Problemler ve Çözümleri

Refail Alizade*
rafailalizade@iyte.edu.tr

Bu, bir yıl sürecek bir yarışmadır. Grup halinde, okul olarak ya da bireysel olarak katılabilirsiniz.

Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Ayrıca lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

Her sorunun çözümünü ayrı bir kâğıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenciyseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla İzmir adresine 15.1.2006 tarihine kadar adıma gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A321. $x^4 - 2y^2 = 1$ denklemini sağlayan tüm (x, y) tamsayı çiftlerini bulunuz.

A322. $ABCD$ dışbükey dörtgeninde BC ve CD kenarlarının orta noktaları sırasıyla E ve F'dir. AE, AF ve EF doğruları dörtgeni, alanları dört ardışık pozitif tamsayıya eşit olan dört üçgene böler. ABD üçgeninin alanı en fazla kaç olabilir?

A323. Satranç tahtasının bir hanesinde beyaz, başka bir hanesinde de siyah bir dama bulunur. Her adımda damalardan biri komşu hanelerden (ortak kenarı bulunan hanelere ***komşu haneler*** denir) birine götürülebilir. Damalardan ikisi de aynı anda aynı hanede bulunamaz. Bu adımlarla damaların bütün yerleşme durumları, her biri birer kez olmak üzere elde edilebilir mi?

A324. $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ve $Q(x) = x^2 + px + q$ polinomları, uzunluğu 2'den büyük olan bir I aralığının içerisinde negatif, dışarısında da pozitif değerler alıyor. $P(x_0) < Q(x_0)$ olacak şekilde bir x_0 gerçel sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

A325. Temel tahtaya 5 basamaklı bir A pozitif tamsayısı yazıyor ve bir n pozitif tamsayısını söylüyor. İdris ve Dursun sırayla aşağıdaki şekilde yeni sayılar oluşturuyorlar. İdris son yazılan sayıya bu sayının rakamlarından birini ekleyerek, Dursun da son yazılan sayıdan bu sayının rakamlarından birini çıkararak yeni sayı elde ediyor. n hamleden sonra tahtadaki n sayıdan en az 2005'i birbirine eşitse İdris ve Dursun, Temel'e 2005'er YTL ödüyor, tahta üzerinde 2005 aynı sayı bulunmazsa Temel, İdris ve Dursun'a 2005'er YTL ödüyor. Herkes en iyi şekilde oynarsa kim kazanır?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y321. p asal sayısı, n ve m negatif olmayan tamsayılar olmak üzere $p^2 = 2^n \cdot 3^m + 1$ eşitliğini sağlar. p en fazla kaç olabilir?

Y322. Bir dışbükey dörtgenin karşı kenarlarının uzantıları K ve L noktalarında kesişiyorlar. Dörtgenin köşegenlerinin O kesişim noktasından geçen ve KL'ye paralel olan doğrunun dörtgenin içerisinde kalan parçasının orta noktasının O olduğunu kanıtlayınız.

Y323. Birinde 51, ikincisinde 49 ve üçüncüsünde 5 bilye bulunan üç küme verilmiştir. Her hamlede birkaç kümedeki bilyeler bir kümeye birleştirilebilir veya çift sayıda bilye bulunan bir küme eşit sayıda bilye içeren iki kümeye bölünebilir. Bu işlemlerle her birinde birer bilye bulunan 105 küme elde edilebilir mi?

Y324. $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomunun üç gerçel kökü bulunur; $Q(x) = x^2 + 2x + 2005$ olmak üzere $P(Q(x))$ polinomunun gerçel kökleri yok. $P(2005) > 1$ olduğunu kanıtlayınız.

Y325. Ardışık olmayan iki a ve b pozitif tamsayıları sırasıyla $b^2 - 1$ ve $a^2 - 1$ sayılarını bölerse, a ve b sayılarına ***yakın sayılar*** diyelim (örneğin 3 ve 8 yakın sayılardır). Her $n \geq 4$ tamsayısı için $[n, 8n - 17]$ aralığında yakın sayı çiftinin bulunduğunu kanıtlayınız.

* İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü öğretim üyesi.

