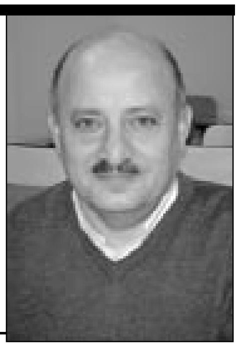
Problemler ve Çözümleri



Refail Alizade*
rafailalizade@iyte.edu.tr

Bu, bir yıl sürecek bir yarışmadır. Grup halinde, okul ya da bireysel olarak katılabilirsiniz.

Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Ayrıca lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

Her sorunun çözümünü ayrı bir kâğıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenciyseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla İzmir adresine 30.02.2005 tarihine kadar adıma gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A326. 2^n+1 sayısı n'ye bölünecek şekilde tam 2006 değişik asal böleni bulunan bir n pozitif tamsayısı var mıdır?

A327. ABC üçgeninin BC, CA ve AB kenarları üzerinde sırasıyla A_1, B_1 ve C_1 noktaları alınmıştır. $|AA_1| \le 1$, $|BB_1| \le 1$, $|CC_1| \le 1$ ise ABC üçgeninin alanının en fazla $1/\sqrt{3}$ olabileceğini kanıtlayınız.

A328. Birbiriyle kesişmeyen $2n$ tane kiriş, çemberi $4n$ tane eşit yaya bölüyor. Bu yaylardan ikisinin birbirine paralel olduğunu kanıtlayınız.

A329. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

A330. İki kişi sırayla tahtaya $100!$ sayısının 1'den ve birbirinden farklı pozitif tam bölenlerini yazıyorlar. Bir hamleden sonra tahtaya yazılmış sayılar aralarında asalsa, son sayıyı yazan kişi kaybediyor. İkisi de en iyi şekilde oynadığı taktirde kim kazanır: başlayan mı, ikinci oyuncu mu?

* İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü öğretim üyesi.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y326. Hiçbir geometrik dizinin birbirinden farklı üç teriminin, n pozitif tamsayı olmak üzere, $2^n - 1$ şeklinde olamayacağını kanıtlayınız.

Y327. ABC ikizkenar üçgeninin ($|AB| = |AC|$) $[BC]$ kenarı üzerinde $|BD| = 2|DC|$ olacak şekilde bir D noktası alınmış ve $[AD]$ doğru parçası üzerinde $m(BKD) = 2m(DKC)$ olacak şekilde bir K noktası alınmıştır. $m(BKD) = m(BAC)$ olduğunu kanıtlayınız.

Y328. 5×5 boyutlu satranç tahtasına, her at tam iki atı tehdit edecek şekilde en fazla kaç at yerleştirilebilir?

Y329. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dizisi, $a_1 = 1$ ve $n \ge 1$ için

$$a_{n+1} = a_n + 1/a_n$$

olarak verilmiştir. a_{1000}'in tam değerini, yani

$$m \le a_{1000} < m + 1$$

koşulunu sağlayan m tamsayısını bulunuz.

Y330. İlk iki terimi sırasıyla 1 ve 2 olan ve her yeni terimi, daha önce gelen terimlerden farklı olup, bir önceki terimle aralarında asal olmayan pozitif tamsayılardan en küçüğüne eşit olan sonsuz dizinin tüm pozitif tamsayıları içerdiğini kanıtlayınız.

ESKİ SORULARA ÇÖZÜMLER
2005-I-1

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A316. *Hangi n tamsayıları için n tane 4 rakamı içeren $144\ldots4$ sayısı bir tamsayının karesidir?*

