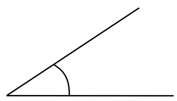
Matematik Dünyası, 2005 Bahar

Geometri Köşesi

Açı Ölçmek

Ali Nesin
anesin@bilgi.edu.tr

Teorem kanıtlamak zordur da matematiksel bir tanım bulmak kimileyin daha da zordur. Bu yazıda "açı ölçüsü"nün matematiksel tanımını vereceğiz. Derece ya da radyan, hangi birim cinsinden yazılırsa yazılsın, uygulamada bir gönyeyle ölçülen açıyı bu yazıda kuramsal olarak tanımlayıp nasıl hesaplandığını göstereceğiz.



Bu açı kaç derecedir? Bu açının - örneğin - 34 derece olması ne demektir?

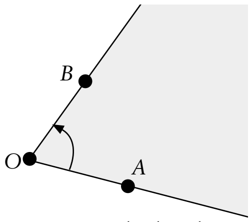
"Ben bir açının ölçüsünün ne demek olduğunu zaten biliyorum, ohooo biz ne açılar ölçtük!" diyenler bu yazıyı özellikle okusunlar, çünkü bu yazı özellikle onlar için kaleme alınmıştır.

Soracağımız soru ve dile getireceğimiz sorun Eski Yunanlıların akıllarının ucundan bile geçmezdi. Matematik bugünkü kadar matematiksel değildi o zamanlar. Eski Yunanlılar olsa olsa 180 dereceyi tanımlarlar, ardından verilen bir açının 180 derecelik açıyı böldüğü orana (oran ne demekse!) göre o açının ölçüsünü tanımlayabilirlerdi.

Şunu da hemen belirtelim ki, bir açının ölçüsünü tanımlamanın tek yolu burada sunacağımız yöntem değildir. Bir başka sayımızda, belki de bir sonrakinde (kimbilir!) aynı kavramı güç serileriyle (bkz. MD-2004-II, sayfa 32-38) tanımlayacağız.

Açı. Önce konumumuzu belirleyelim. Bildiğimiz $\mathbb{R}^2$ Öklid düzlemindeyiz. Açılarımız da bu düzlemde yer alacak.

Konumumuzu belirledikten sonra açıyı tanımlayalım: Bir ***açı***yı, aşağıdaki şekildeki gibi, düzlemde belli bir sırayla alınmış üç nokta olarak tanımlayabiliriz. Eğer sıralı noktalarımız (sırasıyla) *A*, *O* ve *B* ise, *AOB* açısından sözedeceğiz.



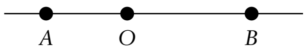
A, *O* ve *B* noktalarıyla verilmiş *AOB* açısı

Bu yazıda açılarımızın ölçüleri hep $0 \le \theta < 360°$ eşitsizliklerini sağlayacak.

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

Açıyı böylece tanımladıktan sonra, verilmiş bir açıyı ölçelim... Örneğin yukardaki şekilde verilen açıyı ölçelim, yani $m(AOB)$'yi bulalım. Hayır yanlış söyledim... Ölçmeyelim (biz mühendis miyiz!), sadece o açının ölçüsünü tanımlayalım, tanımlayalım ki isteyen ölçebilsin...

180 ve 0 Derecelik Açılar. Bazı açıların kaç derece olduklarını bulmak kolaydır. Örneğin eğer *A*, *O* ve *B* noktaları doğrusalsa, *AOB* açısı ya 180 ya da 0 derecedir, *O* noktasının *A* ve *B* noktalarının arasında olup olmamasına göre değişir. Neden böyledir? Tanımdan dolayı! 0 ve 180 derecelik açılar böyle tanımlanmıştır. Biz de bu tanımı kabul edelim.



180 derecelik *AOB* açısı

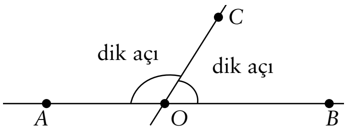
0 derecelik *AOB* açısı

90 Derecelik Açı. Şimdi de 90 derecelik açıyı, yani dik açıyı tanımlayalım.

90 derecelik açıyı da tanımlamak o kadar zor değildir ama çok da kolay değildir. "Bir noktadan bir doğruya dik inerim, olur biter" geçerli değildir, çünkü 90 dereceyi tanımlamadan "dik inme"nin ne demek olduğu belli değildir. "İşte böyle yaparım" diye elle göstermek de olmaz. "180 derecelik açıyı tam ortadan ikiye bölerim" yanıtı doğru yanıta daha yakındır, ama bu da muğlak bir tanımdır.

"90 derecelik açının ne demek olduğunu ben zaten biliyorum; neden bildiğim bir şeye kafa patlatayım" diyenler bu derginin kapağını bir daha açmamak üzere kapatsınlar; gönülleri rahat olsun: ne kaybettiklerini hiçbir zaman bilemeyecekleri gibi bunun eksikliğini de duymayacaklardır. Sonuç olarak milyarlarca insan bir açının ölçüsünün ne demek olduğunu bilmeden yaşayıp gidiyor.

Geçen sayımızda Hilbert'in Öklid geometrisi için bulduğu aksiyomlarını vermiştik. Bunlar belli bir sayıdaydı, tam 20 tane... Bu 20 aksiyomu vermeden önce Hilbert'in kabul ettiği ***tanımsız terim***lerin listesini vermiştik. Bunlardan biri de ***eşlik*** adı verilen bir terimdi. "İki açı eştir" sözü "iki açının ölçüleri eşittir" anlamına ama tanımsız olarak kullanılmıştı. Bir açının kaç derece olduğunun ne demek olduğunu (şimdilik) bilmesek de, iki açının ölçülerinin eşit olup olmadığını (şimdilik) bildiğimizi varsayalım. Elimizde bu eşlik kavramıyla 90 dereceyi tanımlayabiliriz. Bunu geçen sayımızda şöyle yapmıştık (sayfa 77): "*A*-*O*-*B* ilişkisini sağlayan üç nokta alalım, yani *O* noktası *A* ve *B* noktalarının arasında olsun. *C*, *AB* doğrusu üstünde olmayan bir nokta olsun. Eğer *AOC* ve *COB* açıları eşse, bu açıların her birine ***dik açı*** denir." Buradaki arasındalık terimi de Hilbert'in kabul ettiği tanımsız terimlerden biridir, "bir nokta diğer iki noktanın arasındadır" anlamında ama tanımsız olarak kullanılır.

