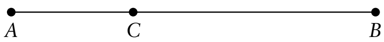
Geometri Köşesi

Mustafa Yağcı
yagcimustafa@yahoo.com
www.mustafayagci.com

Altın Oran

Herhangi bir AB doğru parçasının üzerindeki bir C noktası için $AB:AC$ oranına ***aşıt oran***[1], $AC:CB$ oranına da ***ortalama oran***[2] denir.



Eğer AB doğru parçasının üzerindeki bir C noktası için aşıt oran ile ortalama oran eşit oluyorsa, yani

$$AB:AC = AC:CB$$

ise C'ye AB'nin ***altın bölümü*** denir. Ben C'ye AB'nin ***altın noktası*** diyeceğim. Bu oranı oluşturan $AB:AC$ veya $AC:CB$ oranına da ***altın oran*** denir.

Kavramı ilk duyduğumda "altın" sıfatını oldukça iddialı bulmuştum ama sonradan ikna oldum. Bu sıfatın neden hakedildiğini derginin bana bahşettiği sayfa sayısı kadar anlatabilirim ancak. Gerçekten de altın oranın uygulamaları ve karşımıza çıktığı yerler o kadar çoktur ki ne bu derginin ne de bir başka derginin sayfa sayısı buna yetmez.

Altın Nokta Vardır! Böyle bir C noktası mutlaka vardır, çünkü AB doğru parçası üzerindeki bir P noktası A'dan B'ye doğru seyahat ettiğinde, $AB:AP$ oranı sonsuzdan 0'a kadar azalarak, $AP:PB$ oranı ise 0'dan sonsuza kadar artarak değişir; dolayısıyla bir zaman sonra bir P noktası için bu iki oran birbirine eşit olur; işte bu nokta AB'nin altın noktasıdır. Bunun daha cebirsel ve çok daha ikna edici kanıtını birazdan göreceğiz.

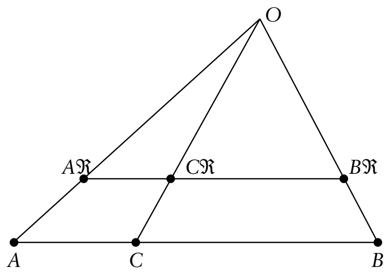
Ama dikkat! AB doğru parçasının altın noktası BA doğru parçasının altın noktası değildir.

Altın Oran Mutlaktır! Tales Teoemi'nden dolayı altın oran AB doğru parçasının uzunluğundan bağımsızdır: $A'B'$ bir başka doğru parçası olsun. $A'B'$ doğru parçasını döndürüp AB'ye paralel konuma getirelim (yollar yürünmekle, uzunluklar döndürmekle aşınmaz!) Eğer C ve C' noktaları şekildeki gibiyse, Tales Teoremi'nden dolayı,

$$AB:AC = A'B':A'C', AC:CB = A'C':C'B'$$

Dolayısıyla eğer C, AB doğru parçasının altın noktasıysa, o zaman C' de $A'B'$ doğru parçasının altın noktasıdır ve her ikisinin de altın oranı aynıdır.

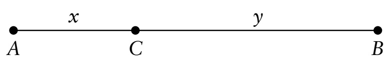
> *"Geometrinin iki büyük hazinesi vardır: Bunlardan biri Pisagor Teoremi, öteki de bir doğru parçasının aşıt ve ortalama orana bölünmesidir. Birincisi bir ölçek altın, ikincisi de değerli bir mücevherdir diyebiliriz."*
> Johannes Kepler, 1571-1630



Bu yaptığımızın önemini kavramak için biraz filozof olmak gerekir: Altın oran A ve B noktalarından bağımsız, yeter ki $A \neq B$ olsun, hep aynı değer bulunuyor! Yani altın oran **mutlak bir sayı**, ϕ gibi, e gibi doğanın bir sabiti. Durum böyle olunca altın oranın önemli bir sayı olduğu hemen anlaşılıyor.

Demek ki bir tane altın oran var, başka yok. Şimdi biricik olan bu sayıyı bulalım.

Altın Oranın Değeri. Yukarda çizdiğimiz AB doğru parçasında $AC = x$ ve $CB = y$ olsun. Şimdi $AB:AC$ ve $AC:CB$ oranlarını x ve y cinsinden hesaplayıp bu oranları eşitleyelim, bakalım ne zaman



eşit çıkacaklar. Şekilden hemen

$$AB:AC = (x + y)/x,$$
$$AC:CB = x/y$$

eşitlikleri çıkar. Demek ki, bu iki oranın eşit olma-

1 İngilizcesi extreme ratio.
2 İngilizcesi mean ratio.

ları için x ve y uzunlukları

$$(x + y)/x = x/y$$

denklemini sağlamalı. Paydaları eşitleyelim:

$$xy + y^2 = x^2$$

buluruz. Şimdi denklemi y^2'ye bölelim:

$$x/y + 1 = (x/y)^2.$$

Bu aşamada $\pi = x/y$ tanımını yapalım. Yukardan

$$\pi^2 - \pi - 1 = 0$$

buluruz. Buradan π'yi nerdeyse buluruz:

$$\pi \mid \frac{1 \partial \sqrt{5}}{2}.$$

x ve $y > 0$ olduğundan, $z = x/y > 0$. Dolayısıyla z için 4 olan değil + olan ifadeyi almalıyız:

$$\underset{\#}{\pi} \mid \frac{12\sqrt{5}}{2}.$$

$AC{:}CB = x/y = \pi$ olduğundan altın oranı bulduk. Ayrıca bir kez daha bu oranın A ve B noktalarından bağımsız olduğunu kanıtladık.

Bu arada π için bulduğumuz $\pi^2 - \pi - 1 = 0$ eşitliğini unutmayalım, çok yararlı olacaktır.

