



Doğuş Üniversitesi Matematik Kulübü

Fen Liseleri Yarışması 2005

Soru ve Yanıtlar

1. 2005^{2006} sayısının 11'e bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm: $2005 \equiv 3 \pmod{11}$ olduğundan $2005^{2006} \equiv 3^{2006} \equiv (3^5)^{401} \Delta 3 \equiv 3 \pmod{11}$.

2. $(x^2 - 1)P(x^2 - 1) - 4(x^2 - 2)P(x) = 0$ bağımsız sağlayan bir $P(x)$ polinomu için $P(2) = 6$ ise bu polinomun sabit terimi kaçtır?

Çözüm: Verilen bağıntıyı $x = 1$ için uygularsak, $2P(2) - 4P(1) = 0$ elde ederiz. $P(2) = 6$ olduğundan, bundan $P(1) = 4$

çıkar. Verilen bağıntıyı bu kez $x = 0$ değerine uygulayalım: $P(1) - 4P(0) = 0$ buluruz. $P(1) = 4$ olduğundan, sabit terim $P(0) = 2$ bulunur.

3. k ve n pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$n^3 - 2n^2 = (2k - 1)^2$$

eşitliğini sağlayan en küçük k değeri nedir?

Çözüm: $n^2(n - 2) = (2k - 1)^2$ olarak yazıldığından, $n - 2$ sayısının bir tam kare olması gerekir. $(2k - 1)^2$ tek olduğundan bunu sağlayan en küçük n sayısı da 7 olur. Buradan da $k = 10$ bulunur.

$$4. \begin{cases} x + 4\sqrt{yz} = 42 \\ y + 4\sqrt{xz} = 6 \\ z + 4\sqrt{xy} = 430 \end{cases} \text{ denklem sisteminin bütün}$$

gerçek (x, y, z) çözümlerini bulunuz.

Çözüm: Denklemlerden $x > 0, y > 0, z > 0$ olması gerektiği görülüyor. Pozitif a, b ve c için,

$$x = a^2, y = b^2, z = c^2$$

olsun. O zaman sistem,

$$a^2 + 4bc = 42$$

$$b^2 + 4ac = 6$$

$$c^2 + 4ab = 430$$

olarak yazılır. İkinci denklemi 41 ile çarpıp ilk denkleme eklersek

$$(a + b)(a + 2b + c) = 36$$

elde ederiz. Üçüncü denklemi 41 ile çarpıp ikinciye eklersek,

$$36 = (b + c)(a + 2b + c)$$

elde ederiz. Demek ki

$$(a + b)(a + 2b + c) = 36 = (b + c)(a + 2b + c).$$

Sadeleştirerek,

$$a + b = b + c,$$

yani $b = (a + c)/2$ buluruz. Şimdi,

$$6 = b^2 + 4ac = (a + c)^2/4 + 4ac = (a + c)^2/4$$

eşitliğinden $a + c = 2\sqrt{6}$ bulunur. Ayrıca,

$$36 = (b + c)(a + b + c) = 3(a + c)(a + c)/4$$

eşitliğinden $(a + c)(a + c) = 48$ bulunur. Yukarıda bulunan $a + c = 2\sqrt{6}$ ile birlikte $a + c = 2\sqrt{6}$

bulunur. a ve c negatif olamayacaklarından,

$$a + c = 2\sqrt{6}$$

ve

$$a + c = 4\sqrt{6}.$$

Bu ikisinden $a = 3\sqrt{6}, c = \sqrt{6}, b = 2\sqrt{6}$ bulunur.

Ardından, $x = 54, y = 24$ ve $z = 6$ bulunur.

$$5. \sqrt{x + 2\sqrt{2x + 41}} + 2\sqrt{x + 4\sqrt{2x + 41}} = 2$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Verilen ifadenin karesini alalım,

$$x + 2\sqrt{2x + 41} + 2x + 4\sqrt{2x + 41} + 4 = 4,$$

yani $x + 2\sqrt{2x + 41} = 2$. Buradan da $x = 3/2$ bulunur.

6. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, ... dizisinin ilk kaç terimini toplarsak 396 elde ederiz?