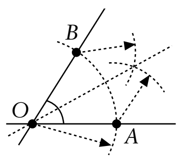


Görsel dikliğin matematiksel hiçbir anlamı olmadığından dik açıları özellikle "dik" çizmedik.

Dik açının ölçüsüne 90 derece diyelim. (İlerde sadece dik açının değil, her açının ölçüsünü tanımlayacağız; o zaman dik açının ölçüsünün gerçekten 90 derece olduğu kanıtlanmalı.)

Tabii sadece 90 derecenin tanımını vermek yetmez, bir de ayrıca ölçüsü 90 derece olan bir açının olduğunu kanıtlamak gerekir. Konumuz bu olmadığından böyle bir kanıta girişmeyeceğiz.

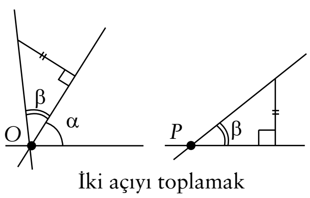
Açıyı İkiye Bölmek. Dik açının tanımındaki yöntemden esinlenerek, herhangi bir açı verilmişse, bu açının "yarısı" da tanımlanabilir, hatta ölçüsü α olan bir açıdan hareketle ölçüsü α/2 olan bir açı pergel ve (çentiksiz) cetvel yardımıyla yandaki şekilde görüldüğü gibi inşa edilebilir. Dolayısıyla α derecelik bir açı tanımlanmışsa, α/2 derecelik açı da oldukça somut biçimde tanımlanabilir.



OAB açısını ikiye bölmek

Burada bir paragraf açıp herhangi bir açının pergel ve çentiksiz cetvelle üçe bölünemeyeceğini de belirtelim. 180 derece gibi bazı açılar üçe bölünebilir ama her açı, örneğin 60 derecelik açı üçe bölünemez. Bu, 200 yıldan beri bilinen bir teoremdir. Bir gün MD'de kanıtlarız.

Açıları Toplamak. Ayrıca eğer ölçüleri α ve β olan iki açı verilmişse, ölçüsü α + β olan bir açının varlığı da kanıtlanabilir, hatta böyle bir açı pergel ve çentiksiz cetvel yardımıyla kolaylıkla çizilebilir. Bu çizimi okura bırakıyoruz.



İki açıyı toplamak

Yukarda açıkladığımız geometrik yöntemle, 180 derecelik açıdan hareketle, açıları sürekli ikiye bölerek 90, 45, 22,5, 11,25, 5,625 derecelik açılar tanımlanabilir. Bunları toplayarak örneğin 22,5 + 11,25 = 33,75 derecelik açıları da tanımlayabiliriz. Ama bu yöntemle sadece *n* ve *m* doğal sayıları için $m \times 180/2^n$ derecelik açılar tanımlanabilir.

Eşkenar üçgenden hareketle 60 derecelik açıyı da tanımlayabiliriz. Dolayısıyla 30, 15, 7,5 derecelik açılar da tanımlanabilir.

Bu geometrik yöntemle **tüm** açıları tanımlayamayacağımız herhalde anlaşılmıştır. Her açı için ayrı bir tanım vermeye zamanımızın yetmeyeceği gibi, bu yöntemle her açının tanımlanamayacağı da kanıtlanabilir. Örneğin $2^{1/3}$ derecelik bir açı nasıl tanımlanır? Ya da bir açının ölçüsünün $2^{1/3}$ derece olduğunu nasıl anlarız? Daha da basit bir soru: 1 derecelik açı ne demektir?

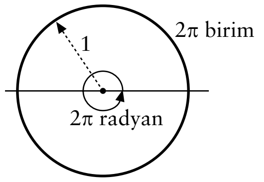
İşte bu yazıda bir açının ölçüsünü matematiksel olarak tanımlayacağız.

Pi Sayısı ve Radyan. Açılarımızı derece cinsinden değil de ***radyan*** cinsinden tanımlayacağız. Hatırlatalım: 180 derece π radyana eşittir ve daha genel olarak α derece $\alpha\pi/180$ radyana eşittir.

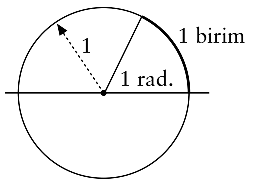
Yukarda π'den bahsettiğimize bakmayın, bu yazıda π sayısını da tanımlayacağız. Ama tanıma giden yolu anlamak için en azından başlangıçta π sayısının anlamını bildiğinizi varsayacağız. Daha sonra, biçimsel matematik yaptığımızda π'yi matematiksel olarak tanımlayacağız. Hatta π'nin 4'ten küçük bir sayı olduğunu bile kanıtlayacağız! (Siz hiç okulda bu ya da buna benzer bir eşitsizliğin kanıtını gördünüz mü! Okullarda π, 3,14 gibi bir sayı olarak belletilir genç dimağlara! Ama Matematik Dünyası sayesinde gençlerimiz artık gerçeğe ulaşıyorlar...)

Fikir. Bir açının ölçüsünü nasıl tanımlayacağımızı anlatalım. Açının ölçüsünü tanımlamak için düzlemdeki eğrilerin uzunluğunu tanımlamamız gerektiğini göreceğiz.

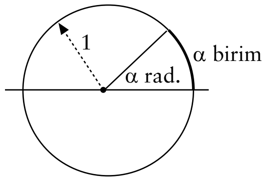
"Bilindiği üzere" *r* yarıçaplı bir çemberin uzunluğu $2\pi r$'dir. Eğer yarıçap 1 ise, yani $r = 1$ ise, ki o zaman çembere ***birim çember*** denir ve o zaman çemberin uzunluğu 2π olur. (Bir sonraki sayfadaki ilk şekil). Demek ki 2π radyan için 2π'lik bir



2π radyanlık (yani 360 derecelik) bir açı için birim çemberin uzunluğu 2π birimdir.



1 radyanlık (yani $360/2\pi$ derecelik) bir açı için birim çember parçasının uzunluğu 1 birimdir.



