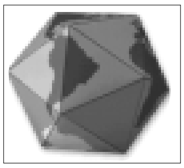
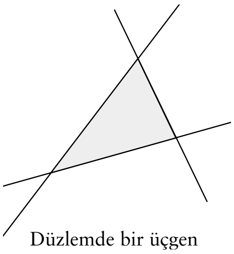


# Küreselleşen Geometri

## 3 - İstanbul-New York-Kuzey Kutbu Üçgeni

Tosun Terzioğlu*
*tosun@sabanciuniv.edu.tr*

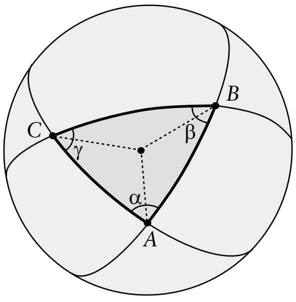
Düzlemde bir üçgenin iç açılarının toplamının 180° olduğunu biliyoruz. Peki ya bir kürede? Bir kürenin üstündeki üçgenlerin iç açılarının toplamı kaç olur? Bu dizinin bu son yazısında bu soruyu yanıtlayacağız ve küresel üçgenin iç açılarıyla yüzey alanı arasındaki önemli ve şaşırtıcı bir ilişkiyi kanıtlayacağız.



Düzlemde bir üçgen

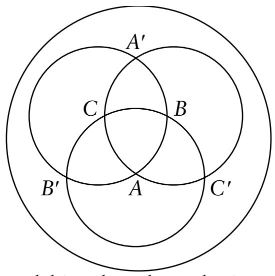
**Küresel Üçgen.** Düzlemde, ikişer ikişer kesişen ama üçünün birden aynı noktada kesişmediği üç değişik doğru bir üçgen oluşturur. Kürede doğru olmadığından aynı tanımı kürede veremeyiz. Ancak kürede benzer bir tanım verebiliriz:

Düzlemde doğrunun oynadığı rolü kürede büyük çemberler oynar (anımsatalım: "büyük çemberler" merkezi kürenin merkezi olan çemberlerdir), şöyle ki: düzlemde iki nokta arasındaki en kısa yol bu iki noktadan geçen doğrunun üstündedir, kürede ise iki nokta arasındaki en kısa yol bu iki noktadan geçen büyük çemberin üstündedir. Bunu geçen sayımızda (sayfa 65-69) popüler bir matematik dergisinde olabilecek en matematiksel biçimde kanıtlamıştık. Bu gözlemden hareketle, bildiğimiz üçgen tanımında düzlem yerine küre, doğru yerine büyük çember dersek, doğal bir "küresel üçgen" kavramına varırız: Üç büyük çember tarafından belirlenen bölgelerden birine ***küresel üçgen*** dememiz gayet doğal. Bu çemberler $A$, $B$ ve $C$ noktalarında kesişiyorsa, $ABC$ üçgeninden söz edeceğiz.




Kürede üç büyük çember tarafından belirlenen küresel üçgen ve üçgenin $\alpha$, $\beta$ ve $\gamma$ iç açıları.

Ama dikkat! Kürede, üç büyük çember, bir değil, tam sekiz tane küresel üçgen belirler. Nitekim iki büyük çember birbirine karşıt iki noktada kesiştiğinden, eğer üç büyük çemberin kesişim noktalarına $A$, $A'$, $B$, $B'$, $C$, $C'$ dersek (buradaki $A$ ve $A'$ noktaları iki büyük çemberin kesiştiği karşıt noktalardır; $B$, $B'$ ve $C$, $C'$ noktaları da öyle), o zaman bu üç büyük çember $ABC$, $A'BC$, $AB'C$, $ABC'$, $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$, $A'B'C'$ küresel üçgenlerini belirler. (Bir karpuz üç bıçak darbesiyle sekiz üçgensel dilime ayrılır.) Bu sekiz üçgeni yukardaki şekilde olduğu gibi biraz daha simgesel olarak gösterebiliriz.




Küredeki üç büyük çemberin oluşturduğu sekiz küresel üçgenin simgesel (ve gerçekdışı) bir resmi. Büyük daire kürenin yüzünü temsil ediyor. En dıştaki çember aslında tek bir noktadır, kürenin "en arkadaki" noktası.

