Dirichlet Çarpımı

E. Mehmet Kıral* / *luzumi@gmail.com*

Sayma sayılar kümesi S = {1, 2, 3, ... }'den gerçel sayılar kümesi R'ye (ya da karmaşık sayılar kümesi C'ye) giden bir fonksiyona ***aritmetik fonksiyon*** adı verilir. Eğer bir f aritmetik fonksiyonu, aralarında asal her $n, m \in$ S sayı çifti için

$$f(n)f(m) = f(nm)$$

eşitliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna ***çarpımsal*** denir. Hemen çarpımsal fonksiyonlara örnek verelim.

1) **Sabit 0 Fonksiyonu:** Her $n \in$ S için $f(n) = 0$ eşitliğiyle tanımlanmış sabit 0 fonksiyonu elbette çarpımsal bir fonksiyondur.

Sabit 0 fonksiyonu $f(1)$'in 1'e eşit olmadığı tek çarpımsal fonksiyondur. Nitekim, eğer f çarpımsalsa ve $f(1) \neq 1$ ise, o zaman

$$f(1)^2 = f(1)f(1) = f(1\cdot 1) = f(1),$$

yani $f(1)^2 = f(1)$ ve $f(1) = 0$; bu durumda, her n sayma sayısı için,

$$f(n) = f(1\cdot n) = f(1)f(n) = 0\cdot f(n) = 0.$$

Bundan böyle sabit 0 fonksiyonunu çarpımsal fonksiyondan saymayacağız ve böylece her çarpımsal f fonksiyonu için $f(1) = 1$ eşitliğini varsayabileceğiz.

2) **I Fonksiyonu.** I fonksiyonunu şöyle tanımlayalım. I(1) = 1 ve 1'den büyük tüm n doğal sayıları için de I(n) = 0. Daha biçimsel yazılımla,

$$\mathrm{I}(n) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } n = 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

I'nin çarpımsal olduğu çok belli.

Yazımızda önemli bir yer tutacak olan bu fonksiyon sabit 0 fonksiyonuna çok benziyor, tek farkı 1'de 1 değeri alması.

3) I_r **Güç Fonksiyonları:** r herhangi bir gerçel sayı ve $I_r(n) = n^r$ olsun. I_r çarpımsaldır elbette. Eğer $r = 0$ ise sabit 1 fonksiyonunu, eğer $r = 1$ ise özdeşlik fonksiyonunu (Id'i) buluruz.

4) λ **Fonksiyonu.** $n > 1$ olsun; n'yi asalların çarpımı olarak yazalım: $n = p_1p_2 \ldots p_k$. Buradaki p_i'ler n'nin asal çarpanlarıdır. p_i'lerin birbirinden farklı olmaları gerekmediğine dikkatinizi çekeriz. Şimdi λ'nın n'deki değerini tanımlayalım:

$$\lambda(n) = (-1)^k.$$

Bu fonksiyon bir sayının asal bölenlerinin tek sayıda mı çift sayıda mı olduğunu söylüyor. Eğer $n = 1$ ise, $\lambda(1) = 1$ olsun. λ çarpımsaldır elbette.

Yukardaki fonksiyonlar, sadece aralarında asal n ve m sayıları için değil, her $n, m \in$ S için,

$$f(nm) = f(n)f(m)$$

eşitliğini sağlarlar. Bu tür fonksiyonlara tam çarpımsal diyelim. Bundan sonraki örneklerimiz tam çarpımsal olmayan çarpımsal fonksiyonlar olacak.

5) **Euler φ Fonksiyonu.** En ünlülerinden biridir.

$$\varphi(n) = |\{x \in \mathrm{N} : \mathrm{ebob}(x, n) = 1, x \leq n\}|$$

olarak tanımlanmıştır.

Sonsuz Tane Asal Vardır'ın Muhteşem Bir Kanıtı Daha

Sonlu tane asal olduğunu varsayalım ve bu asalları çarpalım. Çarpıma a diyelim. Eğer $1 < b < a$ ise, b'yi bölen her asal a'yı da böldüğünden, ebob(a, b) ≠ 1'dir. Dolayısıyla $\varphi(a) = 1$. Öte yandan 3 asalı a'yı böler ve a'yla $a/3$ aralarında asaldırlar. Demek ki,

$$1 = \varphi(a) = \varphi(3\times a/3) = \varphi(3)\varphi(a/3) = 2\varphi(a/3) \geq 2 > 1.$$

Bu bir çelişkidir.