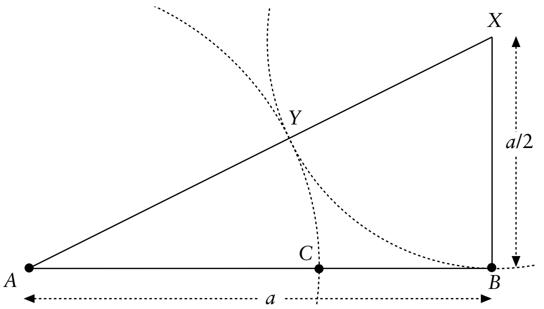
Yukardaki hesaplarda y'yi 1 alırsak, ki AB doğru parçasını belli bir oranda büyütüp ya da küçülterek bunu yapabiliriz, o zaman $\pi = x/y = x$ bulunur. Bu da kimileyin oran hesaplarını kolaylaştırır.

$$\overset{\pi}{A \bullet\!\!-\!\!-\!\!\bullet C} \overset{1}{-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet B}$$

Altın Oranın Simgesi. 20'nci yüzyılın başından itibaren altın oran için π (**phi**, Türkçe okunuşuyla 'fi') simgesi kullanılmaya başlanmıştır. π Yunan alfabesinin 21'inci harfidir. MÖ 5'inci yüzyılda yaşamış ünlü Atinalı heykeltıraş Phidias (ya da Pheidias) anısına bu harf seçilmiştir. Phidias'ın altın orana sadık yapılan heykelleri o denli hoşa gitmiş ki, eski Atinalılar Phidias için "tanrıların imgesini gören tek kişidir" demişlerdir. Bu nedenle altın oran kimileyin, ender de olsa, ***Phidias sayısı*** olarak anılır.

Ünlü Fransız ressamı Ingres'in ("engr" okunur) tasarladığı Phydias portresini yandaki sütunda bulacaksınız.

Altın Noktanın İnşası. AB doğru parçası verilmişse, sadece pergel ve cetvelle C altın noktasını bulabiliriz. Şöyle yaparız: B'den AB uzunluğunun yarısı kadar bir dik çıkalım (bunu cetvel ve pergelle yapabiliriz.) Böylece şekildeki gibi bir ABX dik üçgeni elde ederiz. X merkezli XB yarıçaplı çember



AX hipotenüsünü Y'de kessin. Şimdi A merkezli AY yarıçaplı çemberin AB doğru parçasını kestiği C noktası AB'nin altın noktasıdır. Bunun kanıtı çok kolaydır ve okura bırakılmıştır.

Cebirsel Özellikler. Yukardaki $\pi^2 - \pi - 1 = 0$ eşitliğinden yola çıkarak aşağıdaki eşitliklerin kanıtlanması kolaydır.

$$\pi^2 = \pi + 1,$$
$$\pi^3 = 2\pi + 1,$$
$$\pi^4 = 3\pi + 2,$$
$$\pi^5 = 5\pi + 3,$$
$$\pi^6 = 8\pi + 5,$$
$$\pi^7 = 13\pi + 8,$$
$$\ldots$$

Sağdaki terimlerin katsayılarına dikkat ettiniz mi?

1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Her biri iki öncesinin toplamı... Örneğin 13 = 5 + 8. Bunlar Fibonacci sayıları... Fibonacci sayılarını anımsayalım:

$$f_0 = f_1 = 1$$

ve

$$f_n = f_{n41} + f_{n41}$$

formülleriyle tanımlanmış diziye Fibonacci dizisi, bu sayılara da Fibonacci sayıları denir. İlk Fibonacci sayıları şöyle

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Dikkatinizi çekmiştir,

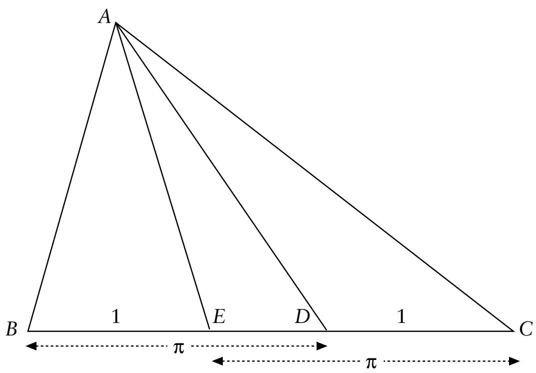
$$\pi^n = f_{n41}\pi + f_{n42}$$

eşitliği sanki doğru gibi. Nitekim doğrudur ve tümevarımla kolaylıkla kanıtlanabilir. İki satırlık kanıtı okura bırakıyoruz.

Yukardaki eşitliklerden yola çıkarak aşağıdaki eşitlikler kolaylıkla kanıtlanabilir:

$$1/\pi = \pi - 1,$$
$$1/\pi^2 = 2 - \pi,$$
$$1/\pi^3 = 2\pi - 3,$$
$$1/\pi^4 = 5 - \pi.$$

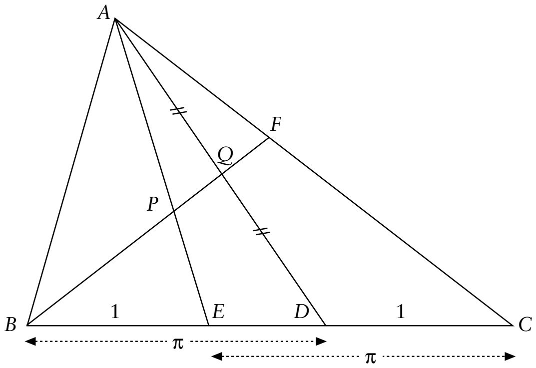
Üçgende Altın Kesen. Bir üçgende bir köşeyle karşısındaki kenar üzerindeki bir noktayı birleştiren doğru parçasına ***kesen*** adı verilir. Eğer nokta rastgele değil de karşı kenarın altın noktasıysa artık onun adı ***altın kesen*** olacak. Bir köşeye ait iki farklı altın kesen vardır. Çünkü bir doğru parçası üzerinde iki değişik altın nokta vardır. Biri kenarı π:1, diğeri de 1:π oranında böler.