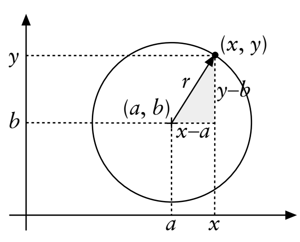
α radyanlık (yani $360\alpha/2\pi$ derecelik) bir açı için birim çember parçasının uzunluğu α birimdir.

çember uzunluğu bulduk. O zaman 1 radyanlık bir açıyla sınırlanan birim çember parçasının uzunluğu da 1 birim olur. (2π radyan için 2π birim uzunluk elde etmişsek, 1 radyan için 1 birim uzunluk elde ederiz; 2π'lik uzunluğu 2π radyana bölün. Soldaki ikinci şekil). Dolayısıyla α radyanlık bir açıyla sınırlanan birim çember parçasının uzunluğu α birim olur. (1 radyan için 1 birim uzunluk elde etmişsek, α radyan için α birim uzunluk elde ederiz. Soldaki üçüncü şekil).

Görüldüğü gibi, birim çember üstünde, açının ölçüsüyle açının belirlediği çember uzunluğu (her ne kadar biri radyan diğeri birim uzaklık cinsinden olsa da) birbirine eşit çıkıyor... Dolayısıyla eğer bir çember parçasının uzunluğunu tanımlayabilirsek, o zaman açının ölçüsünü de tanımlayabiliriz.

Bundan böyle amacımız bir çember parçasının uzunluğunu hesaplamak. Elbette ip gibi matematiğe yabancı maddeler kullanamayız.

Çember. ***Çember***, herkesin bildiği üzere, bir düzlemde ***merkez*** adı verilen bir noktaya eşit uzaklıkta olan noktalar kümesidir. Gene herkesin bildiği üzere çemberin noktalarının merkeze olan sabit uzaklığına ***yarıçap*** denir. Merkezi (a, b) noktasında, r birim yarıçaplı bir çemberin denklemi,



Gri dik üçgene Tales Teoremi'ni uygularsak $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ buluruz.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

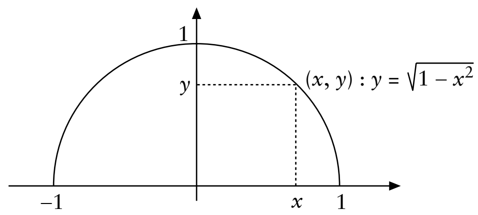
dir. Bu, Tales Teoremi'nden hemen çıkar. Eğer merkez $(0, 0)$ noktası ve yarıçap 1 birim ise, bu denklem,

$$x^2 + y^2 = 1$$

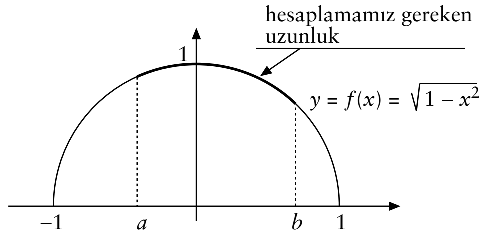
biçimini alır elbette. Bir de ayrıca eğer çemberin üst tarafındaysak, o zaman y'yi x cinsinden yazabiliriz:

$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2}\,.$$

Böylece y, x'in bir fonksiyonu olur, yani her x için $x^2 + y^2 = 1$ eşitliğini sağlayan bir ve bir tek y pozitif sayısı vardır. Aşağıda bu fonksiyonun grafiğini çizdik. Fonksiyon sadece -1'le 1 arasındaki sayılar için tanımlanmıştır (yoksa $1 - x^2$ negatif bir sayı olur ve karekökü alınamaz.) Bu fonksiyonun grafiğinin bir parçasının uzunluğunu tanımlayıp hesaplamamız gerekiyor. Eğer bunu yapabilirsek, sadece yarım çember değil, tam çember üstündeki bütün yayların uzunluğunu hesaplayabiliriz.

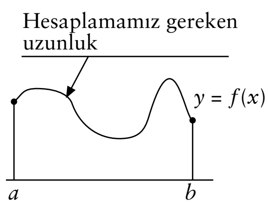


$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonun grafiği



Bir Fonksiyonun Grafiğinin Uzunluğu Sorusu. f, $[a, b]$ aralığından gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon olsun. Yukardaki durumda

$$y = \sqrt{1-x^2}\,.$$

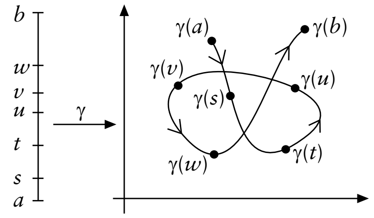


Amacımız f'nin grafiğinin uzunluğunu hesaplamak.

Bir fonksiyonun grafiği, aslında $\mathbb{R}^2$ düzleminde çizilmiş bir "eğri"dir. (Eğrinin matematiksel tanımını birazdan vereceğiz. Bir eğri kendi üstünden geçebilir ya da geri gelebilir ama bir fonksiyonun grafiği bu tür cilveler yapamaz. Bkz. bir sonraki sayfadaki şekil.)

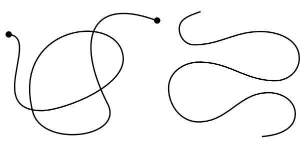
Bir fonksiyonun grafiğinin uzunluğunu bulacağımıza bir eğrinin uzunluğunu bulursak daha genel bir şey yapmış oluruz.

Eğrinin matematiksel tanımı şöyle: $\mathbb{R}^2$'de bir ***eğri***, belli bir $[a, b]$ kapalı aralığından $\mathbb{R}^2$'ye giden bir γ fonksiyonu ya da böyle bir γ fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$'deki $\gamma([a, b])$ imgesi olarak tanımlanır. (Genellikle eğriyi veren fonksiyonun sürekli olduğu varsayılır ama bizim böyle bir koşulumuz olmayacak.)



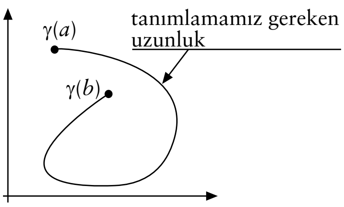
Bir γ eğrisi. $[a, b]$ aralığının her sayısı belli bir an olarak algılanabilir. O zaman γ eğrisini $\gamma(a)$'dan $\gamma(b)$'ye giden bir parçacığın yolu olarak yorumlayabiliriz.