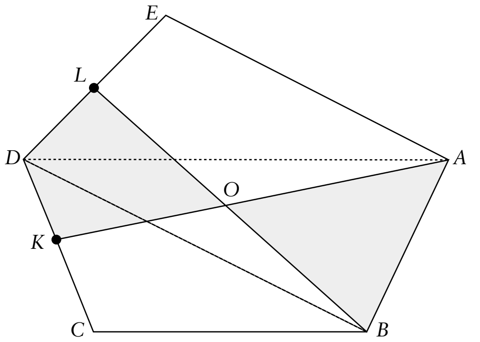
Çözüm: n tane 4 içeren $144\ldots4$ sayısını a_n ile gösterelim. $a_1 = 14$ tamkare değil. Öte yandan $a_2 = 144 = 12^2$ ve $a_3 = 1444 = 38^2$ ve bunlar birer tamkare. $n \ge 4$ ve m bir pozitif tam sayı olmak üzere $a_n = m^2$ olsun. Bu durumda m çift sayı olacağından $m = 2k$ şeklindedir. Şimdi,

$$k^2 = a_n/4 = 3611\ldots1$$

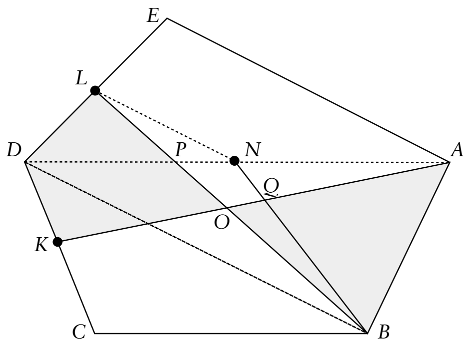
(burada $n-2$ tane 1 var) eşitliğinden, $k \equiv 3 \pmod 4)$

elde edilir. Bir tamkarenin modülo 4 değerleri sadece 0 ve 1 olabileceğinden çelişki elde edilir. Böylece sadece $n = 2$ ve $n = 3$ değerlerinde a bir tamkaredir.

A317. *Bir ABCDE beşgeninde $BC \parallel AD$ ve $BD \parallel AE$'dir. $[CD]$ ve $[DE]$ kenarlarının orta noktaları sırasıyla K ve L ise, ve BL ile AK doğrularının kesişim noktası O ise, KDLO dörtgeninin ve ABO üçgeninin alanlarının eşit olduklarını kanıtlayınız.*



Çözüm: AD ile BL'nin kesişim noktasını P ile, $[AD]$ doğru parçasının orta noktasını N ile ve BN ile AK'nın kesişim noktasını Q ile gösterelim.



$NL \parallel AE$ ve $AE \parallel BD$ olduğundan $NL \parallel BD$'dir. Dolayısıyla $A(BLN) = A(DLN)$, buradan da, $A(BPN) = A(BLN) - A(PLN) = A(DLN) - A(PLN) = A(DPL)$ elde edilir. Şimdi,

$$\begin{aligned} A(ABO) &= A(ABQ) + A(BOQ) \\ &= A(ABN) - A(AQN) + A(BPN) - A(QOPN) \\ &= A(ABN) - A(AQN) + A(DPL) - A(QOPN) \\ &= A(ABN) + A(DPL) - A(AOP) \\ &= A(ABD)/2 + A(DPL) - A(AOP). \end{aligned}$$

Öte yandan,

$$\begin{aligned} A(KDLO) &= A(OKDP) + A(DPL) \\ &= A(AKD) - A(AOP) + A(DPL) \\ &= A(ACD)/2 - A(AOP) + A(DPL) \\ &= A(ABD)/2 - A(AOP) + A(DPL) \end{aligned}$$

olduğundan kanıt tamamlanmıştır.

A318. *Herbirinin ağırlığı 21'den büyük olmayan bir tamsayıya eşit ve birbirinden farklı n tane ağırlık verilmiştir. Bu ağırlıklar ne olursa olsun, toplam ağırlıkları birbirine eşit olan iki çift ağırlık bulunmasını sağlayan en küçük n sayısı kaçtır?*