Şimdi π'nin ne kadar sihirli bir sayı olduğunu gösterelim. Yukardaki gibi BC kenarının uzunluğu $\pi + 1$ olan bir ABC üçgeni ve bu üçgenin A'ya ait AD ve AE altın kesenlerini çizelim. Demek ki $BE = DC = 1$. Öte yandan $ED = EC - DC = \pi - 1 = 1/\pi$. Dolayısıyla $BE : ED = \pi = BD : BE$ ve AE, ABD üçgeninin bir altın keseni. Aynı şekilde AD de AEC üçgeninin bir altın kesenidir. Oldukça şaşırtıcı. Ama daha bitmedi.

Teorem. *Bir üçgende herhangi bir köşeye ait altın kesenlerden biri (ikisi birden değil, sadece biri) bir başka köşeye ait iki altın kesenin birini ortalar, diğerini altın böler.*

Kanıt: ABC üçgeninde A köşesine ait altın kesenler yukardaki şekildeki gibi AD ve AE olsun. B'ye ait ve $CF{:}FA = \pi$ eşitliğini sağlayan BF altın



kesenini alalım (diğerini değil, bunu!) Önce FBC üçgeninde QD kesenine Menelaus Teoremi'ni (bkz. aşağıdaki gri kare) uygularsak,

$$1 \mid \frac{BD}{BC} \Delta \frac{CF}{FA} \Delta \frac{AQ}{QD} \mid \frac{\pi}{\pi\ 2\ 1} \Delta \frac{\pi}{1} \Delta \frac{AQ}{QD}$$

buluruz. $\pi^2 = \pi + 1$ olduğundan $AQ = QD$ eşitliği kanıtlanmış olur. Şimdi de QBD üçgeninde PE ke-

$$\underset{\#}{1} \mid \frac{BE}{BD} \Delta \frac{DQ}{QA} \Delta \frac{AP}{PE} \mid \frac{1}{\pi} \Delta 1 \Delta \frac{AP}{PE}$$

senine Menelaus Teoremi'ni uygulayalım:
yani $AP{:}PE = \pi{:}1$. □

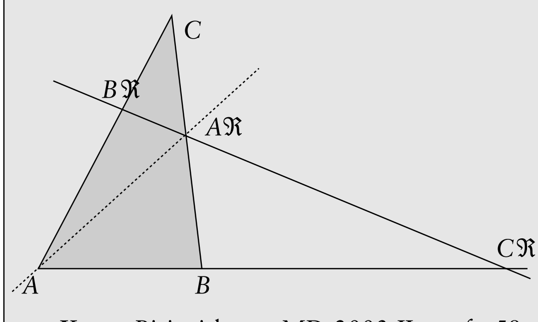
Menelaus Teoremi

Menelaus Teoremi. *Herhangi bir ABC üçgeni bir doğru tarafından aşağıdaki gibi kesilsin, o zaman*

$$BCℜCAℜABℜ= CBℜBAℜACℜ$$

ve

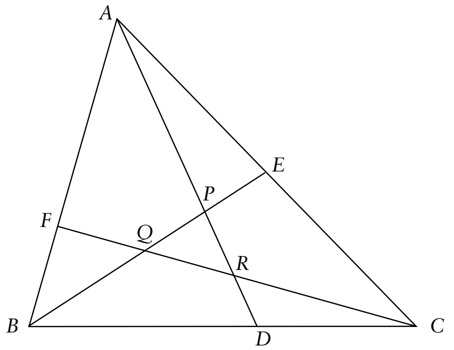
$$B𝔛 \cdot C𝔄ℜAB = C𝔅 \cdot B𝔄ℜAC.$$



Kanıt: Birinci kısım MD-2003-II, sayfa 58-59'da kanıtlanmıştı. ABC üçgeni yerine $AB𝔛ℜ$ *üçgenini*, $B𝔄𝔛ℜ$keseni yerine $BA𝔛$ kesenini alırsak, yan, şeklin bir anlamda $AAℜ$doğrusuna göre simetriğini alırsak, $B𝔛 \cdot C𝔄ℜAB$ = $C𝔅 \cdot B𝔄ℜAC$ eşitliğini elde ederiz. □

Not: Eğer BF yerine B'ye ait diğer altın kesen çizilseydi AE bu keseni ortalar, AD ise π^2:1 oranında bölerdi. Bunların kanıtını okura bırakıyoruz.

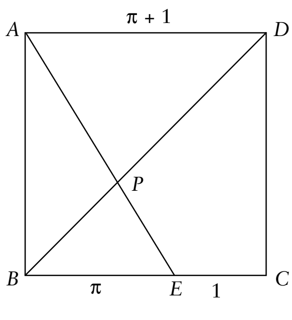
Alıştırma. Aşağıdaki ABC üçgeninde AD, BE, CF kesenleri için $AP = PD$, $BQ = QE$ ve $CR = RF$ veriliyor. Şu eşitlikleri gösteriniz:



a) $AF{:}FB = BD{:}DC = CE{:}EA = \pi$,
b) $PR{:}RD = QP{:}PE = RQ{:}QF = \pi$,
c) $AP{:}PR = BQ{:}QP = CR{:}RQ = \pi$,
d) Alan(PQR) = Alan(APE) = Alan(BQF) = Alan(CRD),
e) Alan($APQF$) = Alan($BQRD$) = Alan($CRPE$).