Çözüm: Bu dizinin ilk terimlerinin toplamı, $1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$ biçiminde olacaktır. $n = 10$ için 385 elde edilir. Böylece $K = 11$ bulunur ve terim sayısı

$$10(10 + 1)/2 + 1 = 56$$

bulunur.

7. $x^3 + 4y^3 = z$ denklemini sağlayan (x, y, z) asal sayı üçlüleri nelerdir?

Çözüm: Denklemi çarpanlarına ayırırsak,

$$z = x^3 + 4y^3 = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 2y^2)$$

olmalıdır. z asal olduğundan $x + 2y = 1$ yani $x = y - 2$ olmalıdır. Ardışık asal sayılar yalnızca 3 ve 2 olduğu için, $x = 3, y = 2$ buradan da $z = 19$ bulunur.

8. Bir kitabın sayfalarını numaralamak için toplam 2004 rakam kullanılmıştır. Bu kitabın sayfa sayısı kaçtır?

$$\underbrace{1, 2, 3, \dots, 9}_{9 \text{ tane}}, \underbrace{10, 11, \dots, 99}_{90 \text{ tane}}, \underbrace{100, 101, \dots, 10k}_{k \text{ tane}}$$

Çözüm: Sayfa sayıları biçiminde olduğundan,

$$9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 90 + 2 \cdot 3(k - 4 \cdot 99) = 2004$$

olmalıdır. Buradan da $k = 704$ bulunur.

9. 1080'den küçük ve 1080 ile aralarında asal olan kaç pozitif tamsayı vardır?

Çözüm: $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$, 2 ile bölünen sayıların kümesini A, 3 ile bölünenleri B ve 5 ile bölünenleri C ile gösterelim. Şimdi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} |A \cap B \cap C| &= |A| \cdot |B| \cdot |C| = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \\ |A \cap B| &= 4 \cdot 4 = 16 \\ |A \cap C| &= 4 \cdot 2 = 8 \\ |B \cap C| &= 4 \cdot 2 = 8 \\ |A| &= 1080/2 = 540 \\ |B| &= 1080/3 = 360 \\ |C| &= 1080/5 = 216 \end{aligned}$$

Demek ki yanıt $1080 - 64 - 16 - 8 - 8 = 992$ 'dir.

10. $3x^2 + 2x + 4 = 0$ polinomunun bir kökü ise $4/x^2 + 2 + 9x^2$ kaçtır?

Çözüm: $x = 2/4$ $3x^2$ olduğundan $1 = 2/x + 4 + 3x$. Her iki tarafın karesi alındığında

$$1 = 4/x^2 + 2 + 9x^2 + 12$$

buradan da $4/x^2 + 2 + 9x^2 = 13$ bulunur.

11. $13! + 2 \cdot 1 \cdot \{ p \in \Omega \mid 13! \cdot 2 \cdot 13 \text{ koşulu sağlayan kaç } p \text{ asal sayısı vardır?}$

Çözüm: p sayısı, $2 \cdot 13! + 2 \cdot 13$ sayısının bir çarpanıdır. $13! + 2 \cdot 13$ olduğundan p sayısı her zaman k 'ya bölünür, yani p asal olamaz.

12. 216.000 sayısının pozitif bölenlerinin kaç 8'e bölünür fakat 9'a bölünmez?

Çözüm: $216.000 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ sayısının bölenleri $2^n \cdot 3^k \cdot 5^m$ biçimindedir. 8'e bölünen fakat 9'a bölünmeyen bölenler $\{2^n \cdot 3^k \cdot 5^m : 3 \leq n \leq 6, 0 \leq k \leq 1, 0 \leq m \leq 3, n, m, k \in \mathbb{L}\}$ kümesi içindedir. Bu kümenin eleman sayısı da $4 \cdot 2 \cdot 4 = 32$ dir.

13. abc üç basamaklı sayısının a, b ve c rakamlarının $49a + 27b + 2c = 286$ eşitliğini sağladığı bilindiğine göre, abc sayısı kaçtır?

Çözüm: $49a + 27b + 2c = 286$ özelliğinden 286 sayısının 7'ye bölümünde kalanın c olduğu anlaşılır

ve $c = 6$ bulunur. Buna göre $7a + 2b = 40$ eşitliğinden $a = 5$ ve $b = 5$ bulunur. Demek ki aranan sayı 556 dir.