Düzlemde doğrusal olmayan üç değişik nokta bir üçgen oluşturur. Kürede de aynı şey doğrudur. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz. Ama örneğin üç noktanın ikisi karşıt noktalarsa o zaman bu üç nokta aynı büyük çember üzerinde bulunurlar ve bir üçgen oluşturmazlar.

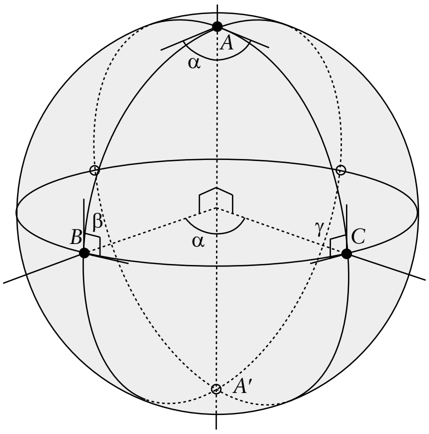
**Kürenin Alanı.** Yarıçapı $r$ olan kürenin yüzey alanı $4\pi r^2$'ye eşittir. Bu formül bugüne dek MD'de kanıtlanmadı, okullarda da kanıtlanmaz, ama çok zor değildir, sadece biraz zordur, günün birinde MD'de kanıtlanır. Şimdilik bu formüle inanalım. (Ama bir sonraki sayfada çemberin çevresinin $2\pi r$ olduğu kanıtlanacak; daha doğrusu, $\pi$ sayısı çemberin çevresi $2\pi r$ olacak biçimde tanımlanacak.)

Dünyamızın uydusu olan ayı bir model olarak alalım. Ayı her gece tam görmeyiz. Tam gördüğümüzde, yani tam mehtapta, parlak yüzeyin (görünen değil, gerçek) alanı $2\pi r^2$'ye eşit olur. Yarım ayın ise alanı $\pi r^2$'dir. Buradaki $r$ tabii ki ayın yarıçapıdır.

Kürenin kuzey ve güney kutuplarını birleştiren iki büyük çember ele alalım. (Bkz. bir sonraki sayfadaki şekil.) Eğer bu iki çemberin kuzey (veya güney) kutbundaki açısına $\alpha$ dersek, çemberlerin arasında kalan ***dilimin alanı*** $2\alpha r^2$'ye eşittir, çünkü $4\pi r^2$ olan toplam küresel alanı $2\pi$ radyana böler-

* Sabancı Üniversitesi öğretim üyesi.

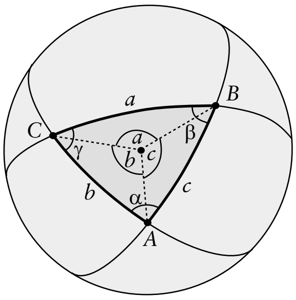
sek 1 radyanlık küresel dilimin alanını buluruz ($2r^2$), bunu $\alpha$'yla çarparsak $\alpha$ radyanlık dilimin alanını buluruz ($2\alpha r^2$).




$\alpha$ açılık $ABA'C$ dilimi; alanı $2\alpha r^2$.

Bariz ama önemli bir olgu daha: Eğer ($A$, $A'$), ($B$, $B'$), ($C$, $C'$) karşıt noktalardan oluşan nokta çiftleriyse, $ABC$ ve $A'B'C'$ üçgenlerinin alanları birbirine eşittir, çünkü üçgenlerden biri kürenin merkezine göre diğerinin simetriğidir.

**Küresel Üçgenin Açıları.** Aşağıdaki şekilden de görüleceği üzere, küresel bir üçgen altı açı belirler:




Birim kürede üç büyük çember tarafından belirlenen küresel üçgen ve üçgenin $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ köşe (iç) açıları ve $a$, $b$, $c$ kenar açıları.

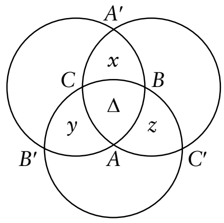
1) $A$, $B$ ve $C$ köşelerindeki ***köşe açıları*** (ya da üçgenin ***iç açıları***) yani büyük çemberin teğetleri arasındaki açılar. Bunları sırasıyla $\alpha$, $\beta$ ve $\gamma$ ile gösterelim.