Karede Altın Kesen. Karede herhangi bir köşeden kendisine komşu olmayan kenarlara inen kesenler kenarı π:1 veya 1:π oranında kesiyorsa, buna karenin altın keseni denir. Karede bir köşeye ait 4 farklı altın kesen vardır.

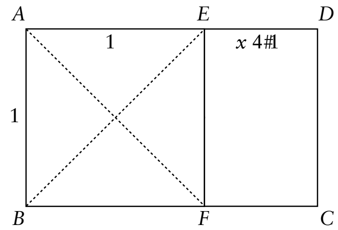
Teorem. *ABCD karesinde* $BE{:}EC = \pi{:}1$ *olacak şekilde çizilen AE altın keseni BD köşegenini de altın böler.*



Kanıt: $BE = \pi$ ve $EC = 1$ eşitliklerini varsayabiliriz. O zaman $AD = \pi + 1$ olur. AE ile BD köşegeninin arakesiti P olsun. APD ile EPB üçgen benzerliğinden $PD/PB = AD/EB = (\pi + 1)/\pi = 1 + (1/\pi) = \pi$ olur ki bu da teoremi kanıtlar. □

Altın Dikdörtgen. Öklid, Öğeler'inde altın oranla ilgili güzel bir probleme değinmişti: Öyle bir dikdörtgen ($ABCD$) bulmalı ki bu dikdörtgenden bir kare ($ABEF$) çıkarıldığında kalan dikdörtgenin ($CDEF$) kenarlarının oranıyla ilk dikdörtgenin ($ABCD$) kenarlarının oranı aynı olsun. Dikdörtgenler benzer olmalı yani.

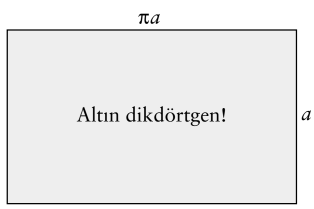
Bu dikdörtgeni, kendisine benzer bir dikdörtgen çıkarıldığında, geride kare bırakan dikdörtgen diye de algılayabiliriz. Ben bunu bir annenin bebeğini doğurmasına benzetiyorum. Kendisine benzer bir yavru meydana getirip, eski düzgün haline dönen bir anne... Hani kare düzgün bir dörtgen ya. Teşbihte hata olmaz...



Uzun kenarı x ve kısa kenarı 1 olan bir dikdörtgen çizelim. Bundan bir kenarı 1 olan bir kare çıkartalım. Geriye kalan dikdörtgenin kısa kenarı $x - 1$, uzun kenarı 1 olur. Dikdörtgenlerin benzer olmasını istediğimizden,

$$x{:}1 = 1{:}(x - 1)$$

olmalıdır. Bu da bizi yine $x^2 - x - 1 = 0$ eşitliğine götürür ki bu denklemin tek pozitif çözümü de $x = \pi$ olduğundan bu dikdörtgene neden ***altın dikdörtgen*** dendiğini anlamış oluruz.

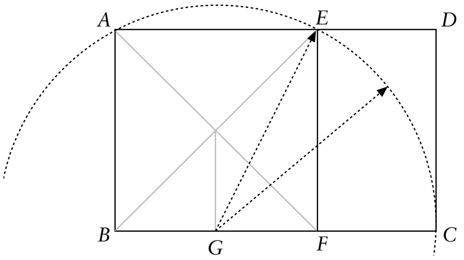


Altın Dikdörtgen Çizimi. Çizmek istediğimiz altın dikdörtgeninin kısa kenarının kaç olmasını istiyorsak, bir kenarı o kadar olan bir $ABFE$ karesi çizelim. (Bkz. Yan sayfadaki alttaki şekil.) Köşegenler yardımıyla bulduğumuz karenin ağırlık merkezinden BF'ye inilen dikme ayağına G diyelim. G merkezli GE yarıçaplı çemberi çizelim. Bu çember BF doğrusunu tam $ABCD$ altın dikdörtgeninin C köşesinde keser. C'den BC'ye çıkılan dikme AE'yi de aradığımız D noktasında keser. Böylelikle $ABCD$ çizilmiş olur.

Şimdi de bu çizimin doğruluğunu kanıtlayalım: $BG = GF = 1$ dersek; $EF = DC = 2$ ve $GE = GC =$

$\sqrt{5}$ olur. Şimdi hesaplayalım:

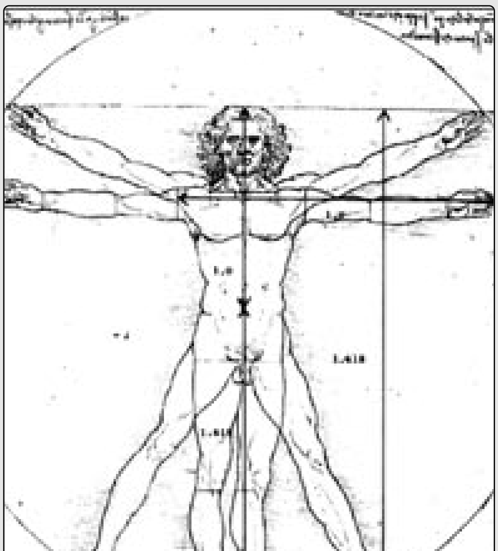
$$BC{:}DC = (BG + GC){:}DC = (1 + \sqrt{5})/2 = \pi.$$



Putları Çatır Çatır Kırıyoruz!

Bir inanışa göre altın dikdörtgen göze hoş gelir, dengeli bir dikdörtgendir... Öyleymiş... Ne demekse! MD bu tür basmakalıp estetik kurallarına pek kulak asmaz ve anlamsız güzellik formüllerine kuşkuyla yaklaşır.