14. (44, 11) ve (16, 41) noktalarından geçen doğrunun koordinatları pozitif tamsayılar olan bütün noktalarını bulunuz.

Çözüm: (44, 11) ve (16, 41) noktalarından geçen doğrunun denklemini $5y + 23x = 43$ olarak bulunur. Bu denklemi $5(y + 8) + 23(x + 1) = 0$ yazalım. Buradan $k \in \mathbb{L}$ için $y = 8 + 43k$ ve $x = 1 + 23k$ olur. $k \in \mathbb{Z}$ olduğuna göre $k = 0$ için (1, 8), $k = 1$ için (6, 5)

ve

$$k = 2 \text{ için } (11, 2)$$

pozitif tamsayı ikilileri bulunur.

15. a ve b doğal sayıların ortak bölenlerinin en büyüğü (a, b) = 9 ve ortak katlarının en küçüğü $[a, b] = 270$ olduğuna göre, bu iki sayının toplamının olabilecek en küçük değeri nedir?

Çözüm: $ab = (a, b)[a, b] = 9 \cdot 270 = 2 \cdot 3^5 \cdot 5$ eşitliğinden birbirine en yakın a ve b bölenleri $9 \cdot 5 = 45$ ve $9 \cdot 6 = 54$ olarak bulunur. Demek ki istenen toplam $45 + 54 = 99$ olacaktır.

16. 7 ve 9 tabanına göre yazılışları

$$(abc)_7 = (cba)_9$$

eşitliğini sağlayan $(abc)_7$ sayısı nedir?

Çözüm: Verilen eşitlikten

$$a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c = c \cdot 9^2 + b \cdot 9 + a$$

çıkılır. Buradan da $b = 8(3a + 5c)$ bulunur. Aranan sayı 7 tabanına göre olduğundan, $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. O halde $b = 0$ ve $3a = 5c$ olmalıdır. Sonuç olarak $c = 3, a = 5$ ve istenilen sayı da $(503)_7$ bulunur.

17. a, b ve c birbirinden farklı gerçel sayılardır.

$$2a + 2b = 3c$$

ve

$$2a^3 + 2b^3 = 3c^3$$

olduğuna göre, $a + b + c$ kaçtır?

Çözüm: Verilen eşitlikler,

$$2(a + b + c) = c + 4b \text{ ve } 2(a^3 + b^3 + c^3) = c^3 + 4b^3$$

şeklinde yazılabilir. İkinci denklemi çarpanlarına ayırarak,

$$2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) = (c + 4b)(c^2 + bc + b^2)$$

yazıp ilk denklemi kullandığımız da, $(a + b + c)$ olduğu

için) $a^2 + 2ac + c^2 = c^2 + 2bc + b^2$ buluruz. Buradan da

$$a^2 + 4b^2 = bc - ac,$$

yani

$$(a + 4b)(a + 2b) = c(b + 4a)$$

bulunur. $a \neq b$ olduğu için $a + 2b + c = 0$ bulunur.

18. (abc) üç basamaklı bir doğal sayı olmak üzere $(abc) = 11(a^2 + 2c^2)$ eşitliğini sağlayan (abc) sayılarını bulun.

Çözüm: $a + 4b + 2c \equiv 0 \pmod{11}$ olmalı, o halde ya $a + 2c = b$ ya da $a + 2c = b + 11$ olmalıdır. İlk durumda

$100a + 210(a + 2c) + 2c = (abc) = 11(a^2 + 2c^2)$ eşitliğinden $c^2 + 4c = 10a - a^2$ çıkar, dolayısıyla bu durumda a çift olmalı. İkinci durumda ise

$100a + 210(a + 2c + 11) + 2c = (abc) = 11(a^2 + 2c^2)$ eşitliğinden,

$$c^2 + 4c = 10a + 4a^2 + 440$$

çıkart ve gene a çift olur. Ama a çift rakamlar üzerinde değiştiğinde $10a + 4a^2$ sayılarının kümesi $\{16, 24\}$, $10a + 4a^2 + 440$ sayılarının kümesi $\{6, 14\}$ olur. Bunlardan yalnızca 6 ardışık iki sayının çarpımı olduğundan $c^2 + 4c = c(c + 4)$ teriminin alabileceği tek değer 6'dır. Yani tek çözüm,

$$6 = c(c + 4) = c^2 + 4c = 10a + 4a^2 + 440$$

eşitliğinden $c = 3$, $a = 8$, $b = a + 2c + 11 = 0$ olarak bulunur. Demek ki istenenlere uyan tek sayı 803'tür.

