



Doğuş Üniversitesi Matematik Kulübü

Matematik Bireysel Yarışması 2005

Soru ve Yanıtlar

1. Maliyeti üzerinden yüzde 25 kârla satılan bir malın satış fiyatından yüzde onluk bir indirim yapılırsa yüzde kaç kâr edilmiş olur?

Çözüm: Bu malın maliyetinin 100 YTL olduğunu düşünelim, yüzde 25 kârla bu mal 125 YTL'ye satılacaktır. Bu fiyat üzerinden yüzde 10 indirim yapıldığında, mal 12,5 YTL indirimle $125 - 12,5 = 112,5$ YTL'ye satılacaktır. Böylece % 12,5 kar edilmiş olur.

2. Hangi $x \geq 0$ tamsayıları için

$$\frac{x^2 - x + 4}{x + 1}$$

kesrinin değeri bir tamsayı olur?

Çözüm: Denklemden,

$$\frac{x^2 - x + 4}{x + 1} = x - 2 + \frac{6}{x + 1}$$

elde edilir. Bu durumda aranan pozitif tamsayı değerleri $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ ve $x = 5$ olur.

3. Bir odanın boyutları 8, 15 ve 17 birim olarak veriliyor. Odanın birbirine en uzak iki noktası arasındaki uzaklık kaç birimdir?

Çözüm: Pisagor Teoremi'ni iki kez uygularsak,

$$\begin{aligned} \sqrt{(8)^2 + (15)^2} + (17)^2 &= \sqrt{64 + 225 + 289} \\ &= \sqrt{2 \times 289} = 17\sqrt{2} \end{aligned}$$

buluruz.

4. $\sin 7620^\circ$ değeri nedir?

Çözüm: $\sin 7620^\circ = \sin(21 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$.

5. Hacmi yüzölçümüne (sayıca) eşit olan kürenin yarıçapı nedir?

Çözüm: Hacim $4\pi r^3/3$ ve yüzölçümü $4\pi r^2$ olduğundan, $4\pi r^3/3 = 4\pi r^2$ ve buradan da $r = 3$ bulunur.

6. $P(x)$ polinomu $x - 1$ 'e bölünebilmekte ve $P(x - 2)$ polinomunun katsayılar toplamı -4 olarak verilmektedir. $P(x)$ polinomunun $x^2 - 1$ ile bölümünden kalan ne olur?

Çözüm: Verilenlerden, bir $Q(X)$ polinomu için, $P(x) = (x - 1)Q(x)$ ve

$$-4 = P(1 - 2) = P(-1) = -2Q(1)$$

bulunur. Böylece $Q(-1) = 2$ elde edilir. O halde bir $R(X)$ polinomu için, $Q(x) = (x + 1)R(x) + 2$ şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)Q(x) = (x - 1)[(x + 1)R(x) + 2] \\ &= (x^2 - 1)R(x) + 2(x - 1) \end{aligned}$$

çıkar. Kalan $2(x - 1)$ 'dir.

7. Tersten okunuşu kendisine eşit olan 101, 2332, 55555 gibi sayılara *palindrom* denir. Dokuz basamaklı kaç palindrom vardır?

Çözüm: İstenilen özelliklere sahip 9 rakamlı sayı ilk 5 rakamı tarafından belirlenir. İlk rakam için 9 seçenek, ilk rakamdan sonra gelen 4 rakamın her biri için 10 seçenek vardır. Böylece $9 \times 10^4 = 90.000$ tane 9 basamaklı palindrom sayı vardır.

8. Rakamlarının çarpımı 5'e bölünebilen kaç tane üç basamaklı sayı vardır?

Çözüm: Üç basamaklı 900 sayı vardır. Bunlardan $8 \times 8 \times 8 = 512$ tanesinde sıfır ya da beş rakamı bulunmaz. Demek ki istenilen sayı $900 - 512 = 388$.

9. Hangi k gerçel sayıları için

$$\sqrt{k - 13} \text{ ve } \sqrt{k + 62}$$

sayıları tamsayı olur?