2) Bir de $BC$, $CA$ ve $AB$ yayları var, bunlar da esasında birer açı. $BC$ yayına $a$, $CA$ yayına $b$ ve $AB$ yayına da $c$ dersek, eğer kürenin yarıçapı 1'se örneğin $a$ açısı $BC$ yayını merkezden gördüğümüz açıdan başka birşey değil. $a$, $b$ ve $c$'ye de ***kenar açıları*** diyelim.

**Girard Teoremi.** $ABC$ üçgeninin alanını $\Delta$ ile gösterelim. Bu bölümde $\Delta$ ile $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ köşe açıları arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Önce özel bir hale bakalım: $A$ kutup noktası olsun, $B$ ve $C$ noktaları da ekvatorda olsunlar. $\beta = \gamma = 90^\circ = \pi/2$ radyan olduğunu görmek kolay. Bu özel halde, $\Delta$, $ABCA'$ diliminin alanının yarısına eşittir, yani $\Delta = 2\alpha r^2/2 = \alpha r^2$.

Küresel üçgenlerin köşe açılarıyla alanı arasındaki ilişkiyi genelde araştırmak için şimdi köşe noktaları $A$, $B$, $C$ olan herhangi bir küresel üçgen düşünelim. İlkin $ABCA'$ dilimine bakalım. Burada $A'$ her zaman olduğu gibi $A$'nın karşıt noktası. Bu dilimin alanı biraz önce gördüğümüz üzere $\alpha r^2$'ye eşit.




Şimdi yandaki şekilden takip edin. $BCA'$ üçgeninin alanına $x$ diyelim. $BACA'$ üçgenine bakarak,

$$2\alpha r^2 = \Delta + x$$

eşitliğini buluruz.

Şimdi bir de $ABCB'$ dilimine bakalım. Bu dilimin alanı $ACB'$ üçgeninin alanı $y$ ise, aynen yukardaki gibi,

$$2\beta r^2 = \Delta + y$$

olur. Aynı şekilde $ABC'$ üçgeninin alanını $z$ ile gösterirsek

$$2\gamma r^2 = \Delta + z$$

elde ederiz. Yukarda elde ettiğimiz üç eşitliği toplayarak

$$3\Delta + x + y + z = 2(\alpha + \beta + \gamma)r^2$$

buluruz.

Bir üçgenin köşelerinin karşıtlarını alarak elde ettiğimiz yeni üçgenin ilkiyle eşit alana sahip olduğunu yukarda görmüştük. Dolayısıyla $A'BC'$ üçgeninin alanı $AB'C$ üçgenine yani $y$'ye eşit. Bu ve benzeri eşitliklerden, aşağıdaki şekilden de görüleceği üzere

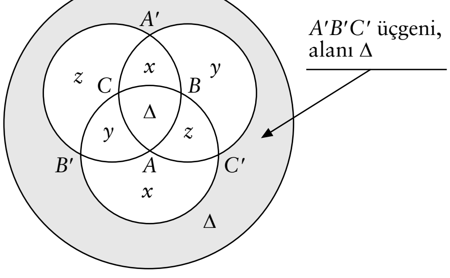
$$\Delta + x + y + z = 2\pi r^2$$

formülü çıkar. Son iki eşiklikten de,

$$\Delta + \pi r^2 = (\alpha + \beta + \gamma)r^2$$

çıkar. Aşağıdaki teoremi kanıtladık:

**Girard Teoremi.** *Köşe açıları $\alpha$, $\beta$ ve $\gamma$ olan bir küresel üçgenin alanı $\Delta$ ise* $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \Delta/r^2$.




Kürenin alanı $4\pi r^2$'dir, ayrıca $2(\Delta + x + y + z)$'dir.

Girard Teoremi'nin formülünden, küresel üçgenlerin köşe açılarının toplamının mutlaka 180°'den fazla olduğu anlaşılıyor. Ayrıca, küresel üçgenin alanı da sadece kürenin yarıçapına ve köşe açılarının toplamına bağlı.