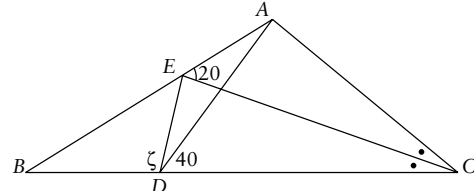
19. $x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 4$ polinomunun kaç gerçel kökü vardır?

Çözüm: Polinom, $(x + 2)(x^2 + 4)(x^2 + 2)$ şeklinde yazılacağından 3 gerçel kökü vardır.

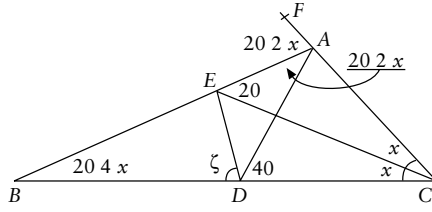
20. Bir pozitif n tamsayısı için n^2 sayısının onlar basamağı 7 ise birler basamağı kaçtır?

Çözüm: n tamsayısının son iki basamağı ab olsun. O halde a, b, c rakamlar olmak üzere $\dots 270 + 2c = n^2 = (\dots ab)^2 = \dots 2100a^2 + 20ab + 2b^2$ olacaktır. Onlar basamağındaki 7 sayısı tek olduğu için $20ab$ çift sayısına b^2 sayısının onlar basamağından gelen bir tek sayı eklenmelidir. Bu özelliği sağlayan b sayısı 4 ya da 6 olacaktır, böylece her iki durum için de birler basamağı $c = 6$ olur.

21. ABC üçgeninde CE açıortay, $m(\angle ADC) = 40^\circ$, $m(\angle CEA) = 20^\circ$. (Bkz. bir sonraki sütündeki şekil.) Bu verilere göre $m(\angle EDB)$ kaçtır?



Çözüm: F noktası aşağıdaki şekildeki gibi seçilsin. ABC üçgeninde CE açıortay ve $m(\angle ECA) =$



$m(\angle BCE) = x$ dersek,

$$m(\angle EAF) = 20 + 2x,$$

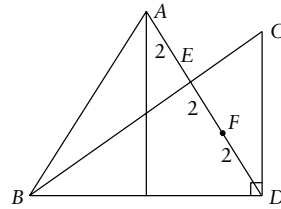
$$m(\angle ECB) = 20 + 4x$$

ve

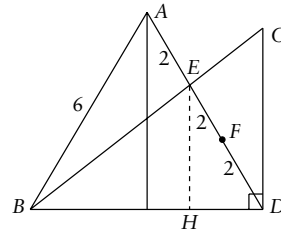
$$m(\angle BAD) = 40 + (20 + 4x) = 20 + 2x$$

olur. Sonuç olarak AB, ADC üçgeninin dışaçıortayı, CE ise iç açıortayıdır. Bunlar E noktasında kesiştiklerinden ED, ADC 'nin dış açıortayı olur. Buna göre $\zeta = (180 - 40) / 2 = 70$ bulunur.

22. ABD eşkenar üçgen, $m(\angle BDC) = 90^\circ$, $|AE| = |EF| = |FD| = 2$ cm ise $ABDC$ dörtgeninin alanı kaç cm^2 dir?



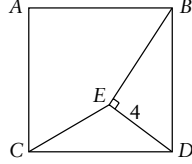
Çözüm: E 'den BD 'ye inilen dikme ayağı H olsun. $m(\angle EDB) = 60^\circ$ olduğundan $|HD| = |ED| / 2 = 2$, $|BH| = |BD| - |HD| = 6 - 2 = 4$, $|EH| = 2\sqrt{3}$ olur.