Çözüm: a ve b pozitif tamsayılar olmak üzere

$$\sqrt{k - 13} = a \text{ ve } \sqrt{k + 62} = b$$

olsun. Buradan $k = a^2 + 13 = b^2 - 62$ çıkar. Böylece $b^2 - a^2 = 75$ olacağından, $(b - a)(b + a) = 75$ eşitliğinde 75 sayısını çarpanlarına ayırarak 1×75 , 3×25 ve 5×15 ayrışımından a için 37, 11, 5 ve k için 1382, 134 ve 38 bulunur.

10. $\log_{2n} 216 = \log_n (27\sqrt{2})$ ise n^5 nedir?

Çözüm: $\log_{2n}(216) = \log_n(27\sqrt{2}) = a$ eşitliklerinden $216 = (2n)^a$ ve $27\sqrt{2} = n^a$ bulunur. Bu iki eşitlik kullanılarak da $2^a = 216/(27\sqrt{2}) = 2^{5/2}$ elde edilir. Bulunan $a = 5/2$ değeri yerine konulduğunda $27\sqrt{2} = n^{5/2}$, buradan da $n^5 = 2 \times 3^6$ bulunur.

11. $6xy + 4x - 3y = 35$ denklemini sağlayan tüm x, y tamsayılarını bulunuz.

Çözüm: Denklem $6xy + 4x = 35 + 3y$ şeklinde yazıldığında, eşitliğin sol tarafı çift sayı olacağından y tek sayı olmalıdır. $y = 2n + 1$ alalım, o halde $6x(2n + 1) + 4x = 38 + 6n$, buradan da

$$x = \frac{3n+19}{6n+5} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{33}{6n+5} \right)$$

bulunur. Böylece x 'in tamsayı olmasını sağlayan n değerleri $n = 1$ ve $n = -1$ olur. $n = 1$ için $x = 2$ ve $y = 3$ bulunur; $n = -1$ için ise $x = -16$ ve $y = -1$ bulunur.

12. $a + b + c = 24$, $a^2 + b^2 + c^2 = 210$ ve $abc = 440$ eşitliklerini sağlayan a, b, c tamsayılarını kök kabul eden üçüncü dereceden polinom nedir?

Çözüm: $ab + bc + ca$ simetrik terimini değerini bilinen simetrik terimler cinsinden yazıp hesaplayalım:

$ab + bc + ca = ((a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2))/2 = 183$. a, b, c sayıları $x^3 - 24x^2 + 183x - 440$ polinomunun kökleridir.

13. Aşağıdaki sistemde

$$x + 2y - z = 5$$

$$3x + 2y + z = 11$$

$$(x + 2y)^2 - z^2 = 15$$

x 'in değeri nedir?

Çözüm: Üçüncü eşitliği çarpanlarına ayıralım:

$$(x + 2y - z)(x + 2y + z) = 15$$

buluruz. Ayrıca bir de birinci eşitliği kullandığımızda $x + 2y + z = 3$ buluruz. Bu ve ikinci eşitlik $x = 4$ verir.

14. x ve y sayılarının

$$x^2 + y^2 = 7 \text{ ve } x^3 + y^3 = 10$$

eşitliklerini sağladığı bilindiğine göre, $x + y$ toplamının alabileceği en büyük değeri nedir?

Çözüm: $(x + y)^3$ terimini olabildiğince değerleri bilinen $x^2 + y^2$ ve $x^3 + y^3$ terimleri cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \\ &= 10 + 3(x + y)[(x+y)^2 - x^2 - y^2]/2 \\ &= 10 + 3(x + y)[(x+y)^2 - 7]/2. \end{aligned}$$

Eğer $u = x + y$ dersek, yukardaki eşitlik bize

$$u^3 - 21u + 20 = 0$$

denklemini verir. Bu denklemin kökleri de $-5, 1, 4$ olarak bulunur. Demek ki $u = x + y$ 'nin alabileceği en büyük değer 4 'tür.

15. $A627B$ beş basamaklı sayısı 56 'ya bölündüğünde kalan 4 ise $A + B$ kaçtır?

Çözüm: Verilenden,

$$A627B = 10^4A + 6270 + B \equiv 4 \pmod{56}$$

bulunur. Ama

$$10^4 \equiv 32 \pmod{56} \text{ ve } 6270 \equiv -2 \pmod{56}$$

olduğundan $32A + B \equiv 6 \pmod{56}$, yani bir k tamsayısı için $32A + B = 56k + 6$ çıkar. Buradan,

$$B \equiv 6 \pmod{8}$$

ve $B = 6$ çıkar. Demek ki $32A = 56k, 4A = 7k, A = 7$ bulunur. Dolayısıyla $A + B = 6 + 7 = 13$.

