$\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ Cisimlerinde Karelerin Toplamı

Serhat Doğan* / *kelaker@gmail.com*

Bilindiği gibi her pozitif gerçel sayı bir karedir, karekökünün karesidir! Aynı sonuç tamsayılar kümesi Z ya da kesirli sayılar kümesi Q'de geçerli değildir. Örneğin bu kümelerde 2 bir kare değildir, çünkü $\sqrt{2}$ sayısı Z'de ya da Q'de değildir. Gene de bu kümelerde her pozitif sayı (gene bu kümelerden) en fazla dört sayının karesinin toplamıdır. Z'de bu, Lagrange Teoremi olarak bilinen bir teoremdir. Q'de de her pozitif sayının dört karenin toplamı olduğu Lagrange Teoremi'nden oldukça kolay bir biçimde (ufak bir hinlikle çıkar): Eğer x, $y > 0$ tamsayılarsa, önce xy pozitif tamsayısını dört tamsayının karesinin toplamı olarak yazalım:

$$xy = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

sonra da

$$\begin{aligned} x/y &= xy/y^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)/y^2 \\ &= (a/y)^2 + (b/y)^2 + (c/y)^2 + (d/y)^2 \end{aligned}$$

eşitliğinin farkına varalım; böylece her x/y pozitif kesirli sayısının dört kesirli sayının karesinin toplamı olarak yazılabildiği çıkar.

Bu yazıda, eğer $d > 1$, tamkare olmayan bir tamsayıyı simgeliyorsa,

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

kümesinin sonlu tane karenin toplamı olarak ifade edilen sayılarını bulacağız.

Soruyu $d = 2$ için internet sitesine (www.alinesin.org) ödüllü soru olarak koyan Ali Nesin bir de ayrıca, karelerin toplamı olan sayıların kaç karenin toplamı olarak yazılabileceği sorusunu sormuştur. Karelerin toplamı olan her sayının en fazla beş karenin toplamı olarak yazılabileceğini kanıtlayacağız, ancak bu sonucun dört kareye indirilip indirilemeyeceğini bilmiyoruz.

Bulduğumuz sonuç şöyle:

Teorem. *$\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ kümesinin $a + b\sqrt{d}$ elemanının gene $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ kümesinin elemanlarının karelerinin toplamı şeklinde ifade edilebilmesi için $a \geq |b|\sqrt{d}$ eşitsizliği gerek ve yeter koşuldur. Ayrıca, böyle bir elemanı en fazla beş karenin toplamı olarak yazabiliriz.*

* Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümü 3. sınıf öğrencisi.

$\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ Halkası. Kanıta geçmeden önce $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ kümesi hakkında kanıtta kullanacağımız bir iki şey söyleyelim.

Önce tanım: $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ kümesi, a ve b kesirli sayılar olmak üzere $a + b\sqrt{d}$ biçiminde yazılan sayılar kümesidir. Bundan böyle $a + b\sqrt{d}$ biçiminde bir ifade yazdığımızda, a ve b'nin Q'de olduklarını söylemeden varsayacağız. Ayrıca, $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ kümesinin elemanlarını hep α, β, γ gibi Yunan harfleriyle göstereceğiz.

$\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ kümesi, kolayca sınanacağı üzere, toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri altında kapalıdır, yani $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ kümesinden iki elemanın toplamı, farkı ve çarpımı gene $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ kümesindedir. Bu özellikleri yüzünden $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ kümesine ***halka*** denir.

$\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ halkasında 0 dışında her sayının tersi bir gerçel sayıdır elbette. Bu sayının gene $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ halkasında olduğu hiç de bariz değil, ama şimdi kanıtlayacağımız üzere öyledir.

Eğer $\alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ ise,

$$\overline{\alpha} = a - b\sqrt{d}$$

olsun. $\overline{\alpha}$ da $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ halkasındadır. $\overline{\alpha}$ sayısına α'nın ***eşleniği*** adı verilir. Kolay bir hesapla kanıtlanabileceği üzere, $\overline{}$ fonksiyonu toplamaya, çıkarmaya ve çarpmaya saygı duyar, yani her α, $\beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ için,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha + \beta} &= \overline{\alpha} + \overline{\beta} \\ \overline{\alpha - \beta} &= \overline{\alpha} - \overline{\beta} \\ \overline{\alpha\beta} &= \overline{\alpha}\,\overline{\beta} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu yüzden eğer α karelerin toplamıysa, $\overline{\alpha}$ sayısı da karelerin toplamıdır: Nitekim, eğer,

$$\alpha = \beta_1^2 + \ldots + \beta_n^2$$

ise

$$\overline{\alpha} = \overline{\beta}_1^2 + \ldots + \overline{\beta}_n^2$$

dir.

Şimdi $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha}$ olsun. Eğer $\alpha = a + b\sqrt{d}$ ise,

$$N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - b^2d$$

eşitliğine göre $N(\alpha)$ kesirli bir sayıdır ve, d bir tamkare olmadığından, $N(\alpha)$, ancak $\alpha = 0$ ise 0 olabilir. Demek ki $\alpha \neq 0$ ise, $N(\alpha)$, 0 olmayan kesirli bir sayıdır. Böylece α'yı $N(\alpha)$'ya bölüp gene $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ halkasında bir sayı elde ederiz: $\alpha/N(\alpha) \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. Şimdi,

$$\alpha\cdot(\overline{\alpha}/N(\alpha)) = 1,$$

eşitliğine dikkatinizi çekerim. Bu eşitlikten α'nın çarpımsal tersi olan α^{-1} sayısının $\overline{\alpha}/N(\alpha)$ sayısına eşit olduğu ve aslında $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ halkasında olduğu çıkar. Bu özelliğe sahip halkalara ***cisim*** denir. Demek ki $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ sadece bir halka değil, ayrıca cisimdir de.