Eğer f, belli bir $[a, b]$ kapalı aralığından R'ye giden bir fonksiyonsa, f'nin grafiğini, bir x sayısını R^2'nin $\gamma(x) = (x, f(x))$ noktasına götüren bir eğri olarak görebiliriz. Dolayısıyla her fonksiyon grafiği bir eğridir, ama her eğri R'den R'ye giden bir fonksiyonun grafiği değildir.



Bir fonksiyonun grafiği olmayan iki eğri

Bir eğrinin uzunluğunu ölçeceğiz. Ama nasıl? Uzunluk hesaplamak istiyoruz ama uzunluk denen şey nedir? Önce uzunluğu tanımlamamız gerekiyor. Üstelik herhangi bir şeyin değil, çok karmaşık olabilecek bir eğrinin uzunluğunu tanımlamalıyız.



İki Nokta Arasındaki Mesafe. Bir eğrinin uzunluğunu tanımlamadan önce iki nokta arasındaki mesafeyi tanımlayalım. Bu, çok çok önemli. İki nokta arasındaki mesafe tanımlanmadan daha ileri gidemeyiz.

Düzlemde herhangi iki A ve B noktası verilmiş olsun. A noktasının koordinatları (a_1, a_2), B noktasının koordinatları (b_1, b_2) olsun. Şimdi, A ile B arasındaki mesafeyi

$$d_2(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

olarak tanımlayalım. Buna ***Öklid mesafesi*** denir. Öklid mesafesinin kolayca kanıtlanabilecek şu özellikleri vardır: Her A, B ve C noktaları için

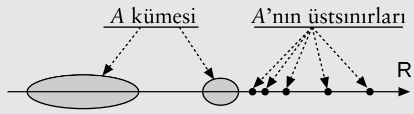
- $d_2(A, B)$ negatif olmayan bir gerçel sayıdır,
- $d_2(A, B)$, ancak ve ancak $A = B$ ise 0 olabilir,
- $d_2(A, B) = d_2(B, A)$,
- $d_2(A, B) \le d_2(A, C) + d_2(C, B)$.

Bu dört özelliği sağlayan bir d fonksiyonuna ***mesafe fonksiyonu*** denir ve $d_2(A, B)$ sayısı A ve B noktalarının ***mesafe***si olarak tanımlanır. Birinci özellik

En Küçük Üstsınır

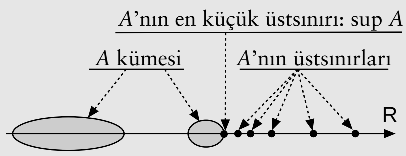
A, gerçel sayılar kümesi R'nin boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer bir r gerçel sayısı A'daki her sayıdan büyükeşitse, r'ye A'nın ***üstsınırı*** denir. Örneğin 5, (0, 1) açık aralığının bir üstsınırıdır. Öte yandan Z altkümesinin üstsınırı yoktur. Üstsınırı olan kümelere ***üstten sınırlı küme*** denir.

Eğer r, A'nın bir üstsınırıysa, r'den büyük her sayı da A'nın bir üstsınırıdır elbette.



A, R'nin üstten sınırlı ve boş olmayan bir altkümesiyse, o zaman A'nın üstsınırlarının en küçüğü vardır. Bu sonuç gerçel sayıların tanımından kaynaklanır ve bir başka sayımızın kapak konusu olacaktır.

Bir A kümesinin ***en küçük üstsınırı*** (varsa) bir tanedir ve bu sayı sup A ya da eküs A olarak gösterilir. Örneğin 1, (0, 1) açık aralığının en küçük üstsınırıdır; 1 aynı zamanda [0, 1] kümesinin de en küçük üstsınırıdır. Görüldüğü gibi sup A, A kümesin olabilir de olmayabilir de.



Yukardaki tanımdan şu çıkıyor: **1**) Her $a \in A$ için, $a \le \sup A$, ve **2**) sup A bu özelliği sağlayan sayıların en küçüğü.

Eğer boş olmayan A kümesinin en küçük üstsınırı yoksa sup $A = \infty$ olarak tanımlanabilir.

Önsav. *A ve B gerçel sayı kümeleri için,*

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

ise, o zaman

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

eşitliği geçerlidir.

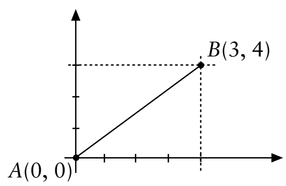
Kanıt: $\alpha = \sup A$, $\beta = \sup B$, $\chi = \sup(A+B)$ olsun. $\alpha + \beta$, elbette $A + B$ kümesinin her sayısından büyükeşit, yani $\alpha + \beta$, $A + B$'nin bir üstsınırı, dolayısıyla $A + B$'nin en küçük üstsınırı olan χ'den büyükeşit. Eğer $\chi < \alpha + \beta$ ise, o zaman $\alpha - (\alpha+\beta-\chi)/2 < \alpha$ olduğundan, $\alpha - (\alpha+\beta-\chi)/2$, A'nın bir üstsınırı değildir, demek ki A'da $\alpha - (\alpha+\beta-\chi)/2 < a$ eşitsizliğini sağlayan bir a vardır. Aynı biçimde B'de $\beta - (\alpha+\beta-\chi)/2 < b$ eşitsizliğini sağlayan bir b vardır. İki eşitsizliği altalta yazıp toplarsak, $\chi < a + b \in A + B$ buluruz, bir çelişki. Demek ki $\chi = \alpha + \beta$. □

mesafenin en az 0 olduğunu söyler, yani iki nokta arasındaki mesafe negatif olamaz. İkinci özellik, bir noktanın kendisine olan mesafesinin 0 olduğunu ve bu özellikte bir başka noktanın olmadığını söyler. Üçüncü özellik, A'yla B arasındaki mesafenin B'yle A arasındaki mesafeye eşit olduğunu söyler, yani mesafe simetriktir der. (Bu özellik tek yönlü yolları olan trafikte geçerli değildir.) Dördüncü özellik, A'dan B'ye gitmek için C'den geçmek gerekiyorsa yolun kısalamayacağını söyler; bu son özelliğe ***üçgen eşitsizliği*** denir. Yukardaki dört önerme arasında, kanıtında birazcık zorlanılabilecek bir tek bu eşitsizliktir. Bunu da MD-2003-III, sayfa 69-70 ve MD-2003-IV, sayfa 83'te kanıtlamıştık.