16. $6\cos^2 x - 3\cos 2x + \cos 3x = 3$ eşitliğinin $[0, \pi]$ aralığındaki çözümünü bulunuz.

Çözüm: Yarım açılı formülü kullanılarak $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ değerini yerine yazdığımızda $\cos 3x = 0$ eşitliği elde edilir. Buradan da $x = (2k + 1)\pi/6$ bulunur. $[0, \pi]$ aralığında çözüm istendiğinden, çözüm kümesi $\{\pi/2, \pi/6, 5\pi/6\}$ olur.

17. a, b pozitif tamsayıları $2a^2 = 3b^3$ eşitliğini sağlıyorsa en küçük $a + b$ değeri nedir?

Çözüm: En küçük çözüm $a = 2^x 3^y$ ve $b = 2^u 3^v$ şeklinde yazılabilmeli. Bu değerler eşitlikte yerine konulduğunda $2^{2x+1-3u} = 2^{3v+1-2y}$ elde edilir; buradan da $3u = 2x + 1$ ve $2y = 3v + 1$ eşitlikleri bulunur. Aranılan toplamın en küçük değeri de $x = 1, y = 2, u = 1, v = 1$ için bulunur ve toplam $a + b = 18 + 6 = 24$ olur.

18. 6 kişilik bir grupta, herkes, kendi dışındaki 5 kişinin yaşlarını toplarsa bu toplamın oluştuğu küme $\{78, 79, 80, 81, 82\}$ oluyor. Bu grupta aynı yaşta olan iki kişinin yaşları kaçtır?

Çözüm: Gruptaki kişilerin yaşlarına $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ diyelim. a_6 diğerlerinden birine eşit olsun. Eğer

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

ve

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

diyecek olursak

$$a - a_1 = 78,$$

$$a - a_2 = 79,$$

$$a - a_3 = 80,$$

$$a - a_4 = 81,$$

$$a - a_5 = 82,$$

$$a - a_6 = A$$

eşitliklerinden

$$6a - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) = 5a = 400 + A$$

çıkar. Demek ki $A, 5^5$ e bölünür.

$$A \in \{78, 79, 80, 81, 82\}$$

olduğundan $A = 80$ ve dolayısıyla $a = 480/5 = 96$ ve $a_6 = 96 - 80 = 16$ olur.

19. x_1 ve x_2 sayıları $ax^2 + bx - a = 0$ denkleminin kökleridir. Kökleri $ax_1 + b$ ve $ax_2 + b$ olan ikinci dereceden denklem nedir?

Çözüm: $x_1 + x_2 = -b/a$ ve $x_1x_2 = -1$ olduğundan
 $(ax_1 + b)(ax_2 + b) = a^2x_1x_2 + ab(x_1 + x_2) + b^2 = -a^2 + b^2$
 olur. Böylece aranan ikinci dereceden denklem

$$(ax_1 + b) + (ax_2 + b) = a(-b/a) + 2b = b$$

$$x^2 - bx - a^2 = 0$$

bulunur.

20. Üç pozitif tamsayımın çarpımları toplamının 6 katıdır ve bu çarpım N sayısına eşittir. Bu sayılardan biri diğer ikisinin toplamına eşitse bütün olası N değerlerinin toplamı nedir?

Çözüm: Sayılar $x, y, x + y$ olsun. O halde
 $xy(x + y) = N = 12(x + y)$
 olmalıdır. Böylece $xy = 12$ bulunur, buradan da aranan üçlüler $(x, y, x + y) = (1, 12, 13), (2, 6, 8)$ ya da $(3, 4, 7)$ olur. Dolayısıyla $N = xyz = 156, 96$ ya da 84 ve toplam olarak $156 + 96 + 84 = 336$ bulunur.

21. $P(7, 12, 10), Q(8, 8, 1)$ ve $R(11, 3, 9)$ noktaları bir kübün köşeleriye, bu kübün yüzel alanı nedir?

Çözüm: Noktalar arasındaki uzunluklara bakıldığında $|PQ| = |QR| = |PR| = \sqrt{98}$ bulunur. Eğer kübün bir kenarının uzunluğu a ise, kübün köşeleri bir eşkenar üçgen oluşturacağından $a\sqrt{2} = \sqrt{98}$, buradan $a = 7$, böylece de yüzey alan $6a^2 = 294$ olur.