Çözüm: Ağırlıklar 1, 2, 3, 5, 8, 13 ve 21 olarak alınırsa tüm ikililerin toplam ağırlıkları birbirinden farklı olacak, dolayısıyla n'nin en küçük değeri 7'den büyüktür. Şimdi koşulu sağlayan herhangi 8 ağırlık alalım. Bu ağırlıklardan oluşturulan ikililerin sayısı,

$$\binom{8}{2} = 28$$

dir. İkililerin ağırlıklarının pozitif farklarının (büyük ağırlık − küçük ağırlık) alabileceği değerler 1, 2, 3, …, 20 olduğundan en az 8 ikilinin farkı tekrarlanmıştır. Bunlar arasında $b \neq c$ olacak şekilde $a - b = c - d$ eşitliğini sağlayan (a, b) ve (c, d) ikilileri bulunursa $a + d = b + c$ eşitliği elde edilir, yani toplam ağırlıkları aynı olan (a, d) ve (b, c) çiftleri bulunur. Eşitliklerin hepsinin $a - b = b - c$ şeklinde olduğunu varsayalım. b'nin alabileceği değerler sadece 1, 2, …, 6 olabileceğinden b'leri çakışan iki eşitlik bulunur:

$$a_1 - b = b - c_1 \text{ ve } a_2 - b = b - c_2.$$

Bu durumda $a_1 + c_1 = 2b = a_2 + c_2$'dir, yani toplam ağırlıkları aynı olan (a_1, c_1) ve (a_2, c_2) ikilileri bulunur.

A319. *a, b ve c gerçel sayıları $a < b < c$ eşitsizliklerini sağlar.*

$$1/(x - a) + 1/(x - b) + 1/(x - c) = 0$$

denkleminin $a < x_1 < b < x_2 < c$ eşitsizliklerini sağlayan iki x_1 ve x_2 kökünün olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: Paydalar eşitlenirse verilen denklemin,

$$f(x) = (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)(x - a)(x - b)$$

ve

$$g(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

olmak üzere $f(x)/g(x) = 0$ denklemine denk olduğu görülür.

$$\begin{aligned} f(a) &= (a - b)(a - c) > 0 \\ f(b) &= (b - c)(b - a) < 0 \\ f(c) &= (c - a)(c - b) > 0 \end{aligned}$$

olduğundan $a < x_1 < b < x_2 < c$ ve $f(x_1) = f(x_2) = 0$ olacak şekilde x_1 ve x_2 bulunur. $g(x_1) \neq 0$ ve $g(x_2) \neq 0$ olduğundan x_1 ve x_2 verilen denklemin de kökleridir.

A320. *Aşağıda verilen polinom,*

$$P(x) \mid ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$x \mid 41, 0, 1$ *ve* 2 *için tamsayı değerleri alıyor. Her x tamsayısı için bu polinomun tamsayı değeri aldığını kanıtlayınız.*

Çözüm: $d \mid P(0)$ ve $a + b + c + d \mid P(1)$ tamsayılardır. O halde $a + b + c$ de tamsayıdır.

$P(41) \mid 4a + b\ 4\ c + d \mid 2b\ 4\ (a + b + c) + d$ tamsayıdır, dolayısıyla $2b$ de tamsayıdır.

$P(2) \mid 8a + 4b + 2c + d \mid 6a + 2b + 2(a + b + c) + d$ tamsayıdır, dolayısıyla $6a$ da tamsayıdır. Şimdi,

$P(x) \mid a(x^3\ 4\ x) + b(x^2\ 4\ x) + (a + b + c)x + d$

$\mid 6a(x^3\ 4\ 1)/6 + 2b(x^2\ 4\ x)/2 + (a + b + c)x + d$

$= 6a(x\ 4\ 1)x(x + 1)/6 + 2b(x\ 4\ 1)x/2 + (a + b + c)x + d$

şeklinde yazılabilir. Üç ardışık tamsayının çarpımı 6'ya, iki ardışık sayının çarpımı da 2'ye bölündüğünden, her x tamsayısı için,

$$(x\ 4\ 1)x(x + 1)/6 \text{ ve } (x\ 4\ 1)x/2$$

tamsayılardır ve böylece $P(x)$ de bir tamsayıdır.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