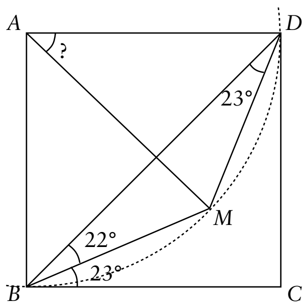
ESKİ SORULARA ÇÖZÜMLER
(Güz 2004, yıl 13, sayı 4)

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A311. *$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ denkleminin tüm tamsayı köklerini bulunuz.*

Çözüm. Denklemi $(x + y)^2 = (xy)^2 + xy$ şekline getirelim. $xy > 0$ ise, $(xy)^2 < (xy)^2 + xy < (xy + 1)^2$ olduğundan $(xy)^2 + xy$ bir tamkareye eşit olamaz. $xy < -1$ ise $(xy + 1)^2 < (xy)^2 + xy < (xy)^2$ olduğundan $(xy)^2 + xy$ bir tamkareye eşit olamaz. $xy = -1$ ise, $(x, y) = (1, -1)$ veya $(x, y) = (-1, 1)$ olmalıdır. Bunların ikisi de denklemi sağlar. $xy = 0$ ise $x = y = 0$ olacak.

A312. *$ABCD$ karesinin içinde, $m(MBC) = m(MDB) = 23°$ olacak şekilde bir M noktası alınmıştır. $m(MAD)$ kaç derecedir?*



Çözüm. $m(DBC) = 45°$ olduğundan $m(MBD) = 45° - 23° = 22°$ ve MBD üçgeninden $m(BMD) = 135°$ elde edilir. $2{\cdot}135° + 90° = 360°$ olduğundan, M noktası, merkezi A noktasında, yarıçapı $|AD|$ olan çemberin üzerindedir. O halde $m(MAD) = 2{\cdot}m(MBD) = 2{\cdot}22° = 44°$'dir.

A313. *Birbirinden farklı a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 pozitif tamsayılarının tüm mümkün ikililerinin pozitif $a_i - a_j$ farkları alınmıştır. Bu on tane farkın birbirinden değişik olduğu biliniyorsa, a_i sayılarından en büyüğü en az kaç olabilir?*

Çözüm. Genelliği bozmadan sayıların $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ şeklinde sıralanmış olduğunu varsayabiliriz. On tane fark birbirinden farklı olduğundan bunlardan en büyüğü $a_5 - a_1$ en az 10'dur, dolayısıyla $a_5 \geq 11$'dir. $a_5 = 11$ ise, farkların tam olarak 1, 2, ..., 10 sayılarına eşit olması gerekir. O halde $55 = 1 + 2 + 3 + ... + 10 = (a_5 - a_4) + (a_5 - a_3) + (a_5 - a_2) + (a_5 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_4 - a_2) + (a_4 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_3 - a_1) + (a_2 - a_1) = 4a_5 + 2a_4 - 2a_2 - 4a_1$ eşitliğinde sol taraf tek, sağ taraf çift olduğundan çelişki elde edilir. Öte yandan sayılar 1, 3, 8, 11, 12 olarak alınırsa, tüm farklar birbirinden farklı olacak. Dolayısıyla sayılardan en büyüğü en az 12 olur.

A314. *$\mathsf{R}^{>0}$, pozitif gerçel sayılar kümesi olsun. Her $x, y \in \mathsf{R}^{>0}$ için $y^2 f(x) = f(x/y)$ eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathsf{R}^{>0} \to \mathsf{R}^{>0}$ fonksiyonlarını bulunuz.*

Çözüm. $x = 1$ ve $z = 1/y$ alındığında $f(1)/z^2 = f(z)$ elde edilir. O halde $f(1)$'i a ile gösterirsek $f(x) = a/x^2$ şeklindedir. Öte yandan her $a \in \mathsf{R}^{>0}$ için $f(x) = a/x^2$ fonksiyonu sorudaki eşitliği sağlar.

A315. *100 × 100 boyutlu bir tablonun her hücresine sıfırdan farklı bir rakam yazılmıştır. Satırlarda oluşan 100 basamaklı 100 sayının her biri ve herhangi 99 sütunda oluşan 100 basamaklı sayının her biri 11'e bölünürse, yüzüncü sütunda oluşan sayının da 11'e bölündüğünü kanıtlayınız.*