22. $(1 - 1/2^2)(1 - 1/3^2) \dots (1 - 1/n^2) = 51/101$ ise n kaçtır?

Çözüm: Soldaki toplamı hesaplayalım. Sadeleştirmeyle,

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right) \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-2) \cdot (n) \cdot (n-1) \cdot (n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \dots (n-1)^2 \cdot n^2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da $n = 101$ çıkar.

23. $0 < a < b < c < d$ tamsayıları için a, b, c aritmetik dizi ve b, c, d geometrik dizi oluşturuyor. $d - a = 30$ olduğuna göre $a + b + c + d$ 'yi bulun.

Çözüm: Verilenlerden sayılar,

$$a = b - r, c = b + r \text{ ve } bd = c^2$$

olduğundan $(b + r)^2 = b(30 + b - r)$ eşitliği sağlanır. Böylece $r^2 = 3b(10 - r)$ bulunur. Son eşitlikte hem r 'nin hem de b 'nin 3'ün katı olduğu görülür. Tek çözüm olarak $r = 9, b = 27$ çıkar. Yanıt: $18 + 27 + 36 + 48 = 129$ 'dur.

24. x ve y sayı tabanı olmak üzere

$$\sqrt[3]{(1331)_x} + \sqrt[4]{(14641)_y} = 16$$

olduğuna göre, bu eşitliği sağlayan (x, y) pozitif tamsayı ikilileri nelerdir?

Çözüm: Sayı tabanının tanımından dolayı

$$(1331)_x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

ve

$$(14641)_y = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = (y + 1)^4$$

olduğundan

$$\sqrt[3]{(1331)_x} + \sqrt[4]{(14641)_y} = x + 1 + y + 1 = 16$$

yani $x + y = 14$ eşitliğini elde ederiz. $x > 3$ ve $y > 6$ olması gerektiğinden, aranan ikililer $(4, 10), (5, 9), (6, 8), (7, 7)$ olarak bulunur.

25. 2000 basamaklı

$$x = \underbrace{111\dots 1}_{1000 \text{ tane}} \underbrace{555\dots 5}_{999 \text{ tane}} 6$$

sayısı için \sqrt{x} kaç basamaklıdır?

Çözüm: Yazması kolay olsun diye $1000 = n$ tanımını yapıp hesaplayalım:

$$\begin{aligned} x &= 6 + 5(10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}) \\ &\quad + (10^n + 10^{n+1} + \dots + 10^{2n-1}) \\ &= 1 + 5(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}) \\ &\quad + 10^n(1 + 10 + \dots + 10^{n-1})(10^n + 10^{n+1} + \dots + 10^{n-1}) \\ &= 1 + 5(10^n - 1)/9 + 10^n(10^n - 1)/9 \\ &= (10^n + 2)^2/9. \end{aligned}$$

Buradan da $\sqrt{x} = (10^n + 2)/3$ elde edilir. böylece \sqrt{x} sayısının $n = 1000$ basamaklı olduğu görülür.

$$26. \left[\left[\left[\left[\left[(7^7)^7 \right]^7 \right]^7 \right]^7 \right]^7 \right]^7 \text{ yazılışında } 2005$$

tane 7 kullanılmıştır. Buna göre işlemin sonucunun birler basamağı kaçtır?

Çözüm: 7'nin güçlerini modülo 10 hesaplayalım:

$$7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{10},$$

$$(7^2)^3 \times 7 = 7^7 \equiv -7 \pmod{10},$$

$$(7^7)^7 = (7)^7 = 7^7 \equiv 7 \pmod{10}.$$

O halde verilen ifadede ki 7 sayısı tekse, işlemin sonucunun birler basamağı 7, çiftse -7 olur. İfadede 2005 tane 7 olduğundan sonuç 7^7 dir.

27. $x^2 - 10x - 14 = 2\sqrt{x^2 - 10x + 1}$ eşitliğini sağlayan tüm x gerçel sayılarının toplamı kaçtır?