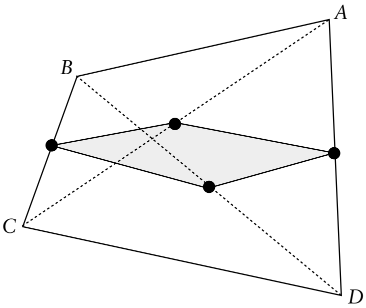
Y316. 2^n *sayısının onluk tabanda basamaklarının toplamının 5'e eşit olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.*

Çözüm: $n \mid 1, 2, *, 10$ sayıları arasında sadece $n \mid 5$ durumunda $2^5 \mid 32$ sayısının basamakları toplamı 5'tir. $n\ \}\ 10$ durumunda 2^n'nin basamakları toplamının 5 olamayacağını gösterelim. 2^n sayısının son rakamı 2, 4, 6 veya 8 olabilir. 6 veya 8 ise basamaklarının toplamı 5'ten büyük olur. Son rakam 4 ise 2^n sayısı, $k \varnothing 3$ olmak üzere, $100*04 \mid 10^k + 4$ şeklinde olmak zorunda. Bu durumda 10^k sayısı 2^3'e bölünür, fakat 4, 2^3'e bölünmez, dolayısıyla 2^n de 2^3'e bölünmez. $k\ \}\ 10$ için 2^n sayısı 2^3'e bölündüğünden bu bir çelişkidir.

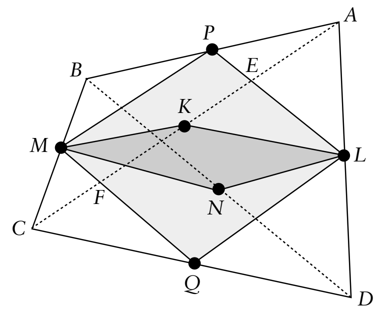
Şimdi son rakam 2 olsun. Bu durumda son iki rakam 02, 22 veya 12 olabilir. İlk iki altdurumda sayı 4'e bölünmez. Üçüncü altdurumda son üç rakam 012 veya 112 olabilir. 012 ile biten bir sayı 8'e bölünmez. 112 ile biten bir sayı $m \varnothing 3$ olmak üzere $10^m + 112$ şeklindedir. 1112 ve 10112 sayıları 2'nin kuvveti olmadıkları için $m \mid 3$ ve $m \mid 4$ koşulu sağlamaz. $m \varnothing 5$ ise 10^m sayısı 25'e bölünür, ama 112, 25'e bölünmediğinden dolayı $2^n \mid 10^m + 112$ olamaz.

Çözenler: Suat Akbulut (İzm. Ö. Yamanlar L.), Gökhan Atasever (T.dağ), Mustafa Ataklı (Safa D., G.antep), M. Süheyb Ayaz (Ö. Yamanlar L.), Oktay Balkış (Aks. Anad. Öğrt. L.), Bilgin Canpolat (H.F.Z. Anad. L., T.dağ), Ahmet Ceyhan (İst. Atat. Fen L.), Alper Çay (Uzman D., Kays.), İbrahim Çimentepe (İzm. Yamanlar L.), Jale Dinler (BÜ., Blg. Müh. Böl.), Mustafa Dönmez (Turgutlu Halil Kale Fen L.) ve Yaşar Dönmez (Turgutlu L.), Ekrem Emre (D.pınar Ü., Küt.), Hasan Hüseyin Eruslu (Man. Ö. Şehz. Mehmet L.), Ahmet Hamdi Fazlıoğlu (İzm. Ö. Yamanlar L.), Ayhan Gündüz (Osmaniye), Burak Kürşat Günhan (Man. Ö. Şehz. Mehmet L.), Anar Hüseyin (Anad. Ü. Fen Fak.), Gamze İsbir (Elazığ), Hale Nur Kazaçeşme (Man. Ö. Şehz. Mehmet L.), Anıl Koçak (Bursa Ali Osman Sönmez Fen L.), Aydın Özcan (B. Ü., Mat. B.), Burak Sağlam (İzm. Ö. Yamanlar L.), Engin Yardımcı (ODTÜ, Mat. B.), Semih Yavuz (İzm. Ö. Yamanlar L.).