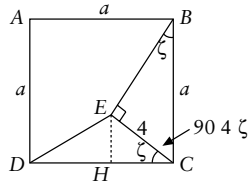
Şimdi, $|CD| / |EH| = |BD| / |BH| = 6 / 4 = 3 / 2$ oranından $|CD| = 3 / 2 \cdot |EH| = 3 / 2 \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ çıkar. Ama ayrıca $h_A = 3\sqrt{3}$. Demek ki $AC \parallel BD$. $|AC| =$

3 olacağından, $A(ABDC) = (6 \cdot 2 \cdot 3)3\sqrt{3}/2 = 27\sqrt{3}/2$ bulunur.

23. $ABDC$ kare, BE , EC ve $EC = 4$ cm ise DCE üçgeninin alanı kaçtır?



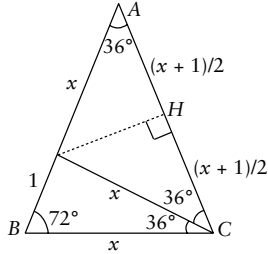
Çözüm: E' den DC' ye dik inelim. Dikme ayağı H ise EHC üçgeni ve CEB üçgeni benzerdir. Do-



layısıyla $b = |EH|$ ise, $b/4 = 4/a$ olur ve buradan $ab = 16$ ve $A(DCE) = 8 \text{ cm}^2$ bulunur.

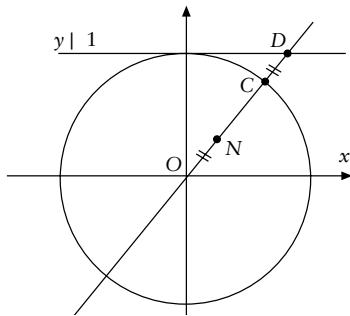
24. $\cos 36^\circ = ?$

Çözüm: Tepe açısı 36 ve tabanı x olan bir ABC ikizkenar üçgeni düşünersek açıortay bağıntısın-



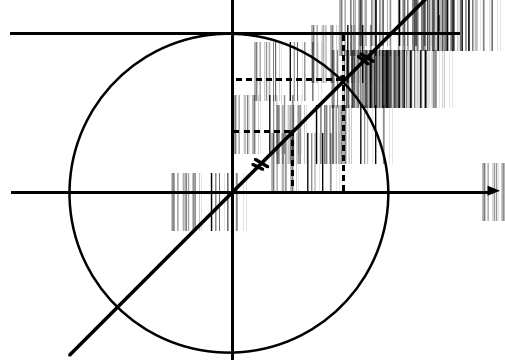
dan $1/x = x/(x \cdot 2 \cdot 1)$ ve dolayısıyla $x^2 - 4x + 4 = 0$ çıkar. Böylece $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$ ve $\cos 36^\circ = (x \cdot 2 \cdot 1)/2x = x/2 = (1 \pm \sqrt{5})/4$ bulunur.

25. $x^2 + y^2 = 1$ çemberi, merkezden geçen bir doğruyu D noktasında kessin bu doğru üzerinde ve



$|ON| = |CD|$ olacak biçimde alınan N noktalarının geometrik yerinin denklemi nedir?

Çözüm: $N(u, v)$ olsun ve C 'nin koordinatlarına (x, y) diyelim. Aşağıdaki resimden takip edin.



Yok

Koşuldan dolayı $u^2 + y = 1$. Ayrıca benzer üçgen ilişkisinden $u/x = v/y$. Demek ki

$$x = yu/v = u(1 - y)/v.$$

Ayrıca $x^2 + y^2 = 1$. Bu ikisinden

$$u^2(1 - y)^2/v^2 + y^2 = 1$$

ve

$$1/(1 - y)^2 = u^2/v^2 + 1$$

çıkar.

Yedek Sorular

1. a, b, c pozitif tamsayıları artan bir geometrik dizi oluştursun. $b^4 + a$ bir tamkare ve

$$\log_6 a + 2 \log_6 b + 2 \log_6 c = 6$$

ise $a + 2b + 2c$ kaçtır?