Çözüm: $a = x^2 - 10x + 1$ diyelim. Bu durumda $a - 15 = 2\sqrt{a}$. Buradan da

$$a^2 - 34a + 225 = 0$$

bulunur. Son denklemin kökleri olan $a = 25$ ve $a = 9$ değerleri $a = x^2 - 10x + 1$ denkleminde yerine konduğunda

$$x^2 - 10x - 24 = 0 \text{ ve } x^2 - 10x - 8 = 0$$

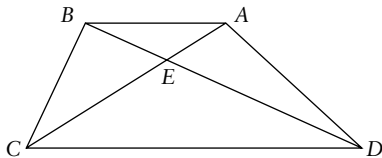
elde edilir. Kolayca görüleceği üzere, birinci denklemden elde edilen kökler soruda verilen denklemi sağlarlar. (Sol taraf 10^7 'a eşittir örneğin.) İkindiden gelen kökler için ise $x^2 - 10x = 8$ olacağından, verilen denklemde yerine konduğunda $8 - 14 = 2\sqrt{9}$ bulunacağından bunlar alınmayacaktır. İstenilen toplam birincinin kökler toplamı olan 10^7 dur.

28) $4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - (x^2 + y^2 + z^2)^2$ çok değişkenli polinomunu birinci dereceden çarpanlara ayırınız.

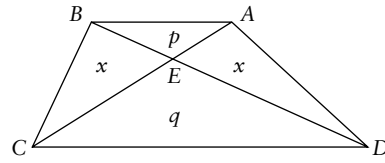
Çözüm: Doğrudan hesap yapalım:

$$\begin{aligned} & 4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 \\ &= 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - (x^4 + y^4 + z^4) \\ &= 2x^2(y^2 + z^2) + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4 \\ &= 2y^2z^2 - (x^2 - (y^2 + z^2))^2 + (y^2 + z^2)^2 - y^4 - z^4 \\ &= 4y^2z^2 - (x^2 - (y^2 + z^2))^2 \\ &= (2yz - x^2 + y^2 + z^2)(2yz + x^2 - y^2 - z^2) \\ &= ((y + z)^2 - x^2)(x^2 - (y - z)^2) \\ &= (y + z - x)(y + z + x)(x - y + z)(x + y - z). \end{aligned}$$

29) ABCD bir yamuk, ($AB \parallel CD$), köşegenlerin kesiştiği nokta E, $A(ABCD) = 25 \text{ br}^2$ ve $A(AEB) = A(DEC) = 5 \text{ br}^2$ ise $A(BEC)$ kaç birim karedir?



Çözüm: p, q ve x aşağıdaki resimde gösterilen alanlar olsun. $A(ADB) = A(ABC)$ olduğundan $A(ADE) = A(BCE) = x$ olur. Ayrıca, ABE ve BCE üçgenlerinin B'den yükseklikleri aynı olduğundan,

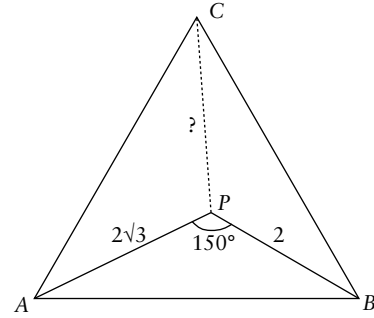


$x/p = |AE|/|EC| = q/x$, bundan da bilinen $x^2 = pq$ ve $A(ABCD) = (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2$ sonuçları çıkar. Demek ki $\sqrt{q} + \sqrt{p} = \sqrt{25} = 5$ ve $q - p = (\sqrt{q})^2 - (\sqrt{p})^2 = 5$ den $\sqrt{q} = 3$ ve $\sqrt{p} = 2$ ve $x = \sqrt{pq}$ bulunur.

30. Aşağıdaki şekilde ABC bir eşkenar üçgen, $m(APB) = 150^\circ$, $|AP| = 2\sqrt{3}$ br., $|BP| = 2$ br. Bu verilere göre $|PC|$ kaç birimdir?