Y317. *ABCD dışbükey dörtgeninin alanı S'dir. Köşeleri* [AC], [AD], [BD] *ve* [BC] *doğru parçalarının orta noktaları olan dörtgenin alanının S/2'den büyük olmadığını kanıtlayınız.*



Çözüm: [AC], [AD], [BD], [BC], ve [CD] doğru parçalarının orta noktalarını sırasıyla K, L, N, M, P ve Q ile gösterelim. Önce K ve N noktalarının ve dolayısıyla $KMNL$ dörtgeninin $PMQL$ dörtgeninin



içinde olduğunu, sonra da $A(PMQL) \mid S/2$ eşitliğini kanıtlayalım. PL ve MQ doğrularının AC köşegeniyle kesişim noktalarını sırasıyla E ve F ile gösterip K'nın E ile F arasında olduğunu kanıtlayalım. K'nın E ile F arasında değil de, örneğin A ile E arasında olduğunu varsayalım. Bu durumda $|EF| \mid |PM| \mid |AK|$

| $|AC|/2$ olduğundan, $|AC|$ | $2|AK|$ | $|AK| + |EF|$ Ω $|AE| + |EF|$ | $|AF|$ { $|AC|$ çelişkisi elde edilir. Aynı şekilde K'nın F ile C arasında da olmadığı ve dolayısıyla E ile F arasında olduğu gösterilir. Benzer şekilde N'nin de $PMQL$ dörtgeni içerisinde olduğu kanıtlanır. O halde $A(KMNL)$ Ω $A(PMQL)$'dir. Geriye sadece $A(PMQL)$ | $S/2$ eşitliğinin kanıtı kalıyor.

$A(BMP)$ | $A(BCA)/4$ ve $A(DOL)$ | $A(DCA)/4$ eşitliğinden dolayı, $A(BMP) + A(DOL)$ | $S/4$'tür. Benzer şekilde $A(ALP) + A(CMQ)$ | $S/4$'tür. Bu durumda, $A(PMQL)$ | S 4 $[A(BMP) + A(DOL) + A(ALP) + A(CMQ)]$ | S 4 $S/2$ | $S/2$ elde edilir.

Çözenler: Suat Akbulut (İzm. Ö. Yamanlar L.), M.Süheyb Ayaz (Ö. Yamanlar L.), Oktay Balkış (Aks. Anad. Öğrt. L.), Bilgin Canpolat (H.F.Z. Anad. L., T.dağ), Fatih K. Cansu (Bolu Sınav D.), Ahmet Ceyhan (İst. Atat. Fen L.), Alper Çay (Uzman D., Kays.), İbrahim Çimentepe (İzm. Yamanlar L.), Jale Dinler (BÜ., Blg. Müh. Böl.), Mustafa Dönmez (Turgutlu Halil Kale Fen L.) ve Yaşar Dönmez (Turgutlu L.), Ekrem Emre (D.pınar Ü., Küt.), Hasan Hüseyin Eruslu (Man. Ö. Şehz. Mehmet L.), Uğurcan Gümüş (İzm. Ö. Sentez D.), Ayhan Gündüz (Osmaniye), Anar Hüseyin (Anad. Ü. Fen Fak.), Hale Nur Kazaçeşme (Man. Ö. Şehz. Mehmet L.), Anıl Koçak (Bursa Ali Osman Sönmez Fen L.), Levent Mustafa Koçoğlu (S. Demirel Fen L., K.maraş), Aydın Özcan (B.Ü., Mat. Böl.), Burak Sağlam (İzm. Ö. Yamanlar L.), Mehmet Seyrek, Emre Gürbüz, M. Ertuğrul Yurtteri ve Bahattin Sarıca (S. Demirel Fen L.), Semih Yavuz (İzm. Ö. Yamanlar L.).