Çözüm: $\log_6 a + 2 \log_6 b + 2 \log_6 c = \log_6 (abc) = 6$ buradan da $abc = 6^6$ olur. $b^2 = ac$ olduğu için, bundan $b^3 = abc = 6^6$ ve $b = 6^2 = 36$ bulunur. $b^4 + a$ sayısının bir tamkare olması için, a sayısı 35, 32, 27, 20, 11 sayılarından biri olmalıdır.

$$ac = abcb = 6^6/6^2 = 6^4 = 24 \cdot 34$$

olduğundan yukarıdaki sayılar içerisinde sadece $a = 27$ bulunur ve $c = 48$ çıkar. Sonuçta $a + 2b + 2c = 111$ olur.

2. 72 tane pozitif tamsayı bölünen en küçük pozitif tamsayı kaçtır?

Çözüm: En küçük tamsayıyı bulmak için 2, 3, 5, 7, ... gibi en küçük asallarla oluşturulan

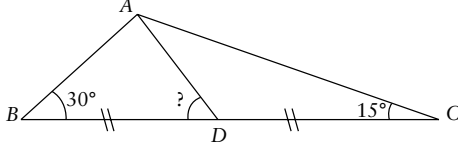
$$2^m 3^n 5^k 7^l \dots$$

sayılarını incelemeliyiz.

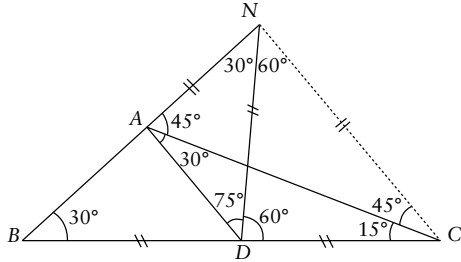
$$72 = (n + 2 - 1)(m + 2 - 1)(k + 2 - 1)(l + 2 - 1)$$

koşulu göz önüne alınarak en küçük sayı $2^5 3^2 5^7$ olarak bulunur.

3. ABC üçgen, $D \in BC$, $m(\angle ABC) = 30^\circ$, $m(\angle ACB) = 15^\circ$, $|BD| = |DC|$. Bu verilere göre $\angle ADB$ açısı kaç derecedir?



Çözüm: C noktasından AB'ye inilen dikmenin ayağı N olsun. (Bir sonraki sayfadaki şekilden izleyin.) N ile D birleştirilerek NDC eşkenar üçge-

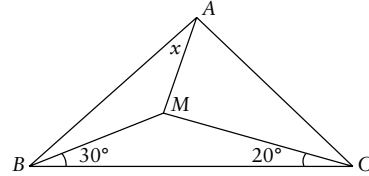


ni elde edilir (NCB , $90-60-30$ üçgeninden dolayı). $m(\angle NAC) = 180^\circ - 4 \cdot m(\angle NCA) - m(\angle ANC) = 180^\circ - 4 \cdot 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$ olacağından, NAC ve dolayısıyla NAD ikizkenar üçgen olur. O halde $m(\angle ADB) = 180^\circ - 4 \cdot (60^\circ - 2 \cdot 75^\circ) = 45^\circ$ dir.

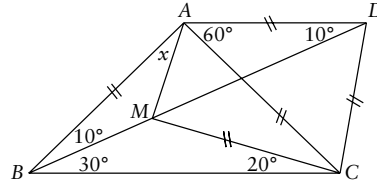
4. a bir tam sayı olmak üzere, ayrıtları 1 , a ve $2a$ birim, yüzey alanı 54 birim kare olan bir dikdörtgenler prizmasının hacmi nedir?

Çözüm: Yüzey alanı hem $2(a^2 + 2a^2 + 2a^2)$ hem de 54 'tür. Buradan da $a = 3$ bulunur. Dolayısıyla hacim, $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ birim küptür.

5. ABC üçgen, $|AB| = |AC|$, $m(\angle BAC) = 100^\circ$, $m(\angle MBC) = 30^\circ$, $m(\angle MCB) = 20^\circ$. Bu verilere göre x kaçtır?



Çözüm: BM 'nin uzantısı üzerinde $|AD| = |AB|$ olacak biçimde alınan D noktası için,



$$m(\angle ADB) = m(\angle MBA) = 10^\circ$$

ve dolayısıyla $m(\angle CAD) = 60^\circ$ bulunur. Demek ki ortaya çıkan DAC ikizkenar üçgeni eşkenardır. Buradan açı hesaplamaları ile $x = 20^\circ$ bulunur. ♦