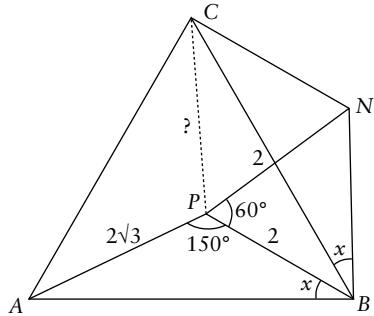
Çözüm:

Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi $m(BPN) = 60^\circ$ ve $|PN| = 2$ olacak biçimde BC'nin P'nin bulunduğu tarafta değil de diğer tarafında bir

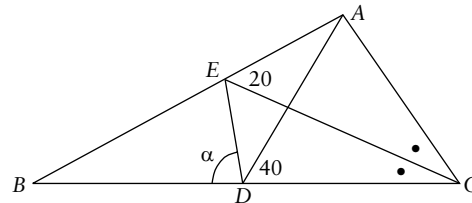


N noktası bulalım. BPN ikizkenar olduğundan ve $m(BPN) = 60^\circ$ olduğundan, BPN aslında eşkenar bir üçgendir. Dolayısıyla $m(PBN) = 60^\circ$. Bundan da $m(CBN) = m(PBN) - m(PBC) = 60^\circ - m(PBC) = m(ABC) - m(PBC) = m(ABP)$ çıkar. Bu açıya x diyelim. Şekilde

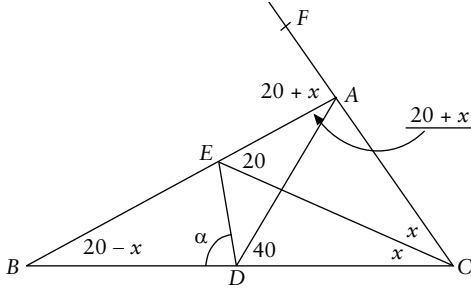
görüldüğü gibi K.A.K teoremi uyarınca APB ve CNB üçgenleri eş üçgenlerdir. O zaman $m(CNB) = 150^\circ$ ve $|NC| = 2\sqrt{3}$ 'tür. O halde $m(CNP) = 90^\circ$ olur ve Pisagor bağıntısından $|PC| = 4$ br bulunur.



31. Aşağıdaki şekilde ABC üçgeninde [CE] açıortay, $m(ADC) = 40^\circ$, $m(CEA) = 20^\circ$. Bu verilere göre $m(EDB) = \alpha$ kaç derecedir?

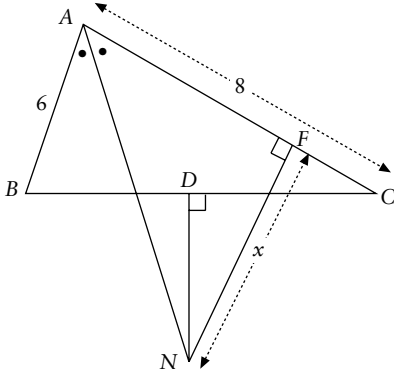


Çözüm: ABC üçgeninde $[CE]$ açıortay ve $m(ECA) = m(BCE) = x$ dersek, $m(EAF) = 20 + x$, $m(EBC) = 20 - x$ ve $m(BAD) = 20 + x$ olur. Sonuç olarak $[BA]$, ADC 'nin dış açıortayı, $[CE]$ ise iç açı-

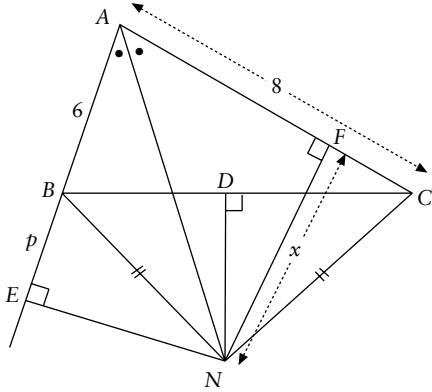


ortayıdır. Bunlar E noktasında kesiştiklerinden, $[ED]$, ADC 'nin dış açıortayı olur. Buna göre $\alpha = (180^\circ - 40^\circ)/2 = 70^\circ$ bulunur.

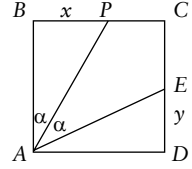
32. Aşağıdaki şekilde $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 8$ cm, $|BD| = |DC|$, $[AN]$ açıortay, $[ND] \perp [BC]$, $[NF] \perp [AC]$. Bu verilere göre $|AF| = x$ kaç cm'dir?