Çözüm. Bir sayının 11'e bölünmesi için gerek ve yeterli koşul bu sayının tek basamaklarının toplamı ile çift basamakları toplamının modulo 11 denk olmasıdır. Tabloyu satranç tahtası şeklinde siyah ve beyaza boyayalım. Satırlardaki sayıların her biri 11'e bölündüğünden her satırda siyah hücrelerdeki rakamların toplamı beyaz hücrelerdeki rakamların toplamına modulo 11 denktir. Dolayısıyla tablodaki tüm siyah hücrelerdeki rakamların toplamı da tüm beyaz hücrelerdeki rakamların toplamına modulo 11 denktir. 99 sütunda oluşan sayılar 11'e bölündüğünden bu sütunlardaki siyah hücrelerdeki rakamların toplamı beyaz hücrelerdeki rakamların toplamına modulo 11 denktir. O halde geriye kalan (yani yüzüncü sütundaki) siyah hücrelerdeki rakamların toplamı beyaz hücrelerdeki rakamların toplamına modulo 11 denktir, yani yüzüncü sütundaki sayı da 11'e bölünür.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y311. *Soldan sağa ve sağdan sola okunduğunda aynı olan pozitif tam sayıya* ***palindrom*** *denir. Karesi de palindrom olan en büyük dört basamaklı palindrom sayıyı bulunuz.*

Çözüm. Dört basamaklı bir palindrom

$$P = abba = 1001a + 110b$$

şeklindedir.

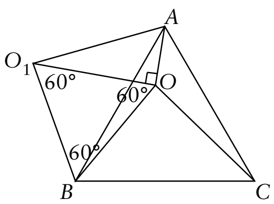
$$\begin{aligned} P^2 &= 1002001a^2 + 2{\cdot}110110ab + 12100b^2 \\ &= 10^6a^2 + 10^5{\cdot}2ab + 10^4(b^2 + 2ab) \\ &\quad +10^3(2a^2 + 2b^2) + 10^2(b^2+2ab) + 10{\cdot}2ab + a^2 \end{aligned}$$

eşitliğinden dolayı, P^2 sayısının son rakamı a^2'nin son rakamı ile aynıdır. $a > 4$ ise P^2 sekiz basamaklı bir sayıdır ve c, a^2 sayısının onlar basamağı olmak üzere, P'nin ilk rakamı c, c+1, c+2 olabilir. $a = 4$ için $a^2 = 16$'dır ve $1 \neq 6$; $1+1 \neq 6$; $1+2 \neq 6$ olduğundan bu durumda P palindrom olamaz. Benzer şekilde $a^2 = 25, 36, 49, 64, 81$ durumlarında da P^2 palindrom olamaz. $a = 3$ ve $b \neq 2$ ise, P^2 yine sekiz basamaklıdır, son basamağı 9 ve ilk basamağı 1 olduğundan palindrom olamaz. Diğer durumlarda P^2 yedi basamaklıdır. a^2 tek rakamlı olduğundan P^2'nin palindrom olması için $2ab$; $2ab+b^2$; $2a^2 + 2b^2$ sayılarından her biri 10'dan küçük olmalıdır. $a = 3$ ise her b için $2a^2 + 2b^2 = 2 \cdot 3^2 + 2b^2 >$ 10'dur. $a = 2$ ise, $2a^2 + 2b^2 < 10$ eşitsizliği sadece $b = 0$ durumunda sağlanır. Böylece koşulları sağlayan en büyük sayı 2002'dir. $a = 1$ ise, $2a^2 + 2b^2 <$ 10 eşitsizliği sadece $b = 0$ ve $b = 1$ durumlarında sağlanır. Dolayısıyla koşulları sağlayan iki sayı daha bulunur: 1111 ve 1001.