Y318. 1, 2, 3, ..., $3n$ *sayıları her biri n elemandan oluşan üç kümeye bölündü. Bölünme ne şekilde olursa olsun, seçilen sayılardan biri diğer ikisinin toplamına eşit olacak şekilde her kümeden birer eleman seçilebileceğini kanıtlayınız.*

Çözüm: Tersini varsayalım: problemdeki seçimin olamayacağı şekilde 1, 2, 3, *, $3n$ sayıları A, B ve C kümelerine bölünmüş olsun. Bu kümelerin en küçük elemanlarını sırasıyla a, b ve c ile gösterelim. Genelliği bozmadan a { b { c olduğunu kabul edebiliriz. O halde a | 1'dir. Eğer b | 2 ise c | 3 olamaz çünkü aksi halde 1 + 2 | 3. Demek ki $b \geq 2$ ve dolayısıyla $c \geq b + 1$ ∅4.

Şimdi, c | c_1 { c_2 { * { c_n olmak üzere C | $\{c_1, c_2, *, c_n\}$ olsun.

c_{i+1} 4 c_i, i | 1, 2, *, n 4 1 farklarının en küçüğünü m ile gösterelim. m ∅2 ise c_1 4 1, c_2 4 1, *, c_n 4 1 sayıları C'de değil. Öte yamdan, 1 ⊂ A ve 1 + (c_i 4 1) | c_i olduğundan, c_i 4 1 sayıları B'de de değildir. O halde bu sayılar A'dadır. 1 de A'da olduğundan A en az n + 1 sayı içerir. Çelişki. Demek ki, m | 1'dir.

c_{i+1} 4 c_i | 1 eşitliğini sağlayan en küçük i'yi k ile gösterelim. b { c_1 Ω c_k olduğundan c_k 4 b } 0'dır. Şimdi, b 4 1 { b ve b 4 1 { c olduğundan b 4 1 sayısı A'dadır. (c_k 4 b + 1) + (b 4 1) | c_k olduğundan c_k 4 b + 1 sayısı B'de olamaz. Öte yandan,

$$(c_k \; 4 \; b + 1) + b \; | \; c_k + 1 \; | \; c_{k+1}$$

olduğundan, c_k 4 b + 1 sayısı A'da da olamaz. O halde c_k 4 b + 1 sayısı C'dedir. Bu durumda c_k 4 b sayısı B'de olamaz (1'in A'da olduğunu hatırlayalım). b ⊂ B ve (c_k 4 b) + b | c_k ⊂ C olduğundan c_k 4 b sayısı A'da da olamaz. O halde c_k 4 b | c_t ve c_k 4 b + 1 | c_{t+1} olacak şekilde bir t { k bulunur ki, bu da k'nın en küçük olması koşuluyla çelişir. Böylece tüm durumlarda çelişki elde edilir, dolayısıyla böyle bir bölünme mümkün değildir.

Çözenler: Hale Nur Kazaçeşme (Man. Ö. Şehz. Mehmet L.)

Y319. (0, 1) *aralığından alınmış her* x, y, z *gerçel sayıları için,*

$$x(1 \; 4 \; y) + y(1 \; 4 \; z) + z\,(1 \; 4 \; x) \; \{ \; 1$$

eşitsizliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

Çözüm: y ve z'yi sabit tutarak,

$$f(x) \; | \; x(1 \; 4 \; y) + y(1 \; 4 \; z) + z(1 \; 4 \; x)$$
$$| \; (1 \; 4 \; y \; 4 \; z)x + y + z \; 4 \; yz$$

fonksiyonunu inceleyelim. Her x ⊂ (0, 1) için $f(x)$ { 1 olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Üç durum olabilir.

1) $y + z$ | 1. Bu durumda $f(x)$ | 1 4 yz { 1'dir.