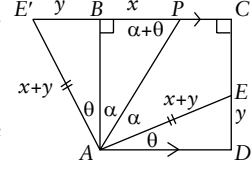
Çözüm: Aşağıdaki şekildeki gibi $[NE] \perp [AB]$ olsun. A.K.A eşlik teoreminden dolayı $AEN \approx AFN$ olduğundan, $|AE| = |AF| = x$ ve $|EN| = |FN|$ 'dir. Ayrıca $[DN]$ orta dikme olduğundan $|NB| = |NC|$ 'dir. Pisagor teoremi uyarınca $p = |BE| = |FC|$ bulunur. Buradan da $x = 6 + p$ çıkar ve $x + p = 8$ eşitliğinden $|AF| = x = 7$ bulunur.



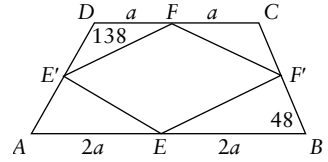
33. ABCD karesinde $P \in [BC]$, $E \in CD$, $m(BAP) = m(PAE) = \alpha$, $|PB| = x$, $|DE| = y$. Bu verilere göre $|AE|$ 'nin x ve y cinsinden değeri nedir?



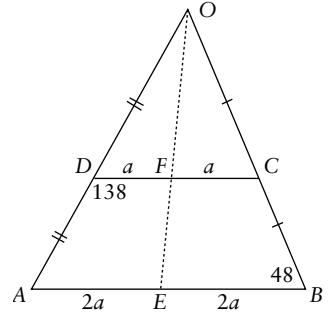
Çözüm: $\theta = m(EAD)$ olsun. ADE üçgenini A noktası etrafında pozitif yönde $2\alpha + \theta$ yani 90° döndürürsek E 'nin gideceği E' noktası için $m(E'AP) = m(E'PA) = \alpha + \theta$ olur ve bundan da $x + y = |E'P| = |E'A| = |AE|$ çıkar.



34. Aşağıdaki şekilde $ABCD$ bir yamuk, $AB \parallel CD$, $m(B) = 48^\circ$, $m(D) = 138^\circ$, $|AB| = 2|DC| = 4a$, $|AE| = |EB|$, $|DF| = |FC|$. Eğer E' ile F' sırasıyla $[AD]$ ve $[BC]$ 'nin orta noktalarıysa $E'EF'F'$ paralelkenarının kenarlarının karelerinin toplamı kaçtır?

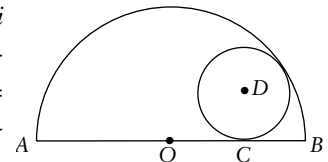


Çözüm: AD ve BC doğrularını uzatıp O 'da kesiştirelim. $m(A) = 42^\circ$ olduğundan, $m(AOB) = 90^\circ$ olur. $|DC| = |AB|/2$ olduğundan D ve C orta noktalar olacaktır. Ayrıca OFE doğrusaldır ve $DF = FC$ olduğundan, $|OF| = a$, $|OE| = 2a$ çıkar. $[AD]$ 'nin E' ve $[BC]$ 'nin F' orta noktaları içinse $E'F'FE'$

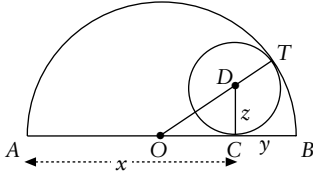


bir paralel kenar olup köşegen uzunlukları $e = |E'F'| = (2a + 4a)/2 = 3a$, $f = |EF| = a$ olduğundan, kenarlarının karelerinin toplamı $|EF'|^2 + |F'F|^2 + |FE'|^2 + |E'E|^2 = 2(|EF'|^2 + |F'F|^2) = e^2 + f^2 = 10a^2$ bulunur.

35. Aşağıdaki şekilde D merkezli z yarıçaplı çember AB doğrusuna ve O merkezli $[AB]$ çaplı çembere teğettir. $|AC| = x$, $|CB| = y$ ise x , y ve z arasındaki bağıntıyı yazınız.