Çözenler: Osman Arşın (Gazi Ü., Türkçe Eğitimi B.), Hanifi Atılgan (Öz. Beyza L., K.Maraş), M.Süheyb Ayaz (Öz. Yamanlar L.), Hakkı Bulama (Sakarya Akyazı İmam Hatip L.), Çetin Camcı (Ank. Ü., Mat. B.), Melike Hazal Can (İzm. Fen L.), Bilgin Canpolat (H.F.Z. Anad. L., Çerkezköy, Tekirdağ), Ahmet Ceyhan (İst. Atatürk Fen L.), Yasin Çakar (Turgutlu Halil Kale Fen L.), Mustafa Dönmez (Turgutlu Halil Kale Fen L.) ve Yaşar Dönmez (Turgutlu L.), Ekrem Emre (Dumlupınar Ü., Kütahya), Furkan Erden (İzm. Öz. Yamanlar L.), Ahmet Hamdi Fazlıoğlu (İzm. Öz. Yamanlar L.), Uğurcan Gümüş (İzm. Öz. Sentez D.), Ayhan Gündüz (Derviş Paşa L., Osmaniye), Emre Ersegün Günay (Öz. Yamanlar Işık İlköğr. O.), Zekeriya Güney (Muğla Ü.), Y. Mehmet Güngören (Makina Mühendisi, Bursa), Onur Hurşitoğlu (S. Demirel Fen L., K.Maraş), Levent Mustafa Koçoğlu (S. Demirel Fen L., K.Maraş), Tufan Özdin (İzm. Yük. Tekn. Enst.), Nejdet Paran (Anad. Ü.), Egemen Şenel (S. Demirel Fen L., K. Maraş), Tuğba Uzluer (İzm. Öz. Yamanlar L.), Engin Yardımcı (ODTÜ, Mat. B.), Semih Yavuz (İzm. Öz. Yamanlar L.), İsmail Yılmaz (DPT, Ank.).

Y312. *ABC eşkenar üçgeninin içinde, $|AO|:|BO|:|CO| = 3:4:5$ olmak üzere bir O noktası alınmıştır. AOB açısı kaç derecedir?*

Çözüm. OBC üçgenini B noktası etrafında 60° döndürelim. C noktası A noktasına geçecek; O noktasının geçtiği noktayı O_1 ile gösterelim.



$|BO_1| = |BO|$ ve $m(O_1BO) = 60°$ olduğundan O_1BO eşkenar üçgendir. $|O_1A| = |OC| = 5$, $|O_1O| = |OB| = 4$ ve $|OA| = 3$ olduğundan O_1OA dik üçgendir. O halde $m(AOB) = m(AOO_1) + m(BOO_1) = 90° + 60° = 150°$'dir.

Çözenler: Suat Akbulut (İzm. Öz. Yamanlar L.), Uğur Akgün (S. Demirel Fen L., K.Maraş), Osman Arşın (Gazi Ü., Türkçe Eğitimi B.), M.Süheyb Ayaz (Öz. Yamanlar L.), Tuğba Aydemir (Yalova), Melike Hazal Can (İzm. Fen L.), Bilgin Canpolat (H.F.Z. Anad. L., Çerkezköy, Tekirdağ), Ahmet Ceyhan (İst. Atatürk Fen L.), Yasin Çakar (Turgutlu Halil Kale Fen L.), Davut Ali Çalık (İzm. Öz. Yamanlar L.), Alper Çay (Kayseri Uzman D.), Mustafa Çıray (Aksaray Anad. Öğrt. L.), Serkan Dağlar (İTÜ, Mat. Müh. B.), Mustafa Dönmez (Turgutlu Halil Kale Fen L.) ve Yaşar Dönmez (Turgutlu L.), Selin Duruk (Bahçelievler, İzm.), Ekrem Emre (Dumlupınar Ü., Kütahya), Furkan Erden (İzm. Öz. Yamanlar L.), Ahmet Hamdi Fazlıoğlu (İzm. Öz. Yamanlar L.), Deniz Hasan Güçoğlu (İzm. Yük. Tekn. Enst.), Tümay Gülerhocaoğlu (Öz. İnal Ertekin L.), Uğurcan Gümüş (İzm. Öz. Sentez D.), Ayhan Gündüz (Derviş Paşa L., Osmaniye), Nurdan Aksu Güner (Paşabahçe Ferit İnal L., İst.), Emre Ersegün Günay (Öz. Yamanlar Işık İlköğr. O.), Zekeriya Güney (Muğla Ü.), Y. Mehmet Güngören (Makina Mühendisi, Bursa), Emre Gürbüz (S. Demirel Fen L., K.Maraş), Onur Hurşitoğlu (S. Demirel Fen L., K.Maraş), Anar Hüseyin (Tayfur Bayar L., Eskişehir), Faruk Karaaslan (Çorum Ensar D.), Yusuf Kızılay (Besni İmam Hatip L., Adıyaman), Levent Mustafa Koçoğlu (S. Demirel Fen L., K. Maraş), Yavuz Marancı (Balıkesir Ü., Orta Öğr. Mat. Öğretmenliği Böl.), Kadir Mersin (İ. Ü. Mat. B.), Osman Öcal (İzm. Öz. Yamanlar L.), Tufan Özdin (İzm. Yük. Tekn. Enst.), Nejdet Paran (Anad. Ü.), Burak Sağlam (İzm. Öz. Yamanlar L.), Tuğba Uzluer (İzm. Öz. Yamanlar L.), Engin Yardımcı (ODTÜ, Mat. B.), Semih Yavuz (İzm. Öz. Yamanlar L.), Zafer Yıldırım (İzm. Fen L.), İsmail Yılmaz (DPT, Ank.).