Burada $r$'yi sonsuz alırsak, daha doğrusu $r$'yi sonsuza götürürsek, $\Delta/r^2$ formülden kaybolur ve

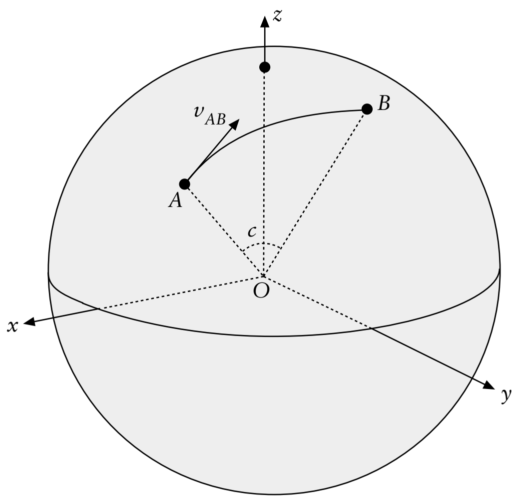
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

eşitliğini buluruz, aynen düzlemdeki meşhur sonuç: Bir üçgenin iç açılarının toplamı $\pi$ radyandır. Nitekim düzlemi sonsuz yarıçaplı bir küre olarak düşünebiliriz!

**Büyük Çembere Teğet.** Geçen sayıdaki yazımızda (sayfa 67), $A$ ve $B$ noktalarından geçen büyük çember yayına $A$'dan teğet olan $v_{AB}$ birim vektörünün koordinatlarını bulmuştuk. Anımsatalım:

$$v_{AB} = \csc c\ OB - \cot c\ OA. \qquad (*)$$

Buradaki $O$ kürenin merkezidir; $c$ de $AOB$ açısıdır.

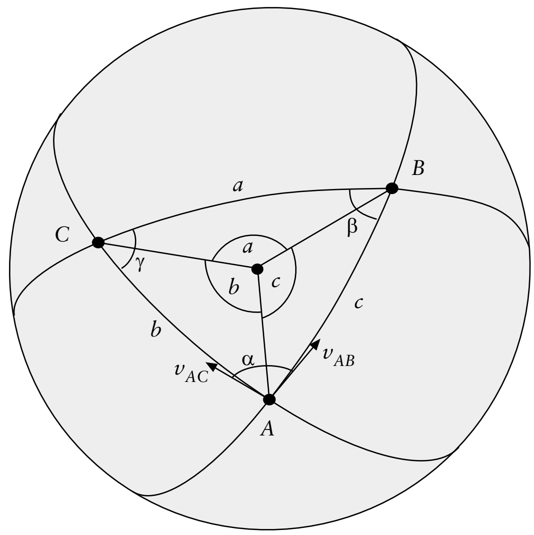



$v_{AB}$, $AB$ büyük çember yayına $A$'dan teğet olan birim vektör.

**Kürede Kosinüs Kuralları.** Yukarda küresel bir üçgenin altı değişik açı belirlediğini göstermiştik: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ köşe açıları ve $a$, $b$, $c$ kenar açıları. Bu altı açı arasında bir ilişki olmalı. Bu bölümde bu ilişkileri bulacağız. $(\alpha, \beta, \gamma)$ ve $(a, b, c)$ üçlülerinden birinin diğerini belirlediğini göstereceğiz. Böyle bir ilişkiyi ortaya çıkarmak için standart, yani yarıçapı 1 olan küreyi almanın bir sakıncası yok, öyle yapalım.

Standart küremizdeki $ABC$ üçgenine geri dönelim. Kenar açılarını iç çarpımla

$$\cos a = (OB, OC),$$
$$\cos b = (OA, OC),$$
$$\cos c = (OA, OB)$$




olarak yazalım. Köşe açısı olan $\alpha$'yı ise

$$\cos \alpha = (v_{AC}, v_{AB})$$

olarak yazabiliriz, çünkü $v_{AC}$ vektörü $A$ noktasında $C$ noktasına büyük çemberin yönünü vermekte, yani $\alpha$ bu iki yön arasındaki açıdan başka birşey değildir. (*)'dan dolayı,

$$v_{AB} = \csc c\ OB - \cot c\ OA.$$
$$v_{AC} = \csc b\ OC - \cot b\ OA.$$

olduğunu görelim ve şu iç çarpıma bakalım:

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= (v_{AB}, v_{AC}) \\
&= (\csc c\ OB - \cot c\ OA, \csc b\ OC - \cot b\ OA) \\
&= \csc c \csc b\ (OB, OC) - \csc c \cot b\ (OB, OA) \\
&\quad - \cot c \csc b\ (OA, OC) + \cot c \cot b\ (OA, OA). \\
&= \csc c \csc b \cos a - \csc c \cot b \cos c \\
&\qquad - \cot c \csc b \cos b + \cot c \cot b \\
&= \csc c \csc b \cos a - \csc c \cot b \cos c.
\end{aligned}$$

Trigonometrik tanımları kullanıp sadeleştirirsek,

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

eşitliğini elde ederiz.