$\mathbb{R}^2$ düzleminde başka mesafe fonksiyonları da vardır. İşte bunlardan ikisi: A ve B noktalarının koordinatları biraz önceki gibi (a_1, a_2) ve (b_1, b_2) olsun. Şu fonksiyonları tanımlayalım:

$$d_1(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|,$$
$$d_\infty(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

Hem d_1 hem d_∞ yukardaki dört özelliği sağlar, yani her ikisi de birer mesafe fonksiyonudur. Yandaki örnekte görüleceği üzere, tanımlanan bu üç d_2, d_1 ve d_∞ mesafe fonksiyonları genellikle değişik sonuçlar verirler.



$d_2(A, B) = (3 - 0)^2 + (4 - 0)^2 = 5$
$d_1(A, B) = |3 - 0| + |4 - 0| = 7$
$d_\infty(A, B) = \max\{|3 - 0|, |4 - 0|\} = 4$

d_2'ye ***Öklid mesafesi*** denir. d_1'e bazen ***New York mesafesi*** denir, çünkü bir ızgarayı andıran New York sokaklarında bir noktadan bir başka noktaya ancak Doğu-Batı ve Kuzey-Güney istikametlerinden yürüyerek gidilir genellikle ve böylece iki nokta arasındaki en kısa mesafe bu iki noktanın d_1 mesafesi olur.

Yukardaki üç mesafenin ortak bir özelliği vardır: Eğer C noktası A ve B noktaları arasındaysa, o zaman $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$ eşitliği geçerlidir. Bu özellik her mesafe tarafından sağlanmaz. Örneğin, $d(A, B) = \min\{1, d_2(A, B)\}$ bir mesafedir ve bu eşitliği sağlamaz. Bu eşitliği sağlayan mesafelere ***doğrusal mesafe*** diyelim.

Bir Daha Çember. Kabul ettiğimiz mesafe fonksiyonuna göre çember değişir. Bunu görmek için çemberin tanımına geri dönelim: Bir O noktası ve bir r gerçel sayısı verilmiş olsun; O noktasına mesafesi r olan noktalar kümesine ***çember*** denir, yani, çember

$$\{P : d(P, O) = r\}$$

biçiminde bir kümedir. O noktasına çemberin ***merkez***i, r sayısına çemberin ***yarıçap***ı denir.

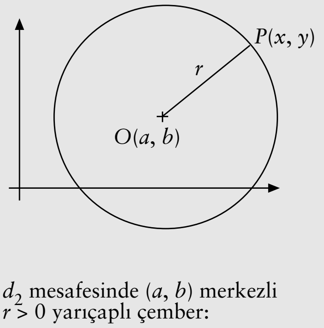
Eğer $r < 0$ ise çember boşkümedir elbet.

Eğer $r = 0$ ise çember sadece merkezden oluşur.

Ama eğer $r > 0$ ise, tanımdan görüldüğü üzere, çember kümesi, kabul edilen d mesafesine göre değişir. Eğer d mesafesi olarak d_2 Öklid mesafesini alırsak, bildiğimiz çemberi buluruz. Ama mesafe olarak d_1'i, d_∞'u ya da bir başka d'yi alırsak çember olarak bir başka küme buluruz. Aşağıdaki gri alanda d_2, d_1 ve d_∞ mesafe fonksiyonları için bu çemberleri çizdik.

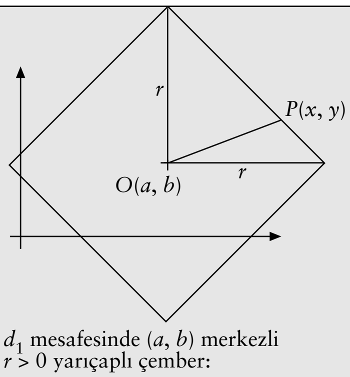
Biz Öklid geometrisinde çalıştığımızdan d_2 Öklid mesafesini kabul edeceğiz. Ama yaptıklarımızı olabildiğince genel tutmak için d_2 yerine adına d diyeceğimiz herhangi bir mesafeyi kullanacağız.

Bir Eğrinin Grafiğinin Uzunluğu. γ, belli bir $[a, b]$ aralığında tanımlanmış bir eğri olsun. γ'nın uzunluğunu tanımlayacağız ve gerektiğinde de ölçebileceğiz. Sezgisel olarak bildiğimiz bu "uzunluk" kavramını matematiksel olarak tanımlayacağız.



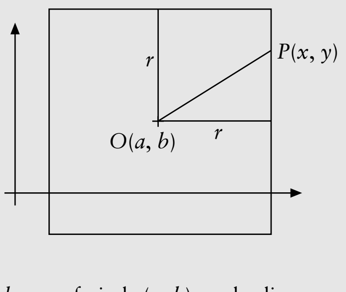
d_2 mesafesinde (a, b) merkezli $r > 0$ yarıçaplı çember:

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a, b), (x, y)) = r\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}.$



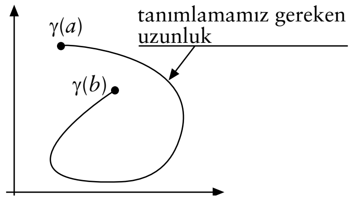
d_1 mesafesinde (a, b) merkezli $r > 0$ yarıçaplı çember:

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_1((a, b), (x, y)) = r\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - a| + |y - b| = r\}.$



d_∞ mesafesinde (a, b) merkezli $r > 0$ yarıçaplı çember:

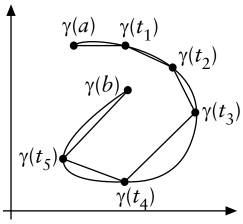
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty((a, b), (x, y)) = r\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x - a|, |y - b|\} = r\}.$



Tanıma giden yolun önünü açmak için her zaman olduğu gibi önce biraz sohbet edelim.

$$a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = b$$

biçiminde bir sonlu diziye $[a, b]$ kapalı aralığının ***parçalanış***ı adını verelim. Şimdi aşağıdaki şekle ve şekildeki kirişlerden oluşan poligonal yola bakalım.