Y313. 100 *demir paradan en az biri sahtedir. Tüm gerçek paralar aynı ağırlıkta ve tüm sahte paralar da aynı ağırlıkta ama sahte paralar gerçek paralardan daha hafiftirler. Çift kefeli terazi kullanarak* 51 *tartıda sahte paraların sayısı nasıl bulunur?*

Çözüm. Önce her kefeye birer para koyup tartarız. İki durum olabilir.

Birinci Durum: Bir kefe ağır geldi. Bu durumda hafif taraftaki para sahtedir. Geriye kalan 98 parayı ikişer ikişer alıp her ikiliyi terazinin sol gözüne, ilk aldığımız ikiliye de sağ gözüne koyarak tartarız. Sağ taraf ağır gelirse, sol taraftaki paraların ikisi de sahtedir; sağ taraf hafifse sol taraftaki paralar gerçektir; terazi eşit gelirse, sol tarafta tam bir tane sahte para vardır. Böylece birinci durumda 49 tartı daha yaparak hafif paraların sayısını öğrenebiliriz.

İkinci Durum: Terazi eşit geldi. Bu durumda tarttığımız paraların (bunları A ve B ile gösterelim) ikisi de aynı zamanda ya gerçektir ya da sahtedir. Birinci durumda olduğu gibi yine geriye kalan 98 parayı ikişer ikişer ayırıp bu ikilileri sırayla (A, B) ikilisi ile tartalım. Bu işlemi, n-inci adımda bir (C, D) ikilisi ile tartıldığında eşitsizlik elde edilene kadar sürdürelim. (C, D) ikilisi daha hafifse, A, B ve bu ana kadar tartılmış olan tüm paralar gerçektir. Şimdi C ile D'yi kıyaslayalım. Bunlar eşitse ikisi de sahtedir; eşit değilse hafif olan sahte, diğeri gerçektir. Her iki durumda bunlardan sahte olan birini ve gerçek olduğunu bildiğimiz A'yı alıp bir ikili oluştururuz ve birinci durumda gibi geriye kalan $98–2n$ para arasında kaç tanesinin sahte olduğunu $49–n$ adıma buluruz. (C, D) ikilisinin (A, B) ikilisinden daha ağır olduğu durumda da A, B ve o ana kadar tartılmış bütün paralar sahtedir. Yine de C ve D'yi kıyaslayarak hem bunların ikisinin de mi gerçek ya birinin mi gerçek olduğunu öğreniriz, hem de bunlardan gerçek olan birini alıp A ile bir ikili oluşturarak birinci durumdaki gibi geriye kalan $98–2n$ para arasında kaç tanesinin sahte olduğunu $49–n$ adımda buluruz. Böylece iki durumda da 50 tartı daha yaparak sahte para sayısını buluruz.

Çözenler: Çetin Camcı (Ank. Ü., Mat. B.), Bilgin Canpolat (H.F.Z. Anad. L., Çerkezköy, Tekirdağ), Mustafa Dönmez (Turgutlu Halil Kale Fen L.) ve Yaşar Dönmez (Turgutlu L.), Ekrem Emre (Dumlupınar Ü., Kütahya), Furkan Erden (İzm. Öz. Yamanlar L.), Zekeriya Güney (Muğla Ü.), Tuğba Uzluer (İzm. Öz. Yamanlar L.), Engin Yardımcı (ODTÜ, Mat. B.), İsmail Yılmaz (DPT, Ank.).

Y314. *a, b, $c > 0$ gerçel sayıları*

$$a + b + c \geq 1/a + 1/b + 1/c$$

eşitsizliğini sağlar.

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c$$

eşitisizliğini kanıtlayınız.

