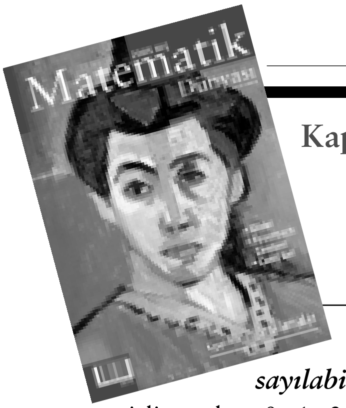


Kapak Konusu: Sıralamalar

Kesirli Sayıları Saymak

Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ *sayılabilir sonsuzlukta*dır, yani kesirli sayıları 0, 1, 2, 3, 4, ... diye doğal sayıları kullanarak koyun sayar gibi hiçbirini atlamadan teker teker sayabiliriz. Yani her kesirli sayıyı doğal sayılarla numaralandırabiliriz.

Bunun anlamını biraz açalım. Matematiksel olarak bu dediğimiz, 'doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ile kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ arasında birebir ve örten bir fonksiyon, yani bir eşleme vardır' demektir. Bu yazıda böyle bir eşlemenin varlığını kanıtlayacağız.

Önce negatif olmayan kesirli sayıları doğal sayılarla (koyun sayar gibi teker teker ve hiçbirini unutmadan) sayalım. Okur kanıtı okumadan önce aşağıdaki şemaya bakıp negatif olmayan kesirli sayıların doğal sayılarla nasıl sayılabileceğini tahmin etmeye çalışmalıdır.

Negatif olmayan bir q kesirli sayısı sadeleşmeyen a, b doğal sayıları için a/b biçiminde yazılabilir ve böyle bir yazılım ancak tek bir biçimde yapılabilir. Burada $b \neq 0$ olmak zorunda elbet. Örneğin $q = 21/49$ kesirli sayısı 3/7 olarak yazılır ($a = 3$, $b = 7$.) Şimdi $f(q)$ sayısını $a + b$ olarak tanımlayalım:

$$f(q) = a + b.$$

$f(q)$, 0'dan büyük bir doğal sayıdır. Örneğin,

$$f(21/49) = f(3/7) = 3 + 7 = 10,$$
$$f(6/5) = 6 + 5 = 11,$$
$$f(1) = f(1/1) = 1 + 1 = 2,$$
$$f(0) = f(0/1) = 0 + 1 = 2.$$

Eğer $n > 0$ doğal sayısı verilmişse, $f(q) = n$ eşitliğini sağlayan kesirli sayılar,

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \ldots, \frac{n-2}{2}, \frac{n-1}{1}$$

sayıları arasındadır, dolayısıyla en fazla n tanedir. Örneğin, $f(q) = 9$ eşitliğini, $q = 1/8, 2/7, 4/5, 5/4, 7/2$ ve $8/1$ olmak üzere tam 6 kesirli sayı sağlar.

Kesirli sayıları önce bu f değerlerine göre sıralayalım, sonra aynı f değerleri olanları paydaki a'lara göre sıralayalım. Negatif olmayan kesirli sayıların bu yöntemle sıralaması şöyle başlıyor:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{5}{1}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \ldots$$

Şimdi negatif olmayan kesirli sayıları bu sıralamaya göre numaralandıralım.

0 numara 0/1, yani 0,
1 numara 1/1, yani 1,
2 numara 1/2,
3 numara 2/1, yani 2,
4 numara 1/3,
...

Görüldüğü gibi, negatif olmayan her kesirli sayıyı bir doğal sayıyla numaralandırdık. Bu numaralandırmanın resmini de sayfanın en altında yaptık.

Negatif kesirli sayıları da benzer yöntemle sıralayabiliriz:

$$\frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{3}, \frac{-3}{1}, \frac{-1}{4}, \frac{-2}{3}, \frac{-3}{2}, \frac{-4}{1}, \frac{-1}{5}, \frac{-5}{1}, \ldots$$

Negatif kesirli sayıların numaralanması da şöyle olur:

0 numara –1/1, yani –1,
1 numara –1/2,
2 numara –2/1, yani –2,
3 numara –1/3,
4 numara –3/1, yani –3,
...

Şimdi bu iki numaralandırmayı tek bir numaralandırma haline getirebiliriz. Bunun için negatif olmayan kesirli sayıların numaralarını 2'yle çarpalım, negatif olan kesirli sayıların numaralarını ise 2'yle çarpıp 1 ekleyelim. Böylece negatif olmayanlar çift doğal sayılarla, negatif kesirli sayıları da tek doğal sayılarla numaralandırırız. Şu numaralandır-

$a + b$	$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$	$\mathbb{N}$
1	$\frac{0}{1}$	0
2	$\frac{1}{1}$	1
3	$\frac{1}{2}, \frac{2}{1}$	2, 3
4	$\frac{1}{3}, \frac{3}{1}$	4, 5
5	$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}$	6, 7, 8, 9
6	$\frac{1}{5}, \frac{5}{1}$	10, 11
7	$\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1}$	12, 13, 14, 15, 16, 17
8	$\frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{7}{1}$	18, 19, 20, 21
9	$\frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{7}{2}, \frac{8}{1}$	22, 23, 24, 25, 26, 27
10	$\frac{1}{9}, \frac{3}{7}, \frac{7}{3}, \frac{9}{1}$	28, 29, 30, 31
11	$\frac{1}{10}, \frac{2}{9}, \frac{3}{8}, \ldots$	32, 33, 34 ...

mayı elde ederiz:

0 numara 0,	1 numara –1,
2 numara 1,	3 numara –1,
4 numara 1/2,	5 numara –2,
6 numara 2,	7 numara –1/3
8 numara 1/3,	9 numara –3,
...	...