$[a, b]$ aralığını ne kadar "ince" doğrarsak, yani parçalanışımız ne kadar "ince"yse poligonal yolla γ eğrisi o kadar birbirine benzer ve o kadar "uzunlukları" birbirine yakın olur. (Elbet burada sezgisel konuşuyoruz, sohbet aşamasındayız, henüz ciddi matematik yapmaya başlamadık.)

Poligonal yolun uzunluğunu kirişlerin uzunluklarının toplamı olarak tanımlamak herhalde işin en doğalı ve en doğrusu. Her kirişin uzunluğunun $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$ olmasını istemek de bir o kadar doğal. (Birazdan, uzunluk kavramını matematiksel olarak tanımladığımızda, $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$ sayısının gerçekten $\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})$ kirişinin uzunluğu olduğunu göreceğiz.)

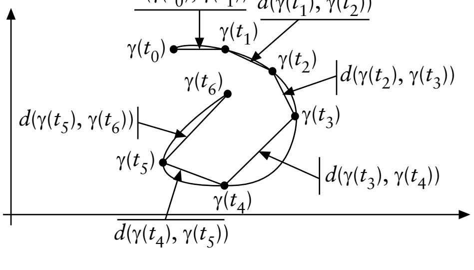
Eğer

$$P = (a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = b),$$

$[a, b]$ kapalı aralığının bir parçalanışıysa, $\mathrm{l}_P(\gamma)$ sayısını,

$$d(\gamma(t_0)\ \gamma(t_1)) + ... + d(\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n))$$

toplamı olarak tanımlayalım. $\mathrm{l}_P(\gamma)$ sayısını, dahaca tanımlamadığımız γ eğrisinin uzunluğuna oldukça yakın bir sayı olarak algılayabiliriz. Nitekim sezgimiz bize P parçalanışı ne kadar inceyse, $\mathrm{l}_P(\gamma)$ sayısının γ'nın uzunluğuna o kadar yakın olduğunu



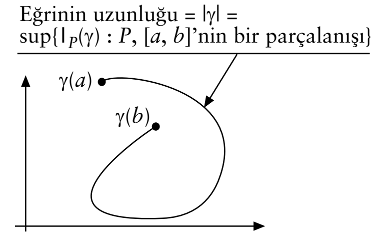
söylüyor. Dolayısıyla γ eğrisinin ***uzunluğu***nu bütün bu $\mathrm{l}_P(\gamma)$ sayılarının en küçük üstsınırı (bkz. 75'inci sayfadaki gri alan) olarak tanımlayalım ve bu uzunluğa $|\gamma|$ diyelim:

$$|\gamma| = \sup\{\mathrm{l}_P(\gamma) : P, [a, b]\text{'nin bir parçalanışı}\}.$$

Yani, $[a, b]$ aralığının her P parçalanışı için,

$$|\gamma| \geq \mathrm{l}_P(\gamma)$$

ve $|\gamma|$ bu özelliği sağlayan en küçük gerçel sayı.



Bu arada $|\gamma|$ sayısının (uzunluğunun) d mesafe fonksiyonuna göre değiştiğini de dikkat çekelim. Ama bakalım $|\gamma|$ diye bir sayı var mı gerçekten, yani

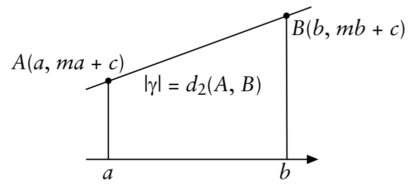
$$\{\mathrm{l}_P(\gamma) : P, [a, b]\text{'nin bir parçalanışı}\}$$

kümesinin en küçük üstsınırı var mı? Böyle bir üstsınır varsa o zaman üstsınırların en küçüğü vardır. Böyle bir üstsınır olması için, bu kümenin üstten sınırlı olması gerekir. Ne yazık ki bu küme her γ eğrisi için üstten sınırlı değildir (γ sürekli ve görüntüsü sınırlı olsa bile.) Bunu aşağıdaki ikinci örnekte göreceğiz.

Örnek 1. Bir doğru parçası (dümdüz!) bir eğridir. Eğer doğru parçası dikey değilse, doğru parçasını, m ve c sabitleri için,

$$\gamma(x) = (x, mx + c)$$

eğrisi olarak görebiliriz. Burada x, belli bir $[a, b]$ kapalı aralığında değişmektedir.



Mesafe fonksiyonumuz alışık olduğumuz d_2 Öklid mesafesi gibi doğrusal bir mesafe olsun. Kolayca görüleceği üzere, $[a, b]$ kapalı aralığının parçalanışı ne olursa olsun, d mesafesi doğrusal olduğundan, $\mathrm{l}_P(\gamma)$ sayısı $(a, ma + c)$ ile $(b, mb + c)$ noktaları arasındaki mesafesidir, dolayısıyla bunların en küçük üstsınırı da bu mesafedir, yani,

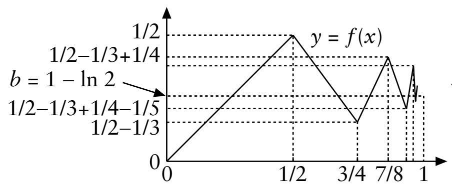
$$|\gamma| = \sqrt{(b-a)^2 + ((mb+c)-(ma+c))^2}$$
$$= (b-a)\sqrt{1+m^2}$$

dir. Bunun kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır. Doğru parçası dikey olsaydı da aynı yanıtı bulacaktık: Bir doğru parçasının Öklid uzunluğu uç noktalarının Öklid mesafesine eşittir.