Tarihte birçok bilim adamı ve sanatçı "ideal" insan vücudunu altın oranla tanımlamaya kalkışmıştır. Geçmişte anlaşılır ve hoş görülebilirdi belki ama bugün "ideal insan vücudu" gibi



bir kavram insanı kafatasçılığa sürükleyebilecek kertede tehlikeli bir düşüncedir. Örneğin (rastgele bir örnek vermek gerekirse!) biz Türklerin vücut ölçüleri - Tarık Akan gibi bir iki istisna dışında - genelde altın orana pek uymaz (bacaklarımız biraz kısadır.)

Soru. Peki, uzun kenarına göre bir phi dikdörtgeni nasıl çizilir? Bunun çizimini de okura bırakıyoruz. (İpucu: Dikkenar uzunluklarının oranı 1/2 olan bir dikdörtgen çiziniz.)

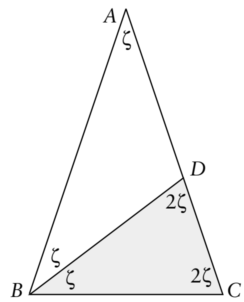
"Altın kural"a göre yapıldığına inanılan Parthenon tapınağı MÖ 447-432). Mimarları Iktinos ve Kallikrates, heykeltraşı ise daha önce adı geçen meşhur Phidias.

Altın Üçgen. Öyle bir ikizkenar üçgen bulacağız ki kendisinden kendine benzer bir üçgen çıkarıldığında geriye gene bir ikizkenar üçgen kalacak. (Aşağıdaki iki şekle bakabilirsiniz.) Neden eşkenar üçgen ile başlayamacağımızı anlamak zor değil.

Bu arada, birazdan kanıtlayacağımız üzere, dikdörtgenden farklı olarak, bu koşulları sağlayan iki farklı üçgen olduğunu da hemen belirtelim.

Teorem. *Altın üçgen tanımına uyan daraçılı bir tek üçgen vardır ve bu üçgenin tepe açısı* 36°'*dir.*

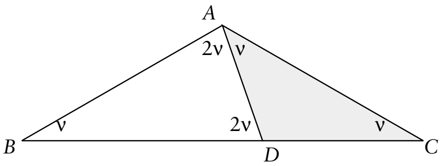
Kanıt: Eldeki ilk ikizkenar üçgen ABC olsun. Tepe açısı da A'da olsun ve bu açının ölçüsü ζ olsun. Bu üçgenden tepe açısı B'de olan ve ABC üçgenine benzer bir BCD üçgeni çıkaralım. Üçgenler benzer olduğundan BCD üçgeni de ikizkenardır ve tepe açısı ζ'dır. Geriye ADB üçgeni kalır. $AB > AD$ ve $AB \neq BC = BD$ olduğundan ADB ikizkenar ise $AD = DB$ eşitliği sağlanır. O halde $m(ABD) = \zeta$. Buradan $m(CDB) = m(DCB) = 2\zeta$ bulunur ki BDC üçgeninin iç açı ölçüleri toplamından $5\nu = 180°$ ve $\nu = 36°$ bulunur. □



Teorem. *Altın üçgen tanımına uyan genişaçılı bir tek üçgen vardır ve bu üçgenin tepe açısı* 108°'*dir.*

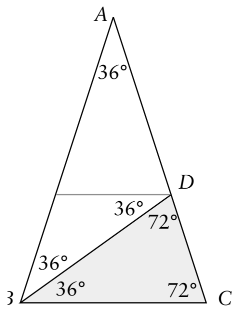
Kanıt: Taban açıları ν olan geniş açılı bir BAC

ikizkenar üçgeni çizelim. Sonra da bu üçgenden şekildeki gibi yine taban açıları ν olan CDA ikizkenar



üçgenini çıkaralım. Artakalan üçgende $m(ADB)$ = 2ν ve $BA = BD$ olduğundan $m(BAD)$ = 2ν dir. İçaçı ölçüleri toplamından 3ν#= 108° bulunur. □

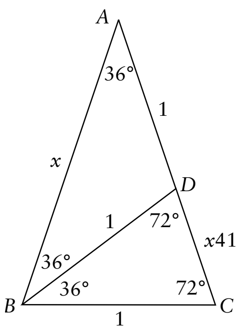
Biz tepe açısı 36° olan altın üçgene ***dikey***, diğerine ise ***basık altın üçgen*** diyeceğiz. Üstteki şekillerden ve bir yandakinden dikey altın üçgenin artakalanın basık altın üçgen, basık altın üçgenin artakalanının da dikey altın üçgen olduğunu görebilirsiniz.



Bu üçgenlerin "altın" adını almalarının bir nedeni olmalı elbet:

Teorem. *Altın üçgenlerin her ikisinde de uzun kenarın kısa kenara oranı π'dir.*

Kanıt: Aşağıdaki ABC dikey altın üçgeninin artakalanı olan ADB üçgeni basık altın üçgen olduğundan sadece dikey altın üçgen şekli üzerinde her ikisini de kanıtlamış olacağız. $AB = AC = x$ ve $BC = 1$ olsun. $BC = BD = DA = 1$ olduğundan $DC = x - 1$ olur. BAC ile CBD üçgenlerinde benzerlikten doğan eşleme yapılırsa,



$$x/1 = 1/(x - 1)$$

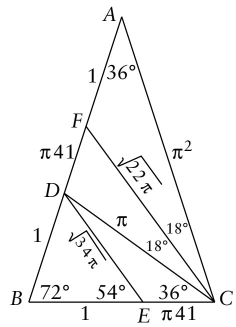
olur ki paydalar eşitlenirse $x^2 - x - 1 = 0$ çıkar. Demek ki $AB{:}BD = x = \pi = AB{:}BC$. □

Bazı Trigonometrik Eşitler. Taban uzunluğu π olan bir BAC dikey altın üçgeni çizelim. Taban uzunluğunu 1 de alabilirdik fakat tabanın π olması trigonometrik ilişkileri daha rahat görmemizi sağlayacak.