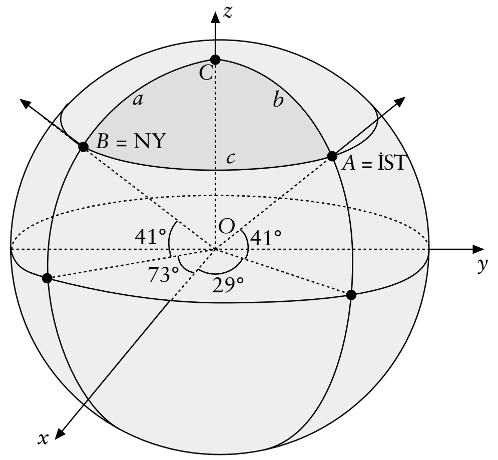
Bu sonuca ***kenarlar için kosinüs kuralı*** diyeceğiz. Formülümüz bize kenar açılarıyla bir köşe açısı arasındaki ilişkiyi veriyor. Bu formül sayesinde eğer küresel üçgenin kenar açılarını biliyorsak köşe açılarını da buluruz.

Biraz dualite kullanarak küresel üçgenlerin açıları hakkında başka bir ilginç teorem daha kanıtlayabiliriz (bkz. [2, 3]):

$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma.$$

***Köşe açıları için kosinüs kuralı*** adını vereceğimiz bu formül sayesinde, eğer küresel üçgenin köşe açılarını biliyorsak kenar açılarını da buluruz.

**İstanbul-New York-Kuzey Kutbu Üçgeni.** Şimdi yerküre üzerinde özel bir üçgene bakalım. Üçgenin *A* köşesi İstanbul, *B* köşesi New York ve *C* köşesi de kuzey kutbu olsun. İstanbul'un enlemi 41º kuzey ve boylamı da 29º doğu. Bunlar yaklaşık sayılar tabii, derecenin altmışta biri olan dakikalarını gözönüne almadık. Aynı şekilde New York da 41º kuzey enleminde ve boylamı da 73º batı. Yani iki şehir aynı enlemde bulunuyorlar.




Dünyamızı standart küre gibi düşünelim. *A* ve *B* köşelerinin karşısında olan *a* ve *b* kenarları 90º – 41º = 49º veya 49π/180 radyan. *c* kenarını bir önceki sayımızda (sayfa 66) 1,2535 radyan olarak bulmuştuk. Kenarlar için

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

kosinüs kuralını kullanırsak, basit bir aritmetik bize $\cos\alpha = 0{,}39077$ veya $\alpha = 67º$ verir. Demek ki, kutupdaki $\gamma$ köşe açısı 102º olduğundan, üçgenimizin köşe açılarının toplamı

$$67 + 102 + 67 = 236°.$$

Bundan 180° çıkarırsak 56° buluruz. Yeryüzünün yarıçapı da yaklaşık 6378 km olduğundan, İstanbul, New York ve kuzey kutbu arasında kalan üçgenin alanının Girard Teoremi'yle

$$(56\pi/180) \times 6378^2 \approx 39.590.000 \text{ km}^2$$

olduğunu görürüz. ♠

**Kaynakça**


[1] Dava Sobel ve William J.H. Andrewes, **Boylam**, Çev. M. Göktepeli, TÜBİTAK Popüler Yayınları, 2004.
[2] Roger Fenn, **Geometry**, Springer 2001.
[3] George A. Jennings, **Modern Geometry with Applications**, Springer 1994.


Küre üzerinde yaptıklarımızı gözünüzde canlandırmakta güçlük çekiyorsanız internette şu adrese bir bakmanızı öneririm: \http:/math.rice.edu/~pcmi/sphere/gos4.html\#1\