Örnek 2. Gene Öklid mesafesini alalım. $a_0 = b_0 = 0$ olsun ve $n \geq 1$ için,

$$a_n = 1/2 + 1/2^2 + ... + 1/2^n$$
$$b_n = 1/2 - 1/3 + ... + (-1)^n/n$$

olsun. Hem $(a_n)_n$ hem $(b_n)_n$ dizisinin n sonsuza giderken limiti vardır ve bu limitler sırasıyla 1 ve yaklaşık 0,30683'dır (tam olarak 1 – ln 2'dir), yani n sonsuza giderken a_n sayıları 1'e, b_n sayıları adına b diyeceğimiz bir sayıya yakınsarlar. γ eğrisi, aşağıdaki şekildeki olduğu gibi, (a_n, b_n) noktasını (a_{n+1}, b_{n+1}) noktasına birleştirsin; bir de ayrıca $\gamma(1) = (1, b)$ olsun. O zaman γ, [0, 1] kapalı aralığından $\mathbb{R}^2$'ye giden (sürekli ve sınırlı bir alana sığan) bir eğridir.



(a_n, b_n) noktasıyla (a_{n+1}, b_{n+1}) noktasını birleştiren doğrunun uzunluğu bir önceki örnekte gördüğümüz gibi bu iki nokta arasındaki Öklid mesafesidir, demek ki $b_{n+1} - b_n$'den, yani $1/n$'den büyüktür. Bundan kolaylıkla (Önsav 2)

$$|\gamma| \geq 1/2 + 1/3 + 1/4 + ...$$

eşitsizliği çıkar. Ama sağdaki toplam sonsuzdur (aşağıdaki gri kare), demek ki bu durumda $|\gamma|$ bir sayı değil, sonsuz, yani ∞.

1/2 + 1/3 + 1/4 + ... Toplamı

$$1/2 \geq 1/2$$
$$1/3 + 1/4 \geq 1/4 + 1/4 = 1/2$$
$$1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 \geq 1/8 + ... + 1/8 = 1/2$$
$$1/9 + ... + 1/16 \geq 1/16 + ... + 1/16 = 1/2$$

eşitsizliklerinden ve benzerlerinden, 1/2 + 1/3 + 1/4 + ... sonsuz toplamının hiç durmadan büyüdüğü, yani sonsuza gittiği anlaşılır.

Görüldüğü gibi bir eğrinin (sürekli bile olsa) Öklid uzunluğu sonsuz olabiliyor. Öklid uzunluğu sonlu olan eğrilere ***doğrultulabilir*** eğriler denir.

1 İngilizcesi "rectifiable". Çoğu zaman doğrultulabilir fonksiyonun bir de ayrıca sürekli olması istenir.

Önsav 1. *Eğer [a, b] aralığının Q parçalanışı P parçalanışını içeriyorsa o zaman* $\ell_P(\gamma) \leq \ell_Q(\gamma)$.

Kanıt: Tümevarımla kanıttan hareketle, Q parçalanışının P parçalanışına bir nokta eklenerek elde edildiğini varsayabiliriz, yani,

$$P = (a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = b)$$

ise, Q parçalanışının, belli bir $i = 0, 1, ..., n-1$ için,

$$(a = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_i \leq c \leq t_{i+1} \leq ... \leq t_n = b)$$

biçiminde olduğunu varsayabiliriz. O zaman $\ell_Q(\gamma)$ toplamı, $\ell_P(\gamma)$ toplamında

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$$

terimi yerine,

$$d(\gamma(t_i), \gamma(c)) + d(\gamma(c), \gamma(t_{i+1}))$$

terimi konularak elde edilmiştir. Ama üçgen eşitsizliğinden dolayı

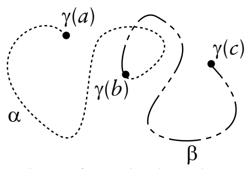
$$d(\gamma(t_i), \gamma(c)) + d(\gamma(c), \gamma(t_{i+1})) \geq d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

Bu da eşitsizliği kanıtlar. □

Önsav 2. *a < b < c olsun.* γ, *[a, c] aralığında tanımlanmış bir eğri olsun.* α *ve* β *eğrileri* γ *eğrisinin sırasıyla [a, b] ve [b, c] aralıklarına tekabül eden kısımları olsunlar. O zaman* γ*'nın doğrultulabilir olması için yeter ve gerek koşul* α *ve* β*'nın doğrultulabilmesidir. Bu durumda ayrıca*

$$|\gamma| = |\alpha| + |\beta|$$

eşitliği geçerlidir.



$\gamma(a)$'dan $\gamma(b)$'ye kadar olan eğri α,
$\gamma(b)$'dan $\gamma(c)$'ye kadar olan eğri β.
$\gamma(a)$'dan $\gamma(c)$'ye kadar olan eğri γ.

Kanıt: Önce γ'nın doğrultulabilir olduğunu varsayalım. P ve Q sırasıyla $[a, b]$ ve $[b, c]$ aralıklarının bir parçalanışı olsun. O zaman $P \cup Q$ bileşimi $[a, c]$ aralığının bir parçalanışıdır. Ayrıca tanımdan da hemen anlaşılacağı üzere,

$$\ell_{P\cup Q}(\gamma) = \ell_P(\alpha) + \ell_Q(\beta).$$

Demek ki,

$$|\gamma| \geq \ell_{P\cup Q}(\gamma) = \ell_P(\alpha) + \ell_Q(\beta) \geq \ell_P(\alpha).$$

Bundan, $\ell_P(\alpha)$ sayılarının üstten sınırlı olduğu çıkar, yani $|\alpha|$ sayısı vardır. Aynı şekilde $|\beta|$ sayısı da vardır. α ve β eğrilerinin doğrultulabilir olduklarını kanıtladık. Ayrıca yukarda kanıtladığımız

$$|\gamma| \geq \ell_P(\alpha) + \ell_Q(\beta)$$

eşitsizliği her P ve Q için geçerli olduğundan, sayfa 75'deki gri alanda kanıtlanan önsava göre,

$$|\gamma| \geq |\alpha| + |\beta|.$$

Şimdi α ve β eğrilerinin doğrultulabilir olduklarını varsayalım. P, $[a, c]$ aralığının herhangi bir parçalanışı olsun. Q, P'ye b noktası eklenerek elde edilmiş parçalanış olsun. Q parçalanışını, b'den küçükeşit ve büyükeşit olanlar olmak üzere ikiye ayırarak $[a, b]$ ve $[b, c]$ aralıklarının R ve S parçalanışlarını elde edelim. O zaman Önsav 1'e ve eğrinin uzunluğu tanımına göre,

$$\ell_P(\gamma) \le \ell_Q(\gamma) = \ell_R(\alpha) + \ell_S(\beta) \le |\alpha| + |\beta|.$$