6) **Bölen Sayısı Fonksiyonu.**

$$d(n) = |\{d \in \mathrm{N} : d \mid n\}|$$

olarak tanımlanmıştır.

7) **Möbius μ Fonksiyonu.**

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } n = 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n, \text{ 1 dışında bir tamkareye bölünüyorsa} \\ (-1)^t & \text{eğer } n, t \text{ değişik asalın çarpımıysa} \end{cases}$$

olsun. μ'nün çarpımsal olduğu kolaylıkla anlaşılır.

8) σ_r **Fonksiyonu.** r herhangi bir gerçel sayı olsun. İlk bakışta inanması güç belki ama

$$\sigma_r(n) = \textstyle\sum_{d|n} d^r$$

fonksiyonu çarpımsaldır. Geçen yazımızda [MD-2004-IV, sayfa 80-82] bu fonksiyonun çarpımsal olduğunu göstermiştik; bu yazıda bundan daha genel bir sonuç kanıtlayacağız.

σ_1 yerine sadece σ yazmak pratik bir alışkanlıktır: $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$.

1 Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü 1. sınıf öğrencisi.

$\sigma_0 = d$ (bölen sayısı fonksiyonu) eşitliği de kayda değerdir.

Bu kadar örnek yeter. Konuya devam edelim.

Geçen sayıdaki yazımızda çarpımsal bir f fonksiyonundan hareketle yeni bir f^* çarpımsal fonksiyonu yaratmıştık: Eğer f, herhangi bir çarpımsal fonksiyonsa

$$f^*(n) = \Sigma_{d|n} f(d)$$

kuralıyla tanımlanmış f^* fonksiyonu da çarpımsaldır. Geçen yazıda kanıtladığımız bu teoremi birazdan bir kez daha kanıtlayacağız.

Örnekler. $I_0^* = d$, $\varphi^* = \text{Id}$, $\text{Id}^* = \sigma$.
Yeni bir örnek: $n \neq 1$ için, $\mu^*(n) = 0$ ve $\mu^*(1) = 1$.
Bir örnek daha:

$$\lambda^*(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \text{ ise} \\ 0 & n \text{ bir tamkareye bölünürse} \\ 1 & n \text{ farklı asalların çarpımıysa} \end{cases}$$

Bunların her birinin kanıtı oldukça kolaydır; tanıma başvurmak yeterli. Okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

f^* fonksiyonunu f'den hareketle tanımladık. Geçen yazıda kanıtladığımız üzere, f^*'dan hareketle f'yi tanımlamak da mümkündür (bir başka deyişle f^*, f'yi belirler; yani $f^* = g^*$ ise $f = g$'dir):

Möbius Ters Çevirme Formülü (1):

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f^*(n/d).$$

Bu yazıda aritmetik fonksiyonlara çok daha geniş bir çerçeveden bakarak bir önceki sayfada verdiğimiz çarpımsal fonksiyon örneklerinin aslında birbirlerine göbekten bağlı olduklarını göreceğiz. Ayrıca geçen yazıda kanıtladığımız Möbius formülünün bir başka kanıtını da vereceğiz. Yapacağımız şey özetle şu: Möbius Ters Çevirme Formülü'nde μ fonksiyonu yerine bir başka çarpımsal fonksiyon alırsak ne olur? Başımıza neler gelir?

Fonksiyonları Toplama ve Çarpma. Aritmetik fonksiyonlar üzerinde çeşitli ikili işlemler tanımlanabilir. Bu işlemlerin en bilinenleri toplama ve çarpmadır: Eğer f ve g iki aritmetik fonksiyonsa, o zaman, $f + g$ ve $f \cdot g$ fonksiyonları şöyle tanımlanır:

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n),$$
$$(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n).$$

Bu tanımların geçerli olmaları için f ve g fonksiyonlarının illa aritmetik olmalarına gerek yoktur; bu tanımlar, üzerinde toplama ve çarpma yapılan bir kümeye giden herhangi iki fonksiyon için anlamlıdır. Ancak şimdi bunlara ekleyeceğimiz, hatta bu yazının anakonusu olan ve bize yeni ufuklar açarak yukarda sözü edilen göbekbağını görmemizi sağlayacak işlem için, işlemin uygulanacağı fonksiyonların mutlaka aritmetik olmaları gerekir.