Altın üçgenin ikizkenarları, tabanın π katı olduğundan $AB = AC = \pi^2$ olur.

DC'yi çizerek basık altın üçgeni oluşturursak $AD = DC = BC = \pi$ olur. Dolayısıyla $DF = \pi - 1$ ve ABC üçgeninde CD bir altın kesendir.

Öte yandan, şekildeki CF hem ABC üçgeninde hem de ADC üçgeninde altın kesendir. Şimdi de D'den FC'ye bir paralel çizelim. $BE = 1$ ve $EC = \pi - 1$ olduğundan DE de altın kesen çıktı. ADC üçgeninde içaçıortay teoreminden



$$\#FC \,|\, \sqrt{2\,2\,\pi}$$

ve böylelikle $FC \parallel DE$ olduğundan Tales Teoremi gereği

$$\#DE \,|\, \sqrt{3\,4\,\pi}$$

bulunur. Şimdi bazı trigonometrik değerleri bulabiliriz. DEB üçgenine kosinüs teoremini uygularsak

$$DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2\Delta BD\Delta BE\Delta\cos 72°$$

buluruz. Bilinenleri yerlerine yazarsak

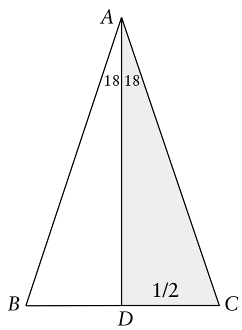
$$3 - \pi = 1 + 1 - 2\Delta\sin 18$$

çıkar ki düzenlenirse

$$\sin 18° = (\pi\ 4\ 1)/2$$

elde edilir.

Bir ABC altın üçgeni çizelim. $BC = 1$ ise $AB = AC = \pi$ olacağını kanıtlamıştık. Üçgen ikizkenar olduğundan tepeye ait yükseklik tabanı ikiye böler. ADC dik üçgeninden ve



$$\sin 18\,\forall\,| \frac{1/2}{\pi}$$

bulunur. Şimdi bu eşitlikte

$$\pi \,|\, \frac{1}{2\sin 18\,\forall}$$

yine hayırlara vesile olacak bazı oynamalar yapacağız. Biz bunu hep yapıyoruz.

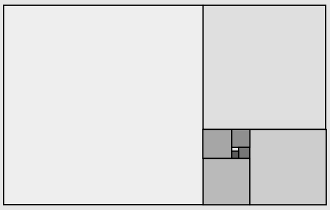
$$\pi \,|\, \frac{1}{2\sin 18} \,|\, \frac{\cos 18}{2\sin 18\cos 18} \,|\, \frac{\sin 72}{\sin 36}$$
$$\# \,|\, \frac{\sin 108}{\sin 36} \,|\, \frac{2\sin 54\cos 54}{\cos 54} \,|\, 2\sin 54.$$

Benzer şekilde diğer üçgenlerde de kosinüs teoremleri uyguladıkça şeklimizde görünen tüm açıların trigonometrik değerlerini π cinsinden bulmuş oluruz. İşte bazılarının sin ve cos değerleri:

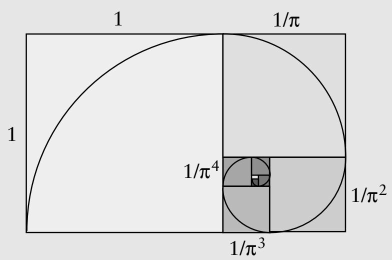
ζ	2sin ζ	2cos ζ
18°	π#4 1	$(2 + \pi)^{1/2}$
36°	$(3\ 4\ \pi)^{1/2}$	π
54°	π	$(3\ 4\ \pi)^{1/2}$
72°	$(2 + \pi)^{1/2}$	π 4 1

Sanat mı Matematik mi?

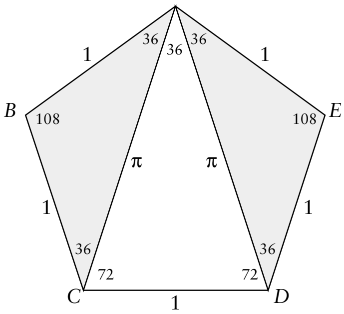
Bir altın dikdörtgenden bir kenarı dikdörtgenin enine eşit kare çıkartıldığında geriye gene bir altın dikdörtgen kalır, bunu metinde görmüştük. Demek ki geriye kalan altın dikdörtgenle işlemi tekrarlayabiliriz ve bunu sonsuza kadar götürebiliriz. Sonuç aşağıda:



Karelerin içine çeyrek daire yerleştirince daha etkileyici oluyor nedense:

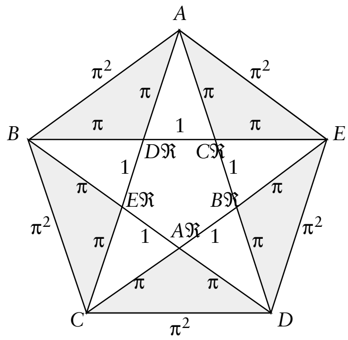


Altın Beşgen. Altın beşgen bildiğiniz düzgün beşgendir aslında. Niye mi altın diyoruz? Eğer dikey bir *ACD* altın üçgeninin dışına doğru ikizkenarları taban kabul eden *AED* ve *ABC* basık altın üçgenlerini çizersek, şekilden de hemen anlaşılacağı gibi, *ABCDE* bir düzgün beşgen olur. Böylece



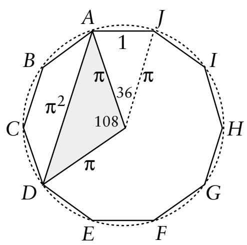
bir düzgün beşgenin köşegeninin kenarına olan oranın tam π olduğu anlaşılır.