Çözüm 35: OD 'yi uzatalım ve çembere D tarafında kestiği noktaya T diyelim. Ayrıca $|AC| = x$,



$|CB| = y$ ve $|DC| = z$ olsun. Demek ki

$$|OB| = (x + y)/2,$$

$$|OC| = (x - y)/2.$$

Teğet çemberlerde O, D, T doğrusal olduğundan,

$$|OD| = (x + y)/2 - z,$$

$$|OC| = (x + y)/2 - y = (x - y)/2$$

olacaktır. Tüm bunlardan ve $|OD|^2 = |DC|^2 + |OC|^2$ bağıntısından,

$$((x + y)/2 - z)^2 = z^2 + (x - y)^2/4$$

elde edilir. Demek ki $z(x + y) = xy$ ve $1/z = 1/x + 1/y$.

36. Üç basamaklı ve 5'e kalansız bölünen tüm pozitif tek tamsayıların toplamını bulunuz.

Çözüm: Aranılan sayılar, (AB) iki basamaklı olmak üzere $(AB5)$ biçimindedir. (AB) 'lerin toplamı $99 \times 100/2 - 9 \times 10/2 = 4.905$ ve 5'lerin toplamı $90 \times 5 = 450$ olduğundan sonuç $49.050 + 450 = 49.500$ 'dir.

37. x, y, z gerçel sayılar olmak üzere

$$2x^2 + 5y^2 + 10z^2 - 2xy - 4yz - 6zx + 3$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Çözüm: Verilen ifade

$$(x - y)^2 + (x - 3z)^2 + (2y - z)^2 + 3$$

şeklinde yazılabilir. Bütün x, y, z değerleri için

$$(x - y)^2 + (x - 3z)^2 + (2y - z)^2 + 3 \geq 3$$

olduğundan istenilen en küçük değer, $x = y = z = 0$ için, 3 olarak bulunur.

38. $49/18$ kesri ondalık sayma düzeninde $(x)_6$ yazıldığında x ne olur?

Çözüm: $49/18 = 98/36 = (2 \times 6^2 + 4 \times 6 + 2)/6^2 = 2 + 4/6 + 2/6^2$ olduğundan, $49/18 = (2,42)_6$ bulunur.

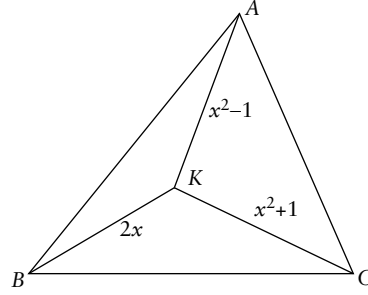
39. Kenarları $\sqrt{13}, 2\sqrt{5}, 2\sqrt{13}$ ve $3\sqrt{5}$ birim olan bir kirişler dörtgeninin çevrel çemberinin yarıçapı kaç birimdir?

Çözüm:

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}}$$

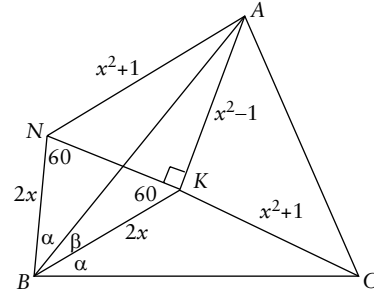
formülünden $R = \sqrt{65}/2$ bulunur.

40. Aşağıdaki şekilde, ABC eşkenar üçgen, $|AK| = x^2 - 1$ br., $|KB| = 2x$ br., $|KC| = x^2 + 1$ br. Bu verilere göre $m(\angle AKB)$ kaç derecedir?



Çözüm: $(x^2 - 1)^2 + (2x)^2 = (x^2 + 1)^2$ eşitliğini kullanacağız.

$\alpha = m(\angle KBC)$ ve $\beta = m(\angle ABK)$ diyebiliriz $\alpha + \beta = 60^\circ$ olur. B köşesinden $|BN| = 2x$ ve $m(\angle ABN) = \alpha$ olacak şekilde $[NB]$ çizelim. Bu durumda BNK eşkenar üçgen olur ve $|NK| = 2x$ br olur. ABC eş-



kenar üçgen olduğuna göre K.A.K teoreminden KBC ve NBA üçgenleri eş üçgenlerdir. O halde $|AN| = |KC| = x^2 + 1$ 'dir. $(x^2 - 1)^2 + (2x)^2 = (x^2 + 1)^2$ eşitliğinden dolayı ANK üçgeninde Pisagor bağıntısı geçerlidir, yani ANK diküçgendir ve $m(\angle AKN) = 90^\circ$ 'dir. Dolayısıyla $m(\angle AKB) = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ 'dir. ♥

