bir tamsıralama olduğunda iki kavram örtüşür.

Eşyapı eşlemeleri bir sıralamayı aynen kendisine benzeyen bir sıralamaya götürler, yani eğer $f : X \to Y$ bir eşyapı eşlemesiyse, $X$'in sıralamasıyla $Y$'nin sıralaması, elemanlarının adları dışında aynıdır. Bu iki sıralamanın elemanlarının adlarını silersek arada bir fark göremeyiz. Aralarında eşyapı eşlemesi olan sıralamalara ***eşyapısal sıralamalar*** diyeceğiz. Örneğin,

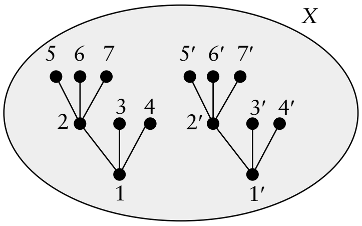
a) Eğer $X$'in bir en küçük elemanı varsa ve bu eleman $a$ ise, $Y$'nin de en küçük elemanı vardır ve bu eleman $f(a)$'dır.

b) Eğer $x$'in bir sonraki elemanı varsa o zaman $f(x^+) = f(x)^+$ eşitliği sağlanır.

c) Her $x \in X$ için $f(x, \infty) = (f(x), \infty)$ eşitliği sağlanır.

d) Eğer $A \subseteq X$ ise ve sup $A$ varsa, sup $f(A)$ da vardır ve $f(\sup A)$'ya eşittir.

Eğer $X = Y$ ise eşyapı eşlemesi yerine ***özyapı eşlemesi*** denir. Basit bir örnek olarak aşağıdaki sıralamanın özyapı eşleşmelerini bulalım.




1 ve 1′ elemanlarını sabit tutarak ama 5, 6 ve 7 elemanlarını, 3 ve 4 elemanlarını, 5′, 6′ ve 7′ elemanlarını, 3′, 4′ elemanlarını kendi aralarında dilediğimiz gibi değiştirerek $3! \times 2! \times 3! \times 2! = 144$ tane eşyapı eşleşmesi elde ederiz. Ayrıca sağdaki ve soldaki parçaları tahmin edilebileceği biçimde ($n$'yi $n'$ elemanına ve $n'$ elemanını $n$'ye yollayarak, bu eşleşmeye $\tau$ diyelim) değiş tokuş edebiliriz. Böylece toplam $144 \times 2 = 288$ tane eşyapı eşleşmesi elde ederiz. Başka da eşyapı eşleşmesi yoktur. Bunu kanıtlayalım. $\varphi$, böyle bir eşyapı eşleşmesi olsun. O zaman $\varphi$, $X$'in minimum elemanlarını yani 1 ve 1′ elemanlarını gene $X$'in minimum elemanlarına gönderir. Eğer $\varphi(1) = 1'$ ise, $\varphi \circ \tau$ de bir eşyapı eşleşmesidir ama bu kez bu yeni eşleşme 1 ve 1′ elemanlarını sabitler. Gerekirse $\varphi$ yerine $\varphi \circ \tau$ eşleşmesini alarak $\varphi$'nin 1 ve 1′ elemanlarını sabitlediğini varsayabiliriz. Bu koşulları sağlayan bir $\varphi$'nin yukardaki 144 eşleşmeden biri olacağı malum.

Eğer $(X, <)$ ve $(Y, <)$ sıralamaları arasında bir eşyapı eşlemesi varsa, o zaman $(X, <) \approx (Y, <)$ ya da (eğer sıralamalar biliniyorsa ya da çok barizse) kısaca $X \approx Y$ yazılır.

Şimdi birkaç sıralamanın eşyapı eşleşmelerini bulalım.

**Teorem.** $(\mathbb{N}, <)$ *sıralamasının bir tek özyapı eşleşmesi vardır*: $\mathrm{Id}_\mathbb{N}$ *özdeşlik fonksiyonu.*

**Kanıt.** $f$ bir eşyapı eşleşmesi olsun. $f$, en küçük eleman olan 0'ı gene 0'a göndermelidir. Tümevarımla $f$'nin $n$'yi $n$'ye gittiğini varsayarasak,
$$f(n^+) = f(n)^+ = n^+$$
ve böylece $f$'nin her elemanı sabitlediği kanıtlanır. Yani $f = \mathrm{Id}_\mathbb{N}$'dir. □

**Teorem 2.** $(\mathbb{Z}, <)$ *sıralamasının özyapı eşleşmeleri belli bir* $n \in \mathbb{Z}$ *için* $f_n(x) = x + n$ *eşitliğini sağlayan* $f_n$ *fonksiyonlarıdır.*

**Kanıt:** Her $f_n$ fonksiyonunun artan bir eşleşme (yani özyapı eşleşmesi) olduğu belli. Şimdi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ artan bir eşleşme olsun. $f(0) = n$ olsun. $x$ üzerine tümevarımla, her $x \in \mathbb{N}$ için $f(x) = x + n$ eşitliği şöyle kanıtlanır: $f(x + 1) = f(x^+) = f(x)^+ = (x + n)^+ = (x + n) + 1 = (x + 1) + n$. Benzer şekilde ($x^+$ yerine $x^-$ kullanarak) her $x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ için $f(x) = x + n$ eşitliği kolaylıkla kanıtlanır. □

$(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasının özyapı eşleşmelerini belirlemek pek kolay değildir. (Anlayana: Olabilecek en yüksek sayıda, yani 2` tane vardır.)

**Teorem 3.** $(\wp(E), \subset)$ *sıralamasının özyapı eşleşmeleri* $E$*'nin belli bir* $f$ *eşleşmesi için*, *her* $A \subseteq E$ *için*
$$\varphi(A) = \{f(a) : a \in A\}$$
*kuralıyla tanımlanmış bir* $\varphi$ *fonksiyonu tarafından verilir.*

**Kanıt:** MD-2003-II, sayfa 24-25'te (ayrıca bkz. MD-2003-III, sayfa 72) kanıtladığımız bu teoremi okur alıştırma olarak kanıtlayabilir. □

**Teorem 4.** $P$, $\mathbb{N}$'nin asal sayıları kümesi olsun. $(\mathbb{N}, |)$ *sıralamasının özyapı eşleşmeleri* $P$*'nin belli bir* $f$ *eşleşmesi için*
$$\varphi(n) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } n = 0 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } n = 1 \text{ ise} \\ f(p_1)^{k_1} \ldots f(p_r)^{k_r} & \text{eğer } n = p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r} \text{ ise } (p_i \text{ asal}) \end{cases}$$
*fonksiyonu tarafından verilir.*

**Kanıt:** Yukardaki teoremin kanıtı gibidir ve okura bırakılmıştır. □

Uzun bir yazı da olsa umarız okur bu yazıda sözü edilen kavramları kavramıştır. ♣