Çözüm. Aritmetik ve Geometrik ortalamalar arasındaki eşitsizliği kullanarak $a^3 + b^3 + c^3 + 1/a + 1/b + 1/c = (a^3 + 1/a) + (b^3 + 1/b) + (c^3 + 1/c) \geq 2a + 2b + 2c \geq (a + b + c) + (1/a + 1/b + 1/c)$ eşitsizliğini, buradan da $a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c$ eşitisizliğini elde ederiz.

Çözenler: Suat Akbulut (İzm. Öz. Yamanlar L.), M. Süheyb Ayaz (Öz. Yamanlar L.), Melike Hazal Can (İzm. Fen L.), Bilgin Canpolat (H.F.Z. Anad. L., Çerkezköy, Tekirdağ), Ahmet Ceyhan (İst. Atatürk Fen L.), Yasin Çakar (Turgutlu Halil Kale Fen L.), Davut Ali Çalık (İzm. Öz. Yamanlar L.), Alper Çay (Kayseri Uzman D.), Mustafa Dönmez (Turgutlu Halil Kale Fen L.) ve Yaşar Dönmez (Turgutlu L.), Ekrem Emre (Dumlupınar Ü., Kütahya), Furkan Erden (İzm. Öz. Yamanlar L.), Ahmet Hamdi Fazlıoğlu (İzm. Öz. Yamanlar L.), Zekeriya Güney (Muğla Ü.), Anar Hüseyin (Tayfur Bayar L., Eskişehir), Osman Öcal (İzm. Öz. Yamanlar L.), Burak Sağlam (İzm. Öz. Yamanlar L.), Şafak Alim Satıcı (İÜ, Mat. B.), Tuğba Uzluer (İzm. Öz. Yamanlar L.), Semih Yavuz (İzm. Öz. Yamanlar L.), Zafer Yıldırım (İzm. Fen L.), İsmail Yılmaz (DPT, Ank.).

Y315. *Bir ülkenin milli kaynana, milli damat ve milli gelininin seçilmesi için düzenlenen bir televizyon programına n kaynana adayı (oğlanların anaları), n damat adayı, n de gelin adayı katıldı. Bir süre sonra her kaynana adayı beğenmedikleri a gelin adayından oluşan, her gelin adayı da beğendikleri b damat adayından oluşan birer liste açıklarlar. Bir damat adayı ancak annesinin listesinde bulunmayan bir gelin adayının listesinde bulunuyorsa bu gelin adayıyla evlenebilir. $b–a$ sayısının en az hangi değerinde gelin adaylarının tercihleri ve kaynana adaylarının yasakları ne olursa olsun, en az bir damat adayı evlenebilir?*

Çözüm. $b - a \geq 1$ ise en az bir damat adayının evlenebileceğini kanıtlayalım. Bir G gelin adayı bir D damat adayının annesinin listesinde bulunmuyorsa, bir (D, G) çifti oluşturalım ve bu çiftler kümesine X diyelim. Aynı şekilde bir D' damat adayı bir G' gelin adayının listesinde bulunuyorsa bir (D', G') çifti oluşturalım ve bu çiftlerin kümesine de Y diyelim. X kümesinde $n(n - a)$, Y kümesinde de nb tane çift bulunur.

$$n(n - a) + nb = n^2 + n(b - a)$$

toplamı tüm mümkün çiftlerin sayısı olan n^2'den büyük olduğundan X ile Y'nin kesişimi boşküme değildir. Bu kesişimden alınan herhangi (D, G) çiftindeki D damat adayı G gelin adayı ile evlenebilir.

Öte yandan $b \le a$ ise, kaynana ve gelin adaylarının listeleri aşağıdaki şekilde oluşturulursa, evlenebilecek bir damat adayı bulunmaz. Damat adayları $D_1, D_2, ..., D_n$, gelin adayları da $G_1, G_2, ..., G_n$ olsun. Her j, $i = 1, 2, ..., n$ için, K_i'nin listesi G_{i-a}, $G_{i-a+1}, ..., G_{i-1}$ gelin adaylarından; G_j'nin listesi de $D_{i+1}, D_{i+2}, ..., D_{i+b}$ (her iki listede indekslerdeki toplam modulo n alınmıştır) damat adaylarından oluşsun. Bu durumda bir G_j gelin adayı bir D_i damat adayını beğenmişse $s \in \{1, 2, ..., b\}$ olmak üzere $i - j \equiv s \pmod n$'dir. $1 \le s \le b \le a$ ve $j \equiv i - s \pmod n$ olduğundan G_j gelin adayı K_i kaynana adayının listesindedir. Dolayısıyla D_i, G_j ile evlenemez. Böylece $b - a$'nın, en az bir damat adayının evlenmesini garantileyen en küçük değeri 1'dir.