Dirichlet Çarpımı. f ve g iki aritmetik fonksiyonsa bunların ***Dirichlet çarpımı*** $f \times g$,

$$(f \times g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(n/d)$$
$$= \sum_{dd'=n} f(d) g(d')$$

olarak tanımlanır. Örneğin,

$$(f \times g)(1) = f(1)g(1),$$

ve bir p asalı için,

$$(f \times g)(p) = f(1)g(p) + f(p)g(1)$$

ve

$$(f \times g)(p^2) = f(1)g(p^2) + f(p)g(p) + f(p^2)g(1).$$

Daha somut bir örnek:

$$(\varphi \times d)(15) = \varphi(1)d(15) + \varphi(3)d(5) + \varphi(5)d(3) + \varphi(15)d(1)$$
$$= 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 24.$$

Son bir örnek daha: $\sigma_r = \text{Id} \times I_r$.

Möbius Ters Çevirme Formülü'yle $\times$ işlemi arasındaki ilişki herhalde okurun dikkatinden kaçmamıştır:

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f^*(n/d) = (\mu \times f^*)(n).$$

Demek ki $f = \mu \times f^*$. Çok ilginç! Möbius Ters Çevirme Formülü'nün bir başka versiyonu... Bunu kaydedelim. (Bir iki sayfa sonra yeni bir kanıtını vereceğiz.)

Möbius Ters Çevirme Formülü (2): $f = \mu \times f^*$.

Daha da ilginci var: f^* fonksiyonu da Dirichlet çarpımıyla f'den hareketle tanımlanabilir (I_0 fonksiyonunun sabit 1 değeri alan fonksiyon olduğunu anımsayalım):

$$f^*(n) = \sum_{d|n} f(d) = \Sigma_{d|n} f(d) \cdot 1$$
$$= \sum_{d|n} f(d) \cdot I_0(n/d) = (f \times I_0)(n),$$

yani

$$f^* = f \times I_0.$$

Demek ki onca zaman yaptığımız, sadece fonksiyonumuzu I_0'la Dirichlet usulü çarpmakmış...

$f^* = f \times I_0$ eşitliğinden hareketle f^{**} için de basit bir formül bulabiliriz:

$$f^{**} = f^* \times I_0 = (f \times I_0) \times I_0.$$

Belli ki Dirichlet çarpımının maharetleri var. Şimdi bu çarpımının bazı özelliklerini bulalım.

1) Çarpımsallığın Koruması: Dirichlet çarpımını iki çarpımsal fonksiyona uygularsak gene bir çarpımsal fonksiyon elde ederiz: *Eğer f ve g çarpımsal fonksiyonlarsa o zaman $f \times g$ de çarpımsaldır*, yani *çarpımsal fonksiyonlar kümesi Dirichlet çarpımı altında kapalıdır*. Bunu kanıtlayalım şimdi.

Kanıt: n ve m aralarında asal iki sayı olsun; hemen $(f \times g)(nm)$ değerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}(f\times g)(nm) &= \sum\nolimits_{d|nm} f(d)g(nm/d)\\ &= \sum\nolimits_{u|n,v|m} f(uv)g(nm/uv)\\ &= \sum\nolimits_{u|n,v|m} f(u)f(v)g(n/u)g(m/v)\\ &= \sum\nolimits_{u|n,v|m} f(u)g(n/u)f(v)g(m/v)\\ &= \sum\nolimits_{u|n} f(u)g(n/u)\sum\nolimits_{v|m} f(v)g(m/v)\\ &= (f\times g)(n)\cdot(f\times g)(m).\end{aligned}$$

İkinci eşitlikte, eğer n ile m aralarında asalsa, nm'nin her d böleninin n'nin bir u böleniyle m'nin bir v böleninin çarpımı olarak tek bir biçimde yazılabileceğini kullandık. □

Böylece σ_r fonksiyonunun çarpımsal olduğunu (bir kez daha) kanıtlamış olduk, çünkü $\sigma_r = \mathrm{Id} \times I_r$.

2) Değişmelilik. *Her f, g aritmetik fonksiyonu için*, $f \times g = g \times f$.

Kanıt: $f \times g$ tanımından anında çıkar. □

3) Birleşmelilik. *Her f, g, h aritmetik fonksiyonu için*, $(f \times g) \times h = f \times (g \times h)$.