Dolayısıyla $\ell_P(\gamma)$ sayıları $|\alpha| + |\beta|$ tarafından üstten sınırlanıyor. Bundan da γ'nın doğrultulabilir olduğu ve $|\gamma| \le |\alpha| + |\beta|$ eşitsizliği çıkar. □

Önsav 3. *Eğer γ eğrisi doğrultulabilirse ve $\alpha \subseteq \gamma$ ise α da doğrultulabilir ve $|\alpha| \le |\gamma|$'dır.*

Kanıt: α'nın tanım kümesinin her P parçalanışına en fazla iki nokta ekleyerek (γ'nın uç noktalarını), P'yi γ'nın bir parçalanışına dönüştürebiliriz. Varsayımdan dolayı P'nin α'ya yarattığı her kiriş, γ'nın da bir kirişidir. Dolayısıyla, $\ell_P(\alpha) \le |\gamma|$. Bu eşitsizlik her P için geçerli olduğundan, $|\alpha| \le |\gamma|$. □

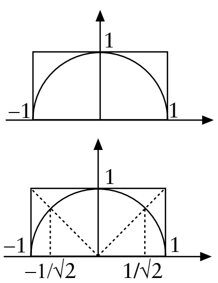
Son Olarak Çember. Şimdi çemberin üst kısmını veren

$$\gamma(x) = \left(x, \sqrt{1 - x^2}\right)$$

eğrisinin $[-1, 1]$ aralığında Öklid mesafesine göre doğrultulabilir olduğunu kanıtlayalım. Burada Öklid mesafesini kullanacağız.

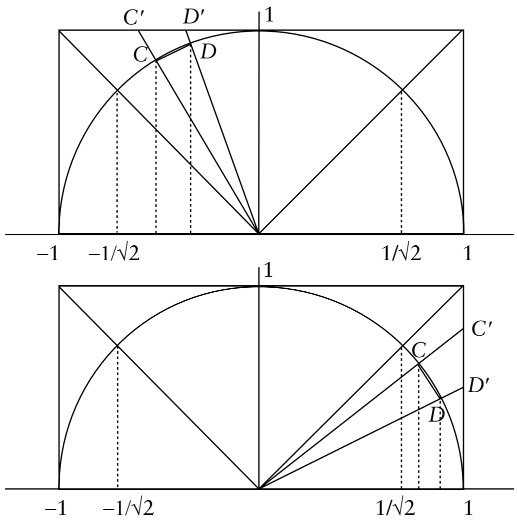
P, $[-1, 1]$ aralığının herhangi bir parçalanışı olsun. $\ell_P(\gamma) \le 4$ eşitsizliğini kanıtlayacağız.

Bunun için yarı çemberi aşağıdaki şekildeki gibi $[-1, 1] \times [0, 1]$ kutusuna sokalım. $\ell_P(\gamma) \le 4$ eşitsizliğinin sağındaki 4, dikdörtgenin sağ, sol ve üst kenarlarının uzunluklarının toplamı olduğuna dikkatinizi çekerim.



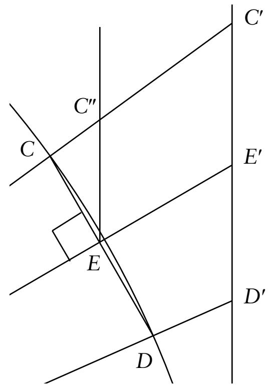
P parçalanışına $-1/\sqrt{2}$ ve $1/\sqrt{2}$ sayılarını da ekleyerek daha ince olan Q parçalanışını elde edelim. $\ell_P(\gamma) \le \ell_Q(\gamma)$ eşitsizliğinden dolayı, $\ell_Q(\gamma) \le 4$ eşitsizliğini kanıtlamak yeterli.

Q parçalanışın belirlediği herhangi bir CD kirişini ele alalım. Bulunduğu yere bağlı olarak, CD kirişini, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, dikdörtgenin üç kenarından birine O merkezli bir homotetiyle (genleşmeyle) $C'D'$ doğru parçasına taşıyalım.



CD doğru parçasının uzunluğunun $C'D'$ doğru parçasının uzunluğundan küçükeşit olduğunu kanıtlayacağız. Bundan da istediğimiz sonuç çıkacak, çünkü dikdörtgenin sol, sağ ve üst kenarlarının uzunluklarının toplamı 4.

Yukardaki ikinci şekli aşağıdaki gibi büyütelim. E, CD'nin orta noktası olsun. Bu noktadan CD'ye EE' dik doğrusunu çıkalım. EC'', $D'C'$ doğrusuna paralel olsun. Öklid geometrisiyle kolayca kanıtlanacağı üzere $|CE| < |C''E| < |C'E'|$. Demek ki $|CD| < |C'D'|$.



Böylece $\ell_P(\gamma) \le 4$ eşitsizliğini kanıtlamış olduk, yani birim çemberin yarısının uzunluğu vardır. Bu sayıya π adını verelim. Artık π'nin 4'ten küçük bir sayı olduğunu biliyoruz.

Alıştırmalar. Birim çemberin alt kısmının uzunluğunun da π olduğunu matematiksel olarak kanıtlayın. Önsav 2'ye göre bundan birim çemberin uzunluğunun 2π olduğu çıkar. r yarıçaplı bir çemberin uzunluğunun $2\pi r$ olduğunu kanıtlayın. Önsav 3'ten her çember parçasının uzunluğu olduğu çıkar. $\pi > 3$ eşitsizliğini kanıtlayın.

Nihayet! Artık bir açının ölçüsünü matematiksel olarak tanımlayabiliriz. AOB bir açı olsun. O merkezli birim çemberi çizelim. OA ve OB ışınları birim çemberi A' ve B' noktalarında kessin. Birim çember üzerindeki $A'B'$ yayının uzunluğu AOB açısının radyan cinsinden ***ölçü***sü olsun. ♠