2) $y + z$ { 1. Bu durumda 1 4 y 4 z } 0 olduğundan $f(x)$ fonksiyonu artandır, dolayısıyla her x ⊂ (0, 1) için $f(x)$ { $f(1)$ | 1 4 yz { 1'dir.

3) $y + z$ } 1. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonu azalandır, dolayısıyla her x ⊂ (0, 1) için,

$$f(x) \; \{ \; f(0) \; | \; y + z \; 4 \; yz \; | \; 1 \; 4 \; (1 \; 4 \; y)(1 \; 4 \; z) \; \{ \; 1$$

elde edilir.

Çözenler: Suat Akbulut (İzm. Ö. Yamanlar L.), Osman Arşın (Gazi Ü., Türkçe Öğr. Böl.), Gökhan Atasever (T.dağ), Mustafa Ataklı (Safa D., G.antep), Oktay Balkış (Aks. Anad. Öğrt L.), Bilgin Canpolat (H.F.Z. Anad. L., T.dağ), Fatih K. Cansu (Bolu Sınav D.), Ahmet Ceyhan (İst. Atat. Fen L.), Alper Çay (Uzman D., Kays.), İbrahim Çimentepe

(İzm. Yamanlar L.), Ekrem Emre (D.pınar Ü., Küt.), Hasan Hüseyin Eruslu (Man. Ö. Şehz. Mehmet L.), Ahmet Hamdi Fazlıoğlu (İzm. Ö. Yamanlar L.), Uğurcan Gümüş (İzm. Ö. Sentez D.), Ayhan Gündüz (Osmaniye), Anar Hüseyin (Anad. Ü. Fen Fak.), Gamze İsbir (Elazığ), Anıl Koçak (Bursa Ali Osman Sönmez Fen L.), Aydın Özcan (B.Ü., Mat. Böl.), Burak Sağlam (İzm. Ö. Yamanlar L.), Engin Yardımcı (ODTÜ, Mat. Böl.), Semih Yavuz (İzm. Ö. Yamanlar L.), Nami Yıldırım (T. İş Bank.İzm. Şb.).

Y320. *Üç basamaklı bir pozitif tamsayıdan bu sayının basamaklarının küplerinin toplamı çıkarıldığında elde edilen fark en fazla kaç olabilir?*

Çözüm: Üç basamaklı (abc) sayısından bu sayının basamaklarının küpleri toplamı çıkarıldığında,

$$100a + 10b + c \; 4 \; a^3 \; 4 \; b^3 \; 4 \; c^3 \; | $$
$$(100a \; 4 \; a^3) + (10b \; 4 \; b^3) + (c \; 4 \; c^3)$$

elde edilir. $f(x) \; | \; kx \; 4 \; x^3$ fonksiyonu en büyük değerine $x \; | \; (k/3)^{1/2}$ olduğunda ulaştığından,

$$100a \; 4 \; a^3,\ 10b \; 4 \; b^3 \text{ ve } c \; 4 \; c^3$$

ifadeleri en büyük değerlerine $a \; | \; 5$ veya 6; $b \; | \; 1$ veya 2; $c \; | \; 0$ veya 1 olduğunda ulaşırlar. Bu değerler kıyaslandığında yukarıdaki farkın en büyük değerinin (abc) | 621 veya 620 durumunda ulaşıldığı ve bu farkın 396 olduğu görülür.