Kanıt: $(f \times g) \times h$ ve $f \times (g \times h)$ fonksiyonlarının her n sayma sayısında aynı değeri aldığını göstermeliyiz. Hemen hesaplayalım:

$$\begin{aligned}((f \times g) \times h)(n) &= \textstyle\sum_{dd'=n} (f \times g)(d)h(d')\\ &= \textstyle\sum_{dd'=n} \left(\sum_{cc'=d} f(c)g(c')\right)h(d')\\ &= \textstyle\sum_{dd'=n} \sum_{cc'=d} f(c)g(c')h(d')\\ &= \textstyle\sum_{cc'd'=n} f(c)g(c')h(d')\\ &= \textstyle\sum_{c|n} f(c)\left(\sum_{c'd'=n/c} g(c')h(d')\right)\\ &= \textstyle\sum_{ce=n} f(c)\left(\sum_{c'd'=e} g(c')h(d')\right)\\ &= \textstyle\sum_{ce=n} f(c)\ (g \times h)(e) = (f \times (g \times h))(n).\end{aligned}$$

Umarız okur bir eşitlikten diğerine geçerken yaptığımız basit cambazlık hareketlerini takip edebilmiştir. □

Bu eşitlikten, örneğin,

$f^{**} = (f \times I_0) \times I_0 = f \times (I_0 \times I_0)$,

$f^{***} = f \times (I_0 \times I_0 \times I_0)$ eşitlikleri çıkar.

4) Etkisiz Eleman. I fonksiyonunu şöyle tanımlamıştık: $\mathsf{I}(1) = 1$ ve 1'den büyük tüm n doğal sayıları için $\mathsf{I}(n) = 0$. Şimdi I'nin Dirichlet çarpımı için etkisiz elemanı olduğunu, yani her f aritmetik fonksiyonu için

$$f \times \mathsf{I} = \mathsf{I} \times f = f$$

eşitliğinin geçerli olduğunu savlayıp kanıtlıyoruz. Nitekim,

$$(f \times \mathsf{I})(n) = \textstyle\sum_{d|n} f(d)\mathsf{I}(n/d) = f(n).$$

Son eşitlik, $d = n$ hariç tüm toplananların sıfır olmasından kaynaklanıyor. □

I, Dirichlet çarpımının birim elemanıdır, bir nevi 1'idir.

I'nin çarpımsal (hatta tam çarpımsal) bir fonksiyon olduğu çok bariz. Çarpımsallığın $\times$ işlemi altında korunduğu göz önüne alındığında, I'nin çarpımsal olması özel bir önem kazanır. (Çünkü çarpımsal fonksiyonlar kümesi $\times$ işlemi altında bir "grup" oluşturacaklar ve I bu grubun birim elemanı olacak.)

5) Tersinir Elemanlar. Bir f fonksiyonunun ***Dirichlet-tersinir*** olması demek $f \times g = \mathsf{I}$ eşitliğini sağlayan bir g fonksiyonunun olması demektir. Böyle bir g'nin olması için gerek ve yeter koşulun $f(1) \neq 0$ olduğunu savlıyoruz.

$f(1) \neq 0$ koşulunun gerekli olduğu $\mathsf{I}(1) = 1$ ve $(f \times g)(1) = f(1)g(1)$ eşitliklerinden belli. Koşulun yeterli olduğunu kanıtlayalım.

Bir f fonksiyonu verilmiş olsun. $f(1) \neq 0$ eşitsizliğini kabul edip $f \times g = \mathsf{I}$, yani her n için

$$\textstyle\sum_{dd'=n} f(d)g(d') = \mathsf{I}(n)$$

eşitliğini sağlayan bir g fonksiyonu arıyoruz. Eğer böyle bir g fonksiyonu varsa, g'nin neye eşit olduğunu bulmak aslında oldukça kolay, yazınca hemen çıkıyor. Örneğin $g(1) = 1/f(1)$ olmalı, çünkü, $f(1)g(1) = (f \times g)(1) = \mathsf{I}(1) = 1$. Şimdi $n > 1$ için $g(n)$'yi bulmaya çalışalım:

$$\begin{aligned}0 = \mathsf{I}(n) &= (f \times g)(n) = (g \times f)(n)\\ &= \textstyle\sum_{d|n} g(d)f(n/d)\\ &= \textstyle\sum_{d|n,\ d\neq n} g(d)f(n/d) + g(n)f(1).\end{aligned}$$

Demek ki,

$$g(n) = -\textstyle\sum_{d|n,\ d\neq n} g(d)f(n/d)/f(1)$$

olmalı. Bunu tümevarımsal bir tanım olarak kabul edebiliriz, çünkü sağ taraftaki $g(d)$ terimlerinde beliren d'ler n'den daha küçüktürler. Böylece, n'den küçük d'ler için $g(d)$ bilinirse, yukardaki formülden $g(n)$ de bulunur.