Teorem. *Düzgün beşgende köşegenlerin hepsi birbirini altın böler.*



Kanıt: Oranları kolay görelim diye beşgenin kenarlarına π^2 diyelim. Koyu renkle taranmış üçgenlerin basık altın üçgen olduğundan ikiz kenarları π olur. Taranmamış üçgenler de altın üçgen olduğundan kısa kenarları 1 olur. *BE* köşegeninde $D\mathfrak{R}$ve $C\mathfrak{R}$birer altın nokta olduğundan $AD\mathfrak{R}$ve $AC\mathfrak{R}$ de birer altın kesen olur. □

Altın Ongen. Euclid on kenarlı bir düzgün çokgenin kenar uzunluğu ile bu ongeni çevreleyen çemberin yarıçapı arasındaki π ilişkisini Ögeler'de ortaya çıkarmıştı bile. İşin garibi bir köşegenin de bu yarıçapa oranı π. Bu durumu bir de şeklimizde görelim:

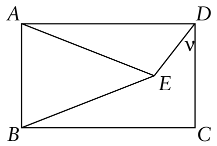


ABCDEFGHIJ düzgün ongeninin bir kenarı 1 ve çevrel çember merkezi de O olsun. *AON* açısı 360°/10 = 36° olur. O halde *AON* bir altın üçgendir. *AO* = *ON* = π olduğunu kanıtlamıştık. Diğer yandan *AOD* üçgeni de basık altın üçgen olur. *AD* köşegeni de bu yüzden π^2 dir.

Hüseyin Demir Hocamızdan Alıştırmalar

1. Kenar uzunlukları π, π + 1, π + 1 olan üçgenin dikey bir altın üçgen, π + 1, π + 1, π olan üçgenin de basık bir basık üçgen olduğunu gösteriniz.

2. 1, a, a^2 sayılarının bir üçgenin kenar uzunlukları olabilmesi için π – 1 < a < π olması gerektiğini kanıtlayınız.



3. Yandaki şekilde *ABCD* bir altın dikdörtgen, *AEB* ise bir altın üçgen ise *CDE* açısı kaç derecedir?

4. Tabanları 1 olan bir dikey altın üçgenle bir basık altın üçgenin alanlarının sırasıyla

$$\frac{\sqrt{4\pi\ 2\ 3}}{4} \text{ ve } \frac{\sqrt{7\ 4\ 4\pi}}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

5. Bir kenarı 1 olan bir düzgün beşgenin çevrel çember yarıçapının

$$\frac{1}{\sqrt{3\ 4\ \pi}}$$

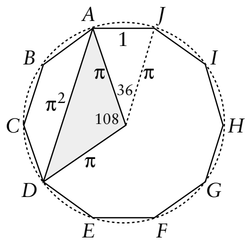
alanının ise

$$\frac{\sqrt{14\pi\ 2\ 13}}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

6. Bir düzgün beşgenin alanı, köşegenlerinin oluşturduğu düzgün beşgenin alanının π^4 katı olduğunu kanıtlayınız.

Bir soru da TÜBİTAK'tan: *Bir düzgün ongenin bir kenar uzunluğuyla çevrel çember yarıçapının uzunluğunun toplamının en kısa ikinci köşegenin uzunluğuna eşit olduğunu gösteriniz.*



Çözüm: Metindeki ongen şeklinden izleyin. Bir kenar uzunluğu a, en kısa ikinci köşegen uzunluğu b, çevrel çember yarıçapı R olsun. a = 1 ise b = π^2 ve R = π'dir. Öte yandan π^2 = π + 1 olduğundan b = a + R. ♦

Altın Oran ve Birkaç Trigonometrik Formül

$\pi \mid \frac{1\,2\,\sqrt{5}}{2}$ ve $\ldots\mid \frac{1\,4\,\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere

$$\sin 9\,\forall\mid \frac{\sqrt{2\,4\,\sqrt{2\,2\,\pi}}}{2}$$

$$\sin 18\,\forall\mid \frac{\sqrt{2\,4\,\sqrt{2\,2\,\ldots}}}{2} \mid \frac{\sqrt{2\,4\,\pi}}{2}$$

$$\sin 27\,\forall\mid \frac{\sqrt{2\,4\,\sqrt{2\,4\,\ldots}}}{2}$$

$$\sin 36\,\forall\mid \frac{\sqrt{2\,4\,\sqrt{2\,4\,\pi}}}{2} \mid \frac{\sqrt{2\,4\,\ldots}}{2} \mid \frac{\pi}{2}$$

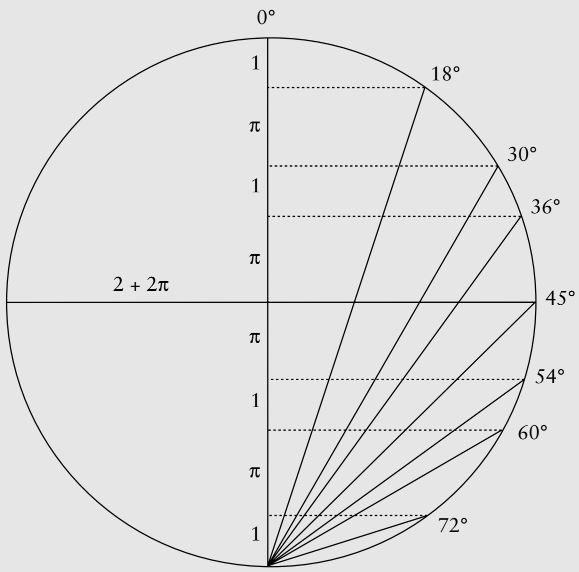
$$\sin 54\,\forall\mid \frac{\sqrt{2\,2\,\sqrt{2\,4\,\pi}}}{2} \mid \frac{\sqrt{2\,2\,\ldots}}{2}$$