Çözenler: Suat Akbulut (İzm. Ö. Yamanlar L.), Medeni Arslan (Erzn. İlköğ. Mat. Öğr.), Osman Arşın (Gazi Ü., Türkçe Öğrt. Böl.), Gökhan Atasever (T.dağ), Mustafa Ataklı (Safa D., G.Antep), M. Süheyb Ayaz (Ö. Yamanlar L.), Oktay Balkış (Aks. Anad. Öğrt. L.), Bilgin Canpolat (H.F.Z. Anad. L., T.dağ), Ahmet Ceyhan (İst. Atat. Fen L.), Alper Çay (Uzman D., Kays.), İbrahim Çimentepe (İzm. Yamanlar L.), Jale Dinler (B. Ü., Blg. Müh. Böl.), Mustafa Dönmez (Turgutlu Halil Kale Fen L.) ve Yaşar Dönmez (Turgutlu L.), Ekrem Emre (D.pınar Ü., Küt.), Hasan Hüseyin Eruslu (Man. Ö. Şehz. Mehmet L.), Ahmet Hamdi Fazlıoğlu (İzm. Ö. Yamanlar L.), Uğurcan Gümüş (İzm. Ö. Sentez D.), Ayhan Gündüz (Osmaniye), Levent Mustafa Koçoğlu (S. Demirel Fen L., K. Maraş), Aydın Özcan (B.Ü., Mat. Böl.), Burak Sağlam (İzm. Ö. Yamanlar L.), Mehmet Seyrek, Emre Gürbüz, M. Ertuğrul Yurtteri ve Bahattin Sarıca (S. Demirel Fen L.), Denizgezmiş Taş (Beşiktaş Atat. Anad. L.), Engin Yardımcı (ODTÜ, Mat. B.), Adil Yatkın (Man. Ö. Şehz. Mehmet L.), Semih Yavuz (İzm. Ö. Yamanlar L.), Nami Yıldırım (T. İş Bank. İzm. Şb.). ♦

Bilkent 2001 Soruları

Azer Kerimov / kerimov@fen.bilkent.edu.tr
www.fen.bilkent.edu.tr/~cvmath/Problem/problem.htm

Şubat 2001. $f(x) \; | \; 5x^{13} + 13x^5 + 9ax$ fonksiyonunun tüm x tamsayı değerleri için 65'e bölünebilmesini sağlayacak en küçük pozitif a tamsayısı ne olmalıdır?

Mart 2001. $(m \; 4 \; n)^2(n^2 \; 4 \; m) \; | \; 4m^2n$ denklemi sağlayan tüm negatif olmayan (m, n) tamsayı çiftlerini bulunuz.

Nisan 2001. $k + 1$ sayısı 24'e bölünebildiğine göre, k doğal sayısını bölen tüm doğal sayıların toplamının 24'e bölünebileceğini kanıtlayın.

Mayıs 2001. Her $x, y, z \subset [0, 1]$ için,

$$3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) \; 4 \; 2xyz(x + y + z) \; \Omega 3$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu kanıtlayınız.

Haziran-Temmuz 2001. Eğer her $i \; | \; 1, 2, 3, 4$ için $|x_i| \; \Omega 1$ ise,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \; 4 \; x_1x_2 \; 4 \; x_1x_3 \; 4 \; x_1x_4 \; 4 \; x_2x_3 \; 4 \; x_2x_4 \; 4 \; x_3x_4 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \; 4 \; x_1x_2x_3x_4$$

ifadesinin en büyük değerini bulunuz.

Ağustos- Eylül 2001. $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ kümesinin elemanları elemanlarının toplamı eşit olacak biçimde ayrık A, B ve C altkümelerine ayrıştırılabilirse, n hangi tamsayı değerlerini alabilir?

Ekim 2001. p, 5'den büyük bir asal sayı olsun. Öyle bir k sayısı bulunuz ki pk sayısı ondalık tabanda yalnızca 1 rakamı ile yazılabilsin, yani

$$pk \; | \; 111 \ldots 1$$

olsun.

Kasım 2001. Eğer $0 \; \Omega a, b, c \; \Omega 1$ ise,

$$\# \sqrt{a(1 \; 4 \; b)(1 \; 4 \; c)} \; 2 \; \sqrt{b(1 \; 4 \; a)(1 \; 4 \; c)} \; 2 \; \sqrt{c(1 \; 4 \; a)(1 \; 4 \; b)} \, \Omega 1 \; 2 \; \sqrt{abc}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

Aralık 2001. $x^3 + y^3 + z^3 \; | \; 2$ denkleminin tamsayılarda sonsuz sayıda çözümü olduğunu kanıtlayınız. ♦