6) Çarpımsal Fonksiyonların Tersinir Elemanları. Çarpımsal fonksiyonlarda $f(1) = 1 \neq 0$ olduğundan, yukarıda kanıtladığımız özelliğe göre tüm çarpımsal fonksiyonların Dirichlet-tersleri vardır.

$f(1) \neq 0$ eşitsizliğini kabul edip $f \times g = \mathsf{I}$ eşitliğini sağlayan bir g fonksiyonu bulduk. Ama biz biraz daha fazlasını istiyoruz, eğer f çarpımsalsa g'nin de çarpımsal olması işimize gelir. Bunu kanıtlayalım.

Çarpımsal bir fonksiyonun Dirichlet-tersi de çarpımsaldır.

Kanıt: f çarpımsal bir fonksiyon olsun. g, f'nin Dirichlet-tersi olsun. Demek ki $f(1) = 1$ ve $g(1) = 1/f(1) = 1$. Şimdi n ve m aralarında asal iki sayı olsun. $g(nm) = g(n)g(m)$ eşitliğini nm çarpımı üzerine tümevarımla yapacağız. $nm = 1$ iken, $n = m = 1$ ve $g(1) = 1$ olduğundan, $g(1)g(1) = 1\cdot 1 = 1 = g(1) = g(1\cdot 1)$. Demek ki önerme $nm = 1$ için geçerli. Şimdi $nm > 1$ olsun. Tümevarım varsayımından dolayı, u ve v aralarında asalsa ve $uv < nm$ ise, $g(uv) = g(u)g(v)$ eşitliğini biliyoruz. Şimdi bunu kullanarak $g(nm) = g(n)g(m)$ eşitliğini kanıtlayalım:

$$\begin{aligned}
(f \times g)(nm) &= \textstyle\sum_{d|nm} f(d)g(nm/d)\\
&= \textstyle\sum_{u|n,\ v|m} f(uv)g(nm/uv)\\
&= g(nm) + \textstyle\sum_{u|n,\ v|m,\ uv>1} f(uv)g(nm/uv)\\
&= g(nm) + \textstyle\sum_{u|n,\ v|m,\ uv>1} f(u)f(v)g(n/u)g(m/v)\\
&= g(nm) + \textstyle\sum_{u|n,\ v|m} f(u)f(v)g(n/u)g(m/v) - g(n)g(m)\\
&= g(nm) + (f \times g)(nm) - g(n)g(m).
\end{aligned}$$

Şimdi, $(f \times g)(nm)$ terimlerini sadeleştirirsek g'nin çarpımsal olduğu çıkar. □

Bu bulduklarımızı çarpımsal fonksiyonlara kısıtlayarak bir teorem olarak yazalım.

Teorem. *Çarpımsal fonksiyonlar kümesi,*

$$(f \times g)(n) = \textstyle\sum_{d|n} f(d)g(n/d) = \textstyle\sum_{dd'=n} f(d)g(d')$$

kuralıyla tanımlanan $\times$ işlemi altında değişmeli (komütatif, abelyen) bir grup oluştururlar. Bir başka deyişle,

1. *Her f, g çarpımsal fonksiyon için, $f \times g$ de çarpımsal aritmetik bir fonksiyondur.*

2. *Her f, g, h çarpımsal fonksiyonları için,*

$$(f \times g) \times h = f \times (g \times h).$$

3. *Eğer I fonksiyonu*

$$\mathsf{I}(n) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } n = 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanmışsa, o zaman I çarpımsal bir fonksiyondur ve $\times$ işleminin etkisiz elemanıdır, yani her f aritmetik çarpımsal fonksiyonu için,

$$f \times \mathsf{I} = \mathsf{I} \times f = f.$$

4. *Eğer f bir çarpımsal fonksiyonsa, o zaman,*

$$g(1) = 1$$

ve $n > 1$ için,

$$g(n) = -\textstyle\sum_{d|n,\ d\neq n} g(d)f(n/d)$$

olarak n üzerine tümevarımla tanımlanmış g fonksiyonu çarpımsaldır ve $\times$ işlemi için f'nin tersidir, yani

$$f \times g = g \times f = \mathsf{I}.$$

5. *Her f, g çarpımsal aritmetik fonksiyonu için,*

$$f \times g = g \times f.$$

f'nin Dirichlet-tersini f^{-1} olarak yazacağız.

f^{-1} fonksiyonu tümevarımla tanımlandığından, bu fonksiyonu bulmak kolay olmayabilir. Çarpımsal bir f fonksiyonu için f^{-1} fonksiyonunu bulmaya çalışalım.