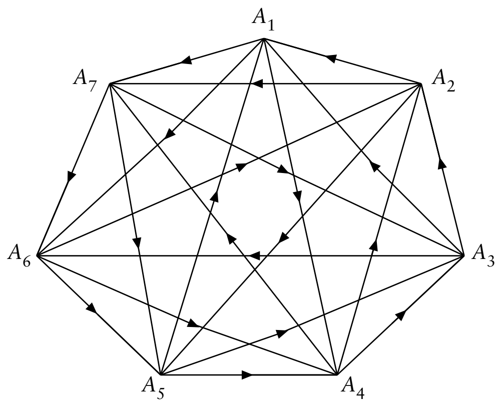
Çözenler: Çetin Camcı (Ank. Ü., Mat. B.), Ahmet Hamdi Fazlıoğlu (İzm. Öz. Yamanlar L.), Zekeriya Güney (Muğla Ü.), Semih Yavuz (İzm. Öz. Yamanlar L.), İsmail Yılmaz (DPT, Ank.).

Düzeltme

Dizgiden kaynaklanan bir hata sonucu, geçen sayıda çözümünü verdiğimiz Y308 sorusunun şekli yanlış çıkmıştır. Soruyu, yanıtı ve doğru şekli bir kez daha yayımlayıp okurlarımızdan özür diliyoruz.

Y308. *Birkaç voleybol takımı aralarında bir turnuva yaptı. Herhangi iki A ve B takımları alındığında, eğer A, B'yi yenmişse, A'ya yenilmiş ve B'yi yenmiş bir C takımı bulunur. Turnuvaya en az kaç takım katılmıştır?*

Çözüm: En az bir galibiyeti ve en az bir mağlubiyeti olan bir A takımının bulunduğu açıktır. A, B'yi yenmişse, A'ya yenilmiş ve B'yi yenmiş olan bir C takımı bulunur. O halde A'ya yenilmiş ve C'yi



yenmiş olan bir D takımı bulunur. D, C'yi yenmiş, B ise C'ye yenilmiştir, dolayısıyla $D \neq B$'dir. Böylece A'nın yenmiş olduğu en az 3 takım bulunur. Benzer şekilde A'yı yenmiş olan en az 3 takım bulunduğu kanıtlanır. O halde turnuvaya en az 7 takım katılmıştır. Koşulları sağlayan 7 takım örneği yukardaki şekilde verilmiştir ($X \to Y$, X'in Y'yi yendiğini göstermektedir.) ♥

Yanlış Nerde?

ABCD bir kare olsun. Yandaki şekilden takip edelim. *C*'den *CB* uzunluğunda bir *CE* doğru parçası çekelim. *AB* ve *AE* doğru parçalarının ortadikmeleri *F* noktasında kesişsin.

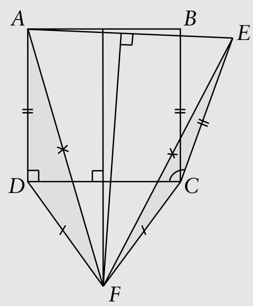
ADC dik açısının *ECD* açısına eşit olduğunu kanıtlayacağız!

ADF ve *ECF* üçgenlerine bakalım.

- Elbette $AD = BC = EC$.
- F noktası AE'nin ortadikmesinin üstünde bulunduğundan $AF = EF$.
- F noktası ayrıca AB'nin ortadikmesinin üstünde bulunduğundan, DC'nin de ortadikmesinin üstünde bulunur. Dolayısıyla $DF = CF$.

Demek ki *ADF* ve *ECF* üçgenlerinin üç kenarı da birbirine eşit, yani bu iki üçgen birbirine eşitler. Dolayısıyla *ADF* ve *ECF* açıları eşitler. Ama *DFC* ikizkenar üçgen olduğundan, *FDC* açısıyla *FCD* açıları eşitler. Demek ki *ADC* dik açısı *ECD* açısına eşittir!

Nerde yanlış yaptık?



Bu soru **Alice Harikalar Diyarında**'nın yazarı matematikçi ve mantıkçı Lewis Carroll'ın en sevdiği sorulardan biriymiş.