Bu iki numaralandırmayı kararsak,

0 numara 0,
1 numara –1,
2 numara 1,
3 numara –1/2,
4 numara 1/2,
5 numara –2,
6 numara 2
7 numara –1/3
8 numara 1/3,
...

kesirli sayıları doğal sayılarla numaralandırılmış oluruz. Demek ki kesirli sayılar sayılabilir sonsuzluktaymış.

Yukardaki örnekte görüldüğü gibi, kesirli sayıları doğal sayılarla numaralandırmak için sadece pozitif kesirli sayıları doğal sayılarla numaralandırmak yeterlidir.

Farey'in Yöntemi. Çok tuhaf gelebilecek bir başka eşleştirme daha vardır. İlkokulda sık sık yapılan

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

işlem hatasını kullanır bu yöntem. 0/1 ve 1/0 'sayı'larından başlayalım (son 'sayı'yı umursamayın şimdilik):

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{0}$$

Bu iki 'sayı'nın tam ortasına, 'toplam'ları olan

$$\frac{0}{1}+\frac{1}{0}=\frac{1}{1}$$

sayısını yazalım:

$$\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{0}$$

Yanyana olan iki sayının arasına 'toplam'larını, yani,

$$\frac{0}{1}+\frac{1}{1}=\frac{1}{2} \text{ ve } \frac{1}{1}+\frac{1}{0}=\frac{2}{1}$$

sayılarını yazalım:

$$\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{0}$$

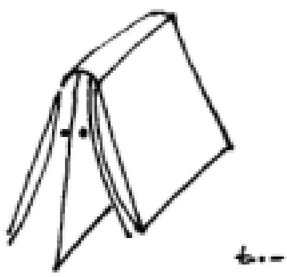
"Toplama"ya devam edelim:

$$\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{1}{0}$$

Bunu böylece sürdürelim. Bir sonraki aşamada 0/1, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 1/1, 4/3, 3/2, 5/3, 2/1, 5/2, 3/1, 4/1, 1/0 sayıları belirir.

Böyle devam ederek her kesirli sayıyı yalnız bir kez ve sadeleşmiş biçimde yazarız... Bunun bildiğim kanıtı uzun ama oldukça kolaydır. Bu yüzden kanıtını vermeyeceğim burada.

Şimdi kesirli sayıları Farey'in yukardaki açıkladığım yöntemle, beliriş sırasına göre sayın. Yalnız 1/0'ı atlamayı unutmayın, öyle bir sayı yoktur! ♣



Kesirli Sayıları Bir Başka Sayma Yöntemi

Pozitif kesirli sayıları numaralandırmayı şöyle de yapabiliriz. Sol taraftaki tabloda tüm pozitif kesirli sayılar var. Sadeleşmiş halleriyle yazılmışlar. Birinci sıraya paydasında 1 olanlar, ikinci sıraya paydasında 2 olanlar ve *n*-inci sıraya paydasında *n* olanlar yazılmış... Böylece hem sağa doğru sonsuz giden hem de aşağıya doğru sonsuz inen bir tablo elde ederiz. Aynı tabloyu pozitif kesirli sayılar yerine, 1, 2, 3, 4, gibi pozitif doğal sayılarla da doldurabiliriz. Soldaki tabloda bunun bir yöntemi veriliyor: Doğal sayıları sağdan sola giden ve yukardan aşağıya inen çaprazları izleyerek yerlerine koyabiliriz. Bir kesirli doğal sayı, bulunduğu yerdeki doğal sayıyla numaralansın. Örneğin, 7/4'ün numarası 25 olsun, 20 doğal sayısı 2/5 kesirli sayısını numaralandırsın.

Q

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	7/1	...
1/2	3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	13/2	...
1/3	2/3	4/3	5/3	7/3	8/3	10/3	...
1/4	3/4	5/4	7/4	9/4	11/4	13/4	...
1/5	2/5	3/5	4/5	6/5	7/5	8/5	...
1/6	5/6	7/6	11/6	13/6	17/6	19/6	...
1/7	...	...	...	...	...	...	

N

1	2	4	7	11	16	22	...
3	5	8	12	17	23	...	
6	9	13	18	24	...		
10	14	19	25	...			
15	20	26	...				
21	27	...					
28	...						

şekille oynadım x