I_0 (sabit 1 fonksiyonu) incelemeye değer gözüküyor. I_0^{-1}'in nasıl bir fonksiyon olduğunu bulalım. Her çarpımsal fonksiyonun Dirichlet-tersini nasıl buluyorsak öyle bulacağız tabii. Ama I_0^{-1} çarpımsal olduğundan ve $I_0(1) = 1$ olduğundan, I_0^{-1} fonksiyonunun asal p'ler için p^k güçlerinde aldıkları değerleri bulmak yeterli.

Asal p için,

$$\begin{aligned}
I_0^{-1}(p) &= -\textstyle\sum_{d|p,\ d\neq p} I_0^{-1}(d)I_0(p/d)\\
&= -I_0^{-1}(1)I_0(p) = -1\cdot 1 = -1.
\end{aligned}$$

Eğer $k \geq 2$ ise $I_0^{-1}(p^k) = 0$ eşitliğini savlıyorum ve bunu k üzerine tümevarımla kanıtlıyorum:

$$\begin{aligned}
I_0^{-1}(p^k) &= -\textstyle\sum_{d|p^k,\ d\neq p^k} I_0^{-1}(d)I_0(p^k/d)\\
&= -\textstyle\sum_{d|p^k,\ d\neq p^k} I_0^{-1}(d)\\
&= -\textstyle\sum_{i=0}^{k-1} I_0^{-1}(p^i)\\
&= -I_0^{-1}(1) - I_0^{-1}(p) = -1 - (-1) = 0.
\end{aligned}$$

Böylece, I_0^{-1} fonksiyonun çarpımsallığını kul-

$$I_0^{-1}(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \text{ ise} \\ 0 & n \text{ bir kareye bölünürse} \\ (-1)^t & n = p_1p_2\ldots p_t \text{ ise} \end{cases}$$

lanarak,

buluruz. Ama bu aynen bizim Möbius μ fonksiyonumuz. Demek ki $\mu = I_0^{-1}$.

Aslında o kadar hesap yapmaya gerek yoktu, $\mu = I_0^{-1}$ eşitliğini çok daha kolay biçimde başka türlü de kanıtlayabilirdik (Möbius Ters Çevirme Formülü'nü ve $f \times I_0 = f^*$ eşitliğini kullanarak):

$$\begin{aligned}
f^* \times \mu &= f = f \times (I_0 \times I_0^{-1})\\
&= (f \times I_0) \times I_0^{-1} = f^* \times I_0^{-1}
\end{aligned}$$

eşitliğinin her iki tarafını da f^* fonksiyonunun tersiyle çarparsak, $\mu = I_0^{-1}$ eşitliğini buluruz.

Şimdi $\mu = I_0^{-1}$ eşitliğini kullanarak Möbius Ters Çevirme Formülü'nü kanıtlayacağız.

Möbius Ters Çevirme Formülü'nün Bir Başka Kanıtı. Yukarda bulduğumuz $\mu = I_0^{-1}$ eşitliğinden ve f^*'ın tanımı olan $f \times I_0 = f^*$eşitliğinden yola çıkarak Möbius Ters Çevirme Formülü'nü iki satırda kanıtlayabiliriz:

$$\begin{aligned} f &= f \times (I_0 \times I_0^{-1}) = (f \times I_0) \times I_0^{-1} \\ &= f^* \times I_0^{-1} = f^* \times \mu. \end{aligned}$$

İşte Möbius Ters Çevirme Formülü! Geçen yazıda kanıtladığımız bu garip görünüşlü eşitlik Dirichlet çarpımının ışığı altında çok daha anlaşılır bir şekle büründü, Dirichlet çarpımı sayesinde basit cebirsel bir işlemle çıkıverdi.