Dikkat ederseniz, eğer α karelerin toplamıysa, $\overline{\alpha}$ da karelerin toplamı olduğundan, bu iki sayının çarpımı olan $N(\alpha)$ da karelerin toplamıdır, yani negatif olamaz. Teoremdeki $a \geq |b|\sqrt{d}$ koşulu da aslında tam tamına, $N(\alpha)$ ve a sayılarının negatif olmadığını söylüyor. Yani aynı teoremi şöyle de yazabiliriz:

Teorem. *$\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ kümesinin $\alpha = a + b\sqrt{d}$ elemanının gene $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ kümesinden sonlu tane karenin toplamı şeklinde ifade edilebilmesi için gerek ve yeter koşul $N(\alpha) \geq 0$ ve $a \geq 0$ eşitsizlikleridir. Ayrıca, böyle bir α elemanını en fazla beş karenin toplamı olarak yazabiliriz.*

Koşulların gerekli olduğunu hemen gösterebiliriz. $N(\alpha) \geq 0$ koşulunun gerekli olduğunu az önce gösterdik. Eğer $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $x + y\sqrt{d}$ türünden sayıların karelerinin toplamıysa, o zaman a, $x^2 + y^2d$ türünden yazılan kesirli sayıların toplamıdır. Bu sayılar negatif olamayacaklarından a da negatif olamaz.

Şimdi koşulların yeterli olduğunu gösterelim. Canalıcı önsavımız aşağıda:

Önsav. *$N(\alpha) \geq 0$ ve $a \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan her $\alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ için, $\alpha = \beta^2 + k$ eşitliğini sağlayan $\beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$* ve *$k \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$ sayıları vardır.*

Kanıt. Eğer $b = 0$ ise, $\beta = 0$ ve $k = \alpha = a$ alabiliriz. Bundan böyle $b \neq 0$ olsun. $\beta = x + y\sqrt{d}$ yazıp, $\alpha - \beta^2$'yi pozitif bir kesirli sayı yapan x ve y sayılarını bulmaya çalışalım. $\alpha - \beta^2$ sayısını hesaplayalım:

$$\alpha - \beta^2 = (a + b\sqrt{d}) - (x + y\sqrt{d})^2 =$$
$$= (a - x^2 - y^2d) + (b - 2xy)\sqrt{d}.$$

Bu sayı k'ye eşit olacak. k'nin kesirli ve pozitif olmasını istediğimizden,

$$b = 2xy$$

eşitliğini ve

$$a - x^2 - y^2d \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan x ve y kesirli sayılarını bulmalıyız.

y, eğer varsa, 0 olamaz, çünkü $b = 2xy$ olmalı ve daha en baştan b'nin 0 olmadığını varsaydık. Birinci denklemden $x = b/2y$ bulunur, bunu ikinci denkleme yerleştirip biraz hesap yaparsak,

$$4dy^4 - 4ay^2 + b^2 \leq 0$$

eşitsizliği sağlayan kesirli bir y sayısı bulmamız gerektiği anlaşılır. y^2 yerine z koyarsak,

$$4dz^2 - 4az + b^2 \leq 0$$

eşitsizliği sağlayan ve karekökünün kesirli olduğu bir $z \geq 0$ bulmamız gerektiği anlaşılır. Bu, ikinci dereceden bir denklem. Kökleri de şu pozitif sayılar:

$$\frac{a \pm \sqrt{a^2 - db^2}}{2d}.$$

Karekökü alınması gereken $a^2 - db^2$ sayısı $N(\alpha)$'ya eşit olduğundan ve varsayıma göre pozitif olduğundan karekök almada bir sorun yok. Demek ki,

$$0 \leq \frac{a - \sqrt{N(\alpha)}}{2d} \leq y^2 \leq \frac{a + \sqrt{N(\alpha)}}{2d}$$

eşitsizliklerini, yani,

$$\sqrt{\frac{a - \sqrt{N(\alpha)}}{2d}} \leq y \leq \sqrt{\frac{a + \sqrt{N(\alpha)}}{2d}}$$

eşitsizliklerini sağlayan kesirli bir y sayısı bulmalıyız. Kesirli sayılar kümesi gerçel sayılar kümesinde yoğun olduğundan böyle bir kesirli y sayısı bulabiliriz. □

Şimdi önsavımızı kullanarak verilen koşulları sağlayan bir α sayısının beş karenin toplamı olarak yazıldığını gösterebiliriz. Nitekim $\beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, önsavdaki gibi $\alpha - \beta^2 \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$ ilişkisini sağlayan bir sayı olsun. Kesirli sayılarda da geçerli olan Lagrange Teoremi'nden dolayı $\alpha - \beta^2$'yi dört kesirli sayının karesinin toplamı olarak yazabiliriz ve sonuçta α beş karenin toplamı olarak yazılabilir. ♠