$$\sin 63\,\forall\mid \frac{\sqrt{2\,2\,\sqrt{2\,4\,\ldots}}}{2}$$

$$\sin 72\,\forall\mid \frac{\sqrt{2\,2\,\sqrt{2\,2\,\ldots}}}{2} \mid \frac{\sqrt{2\,2\,\pi}}{2} \mid \frac{\ldots}{2}$$

$$\sin 81\,\forall\mid \frac{\sqrt{2\,2\,\sqrt{2\,2\,\pi}}}{2}$$

\#

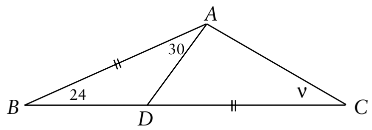


Deniz'e Benden de Bir Mektup Var!

Sevgili Deniz,

Soruna [MD-200x-xx, sayfa xx] kâğıt kalem oynatmadan şekle bakar bakmaz yanıtlayabileceğin bir yöntem buldum. Yalnız anlaman için bir sonraki teoremi belki de bu yazının tamamını okuman lazım. Önce sorunu anımsayalım:

Soru. *Aşağıdaki şekilde AB = DC, m(ABC) =* 24° *ve m(BAD) =* 30° *ise m(ACB) kaçtır?*

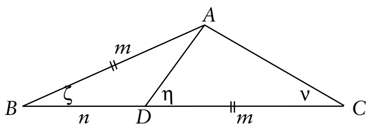


Sadece bu soruyu değil, buna benzer birsürü soruyu daha yanıtlayan bir yöntem göstereceğim. Önce bir teorem kanıtlayalım:

Yedi Soruluk Teorem. *ABC üçgeninin BC kenarı üzerinde AB = DC olacak şekilde bir D noktası alınsın. m(ABC) = ζ ve m(BAD) = η iken*

$$\pi = \sin \eta \,/\, \sin(\eta \# 4 \# \zeta)$$

ise m(ACB) = ν = η.



Kanıt: $AB = DC = m$ ve $BD = n$ olsun. ABD üçgeninde sinüs teoremi gereğince,

$$m/n = \sin \eta \,/\, \sin(\eta \# 4 \# \zeta)$$

olur ki verilene göre $m/n = \pi$ olduğunu anlarız. Şimdi $\pi^2 - \pi - 1 = 0$ eşitliğinden,

$$(m/n)^2 \; 4 \; m/n \; 4 \; 1 = 0$$

denklemine ulaşırız. Düzenlersek, $m^2 - mn - n^2 = 0$, yani $m^2 = mn + n^2 = n(m + n)$ olur. Bu eşitliği $m/n = (m+n)/m$ orantısına dönüştürelim, yani

$$AB/BD = BC/AB.$$

Bu ve $m(ABD) = m(CBA)$ eşitliğinden, ABD ve CBA üçgenlerinin K-A-K gereğince benzer olduğunu anlarız. O halde $m(BAD) = m(BCA)$ olmalı, yani $\nu = \eta$. □

Sorunun Yanıtı:

sin ADC/sin BAD = sin 54°/sin 30° = π olduğundan $m(ACB) = m(BAD) = 30°$. Sorun yanıtlanmıştır!

Bizi buna sürükleyen

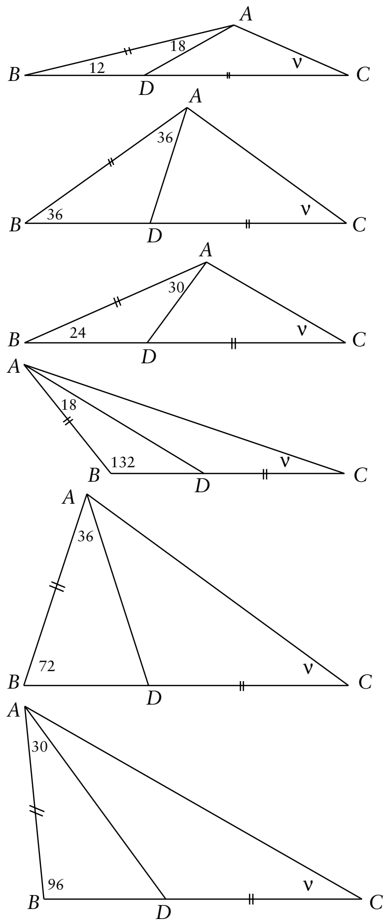
$$\pi \mid \frac{\sin\eta}{\sin(\eta 4 \zeta)}$$

eşitliği oldu. O halde sinüslerinin oranı π'ye eşit olan her iki açı için böyle bir soru sorulabilir. Aynen sayfa xx'in sonunda yaptığımız gibi,

$$\pi \mid \frac{\sin 30}{\sin 18} \mid \frac{\sin 150}{\sin 18} \mid \frac{\sin 72}{\sin 36} \mid \frac{\sin 108}{\sin 36}$$

$$\# \mid \frac{\sin 54}{\sin 30} \mid \frac{\sin 126}{\sin 30}$$

eşitliklerini kolaylıkla buluruz. Bu eşitliklerin paydalarındaki açıları η, paylarındaki açıları da η#4#ζ gibi düşünürsek,



sorularının tümü bu yöntemle çözülebilir. Hepsinde ν = $m(BAD)$ olur. Anlayacağın teoremimiz altı soruluk. Çünkü ben bu eşitlikleri sağlayan ve her ikisi de tamsayı olan ancak 6 çift bulabildim. Belki daha vardır, kimbilir?

Teoremin akla getirdiği yedinci soru da bu!

Mustafa Yağcı