Bir Uygulama Daha. Şimdi $\varphi \times d$ çarpımını uzun uzun hesaplara girmeden bulmaya çalışalım. Önce φ ve d fonksiyonlarını daha basit biçimde bulalım.

Önce φ'den başlayalım işe. Geçen yazıda kanıtladığımız bir eşitliği hatırlayalım: $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$. Bu eşitlik aslında $\varphi \times I_0 = I_1$ demek, yani

$$\varphi = I_1 \times I_0^{-1}.$$

Bunu aklımızda tutalım, birazdan gerekecek.

Şimdi d'yi ele alalım. $d = \sigma_0$ eşitliğini anımsayalım. σ_r fonksiyonu zaten bir Dirichlet çarpımı şeklinde ifade edilmeye uygun olarak tanımlanmıştı:

$$\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$$

eşitliğinden,

$$\sigma_r = I_r \times I_0$$

çıkar. Özel bir durum olan d fonksiyonu için de bu eşitlik

$$d = \sigma_0 = I_0 \times I_0$$

eşitliğine dönüşür.

Artık $\varphi \times d$ fonksiyonunu basit bir cebirsel işlemle bulabiliriz:

$$\begin{aligned} \varphi \times d &= (I_1 \times I_0^{-1}) \times (I_0 \times I_0) \\ &= (I_1 \times (\, I_0^{-1} \times I_0)) \times I_0 \\ &= (I_1 \times \mathrm{I}\,) \times I_0 = I_1 \times I_0 = \sigma. \end{aligned}$$

Demek ki $\varphi \times d = \sigma$.

Alıştırmalar

1) $\lambda^{-1}(1) = 1$, asal bir p için $\lambda^{-1}(p) = 1$ ve eğer $k > 1$ ise $\lambda^{-1}(p^k) = 0$ eşitliklerini kanıtlayın. $\lambda = \mu^2$ eşitliğini kanıtlayın. (Buradaki μ^2, μ fonksiyonunun kendisiyle normal çarpımıdır.

2) Tüm k'ler için I_k^{-1} fonksiyonunu bulun. ♠

Lejeune Dirichlet (1805-1859)

1805-1859 arası yaşamıştır. Belçika asıllıdır. 12 yaşında Almanya'da liseye başlar başlamaz matematiğe tutulur, cep harçlığını matematik kitaplarına harcar. Uslu, terbiyeli, çalışkan bir öğrenciydi. Ayrıca tarihe de ilgisi vardı. Yanından hiç ayırmadığı Gauss'un *Disquisitiones arithmeticae* kitabıyla 16 yaşında üniversite okumaya Paris'e gitti. Fourier, Laplace, Legendre, Poisson gibi çağının ünlü matematikçilerinin öğrencisi oldu.

1823'te, daha 18 yaşındayken, Fermat'nın Teoremi'ni $n = 5$ için kanıtlamasıyla Dirichlet'nin adı matematik dünyasında ilk kez duyuldu. Teorem daha önce 3 ve 4 için Euler ve Fermat tarafından kanıtlanmıştı. Dirichlet daha sonra teoremi $n = 14$ için de kanıtlamıştır.

1825 sonunda Almanya'ya gider. 1828'den 1855'e kadar Berlin Üniversitesi'nde profesör olarak bulunur. 1855'te Göttingen'e Gauss'un ölümüyle boşalan pozisyona atanır.

1837'de eğer a ve b birbirine asalsa, $a + nb$ biçiminde yazılan sonsuz sayıda asalın olduğunu kanıtlar ve böylece analitik sayılar kuramını başlatan kişi olarak anılmaya hak kazanır. Gene aynı yıl, fonksiyonun bugün bildiğimiz tanımını önerir. Dirichlet ayrıca Fourier serileri konusunu da başlatan kişidir. Çalışmaları cebirsel sayılar kuramından uygulamalı matematiğe kadar pek çok alana yayılmıştır.

Matematikçi Hirst Dirichlet için şöyle demiştir: *Uzun boylu*, "*sırık gibi*" *denilenlerdendi. Bıyığı ve griye çalan bir sakalı vardı.* (*Dirichlet* 45 *yaşlarındaydı o sırada.*) *Sert bir sesi vardı. Kulakları iyi işitmezdi. Elinde kahvesi ve purosuyla pek yıkanmamış bir hali vardı. Zamanı unuturdu. Birden saatini çıkarır, saatin üçü geçtiğini görür ve başladığı tümceyi bitirmeden fırlardı.* ♠