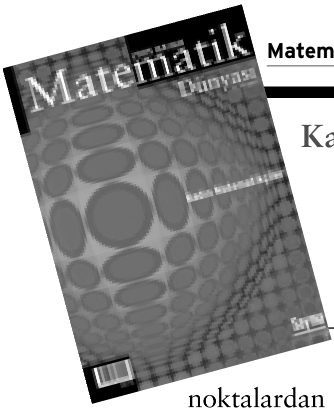
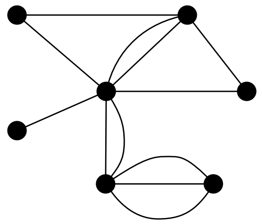


Kapak Konusu: Sayma

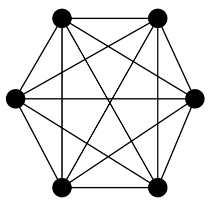
Kapsayıcı Ağaç Sayısı
(Matris-Ağaç Teoremi)

Selda Küçükçifçi* / *skucukcifci@ku.edu.tr*

Bir çizge aşağıdaki gibi noktalardan ve noktalar arasında bağıntılardan (ya da kenarlardan ya da çizgilerden) oluşmuş bir yapı ya da şekildir.

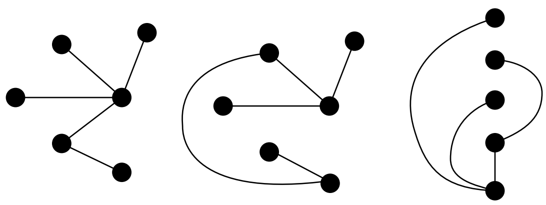


Örneğin, her noktasının her noktasına bağlandığı çizgelere ***tamçizge*** denir ve eğer n nokta varsa bu çizge K_n olarak simgelenir.

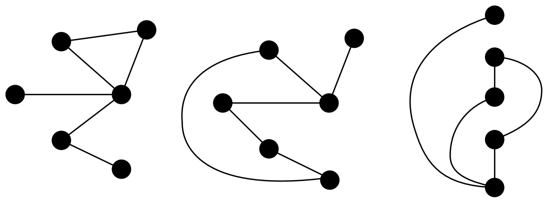


K_6 tamçizgesi

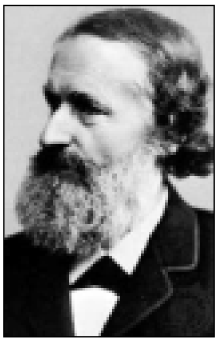
İçinde ***döngü*** (başladığı noktaya geri dönen yol) olmayan ve her noktasından her noktasına bağlantılar izlenerek gidilebilen (yani yekpare olan) çizgelere ***ağaç*** denir. Örneğin aşağıdaki çizgeler ağaçtır.



Ama şu çizgeler ağaç değildirler.



Burada amacımız verilmiş bir çizgenin içinde bulunan ve her noktayı içeren ağaç sayısını hesaplamak. Çizgenin her noktayı içeren ağaçlarına çizgenin ***kapsayıcı ağacı*** adını verelim. Örneğin bir üçgende (yani K_3'te) üç kapsayıcı ağaç vardır: Üçgenin üç kenarından herhangi birini atarsak bir kapsayıcı ağaç buluruz. Aynı şekilde bir karede de dört kapsayıcı ağaç vardır. Soruyu herhangi bir çizge için soralım ve yanıtlayalım: Bir çizgenin kaç kapsayıcı ağacı vardır?



Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)

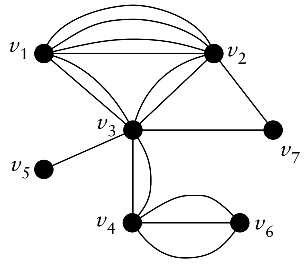
Bu sorunun yanıtı ilk kez Prusyalı matematikçi Kirchhoff [K] tarafından 1847'de Matris-Ağaç Teoremi olarak bilinen bir teoremin sonucu olarak bulunmuştur. Ama bizim kanıtımız Harary'nin [H] kanıtına dayanacak ve lineer cebir gerektirecek.

Matris-Ağaç Teoremi'ni önce yazalım, teoremde kullandığımız terimleri daha sonra açıklarız:

Teorem: *Köşeleri adlandırılmış bir G çizgesinin komşuluk matrisi A ve derece matrisi D olsun. G'nin kapsayıcı ağaç sayısı, D – A matrisinin herhangi bir eşçarpanının değeridir.*

Şimdi teoremde geçen terimleri açıklayalım.

Noktaları $v_1, ..., v_n$ olan bir çizge alalım. Bu çizgenin ***komşuluk matrisi***, (i, j) girdisi v_i ile v_j noktaları arasındaki bağıntı (kenar) sayısı olan $n \times n$ boyutlu matristir.



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & v_3 & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ v_4 \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{ccccccc} 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

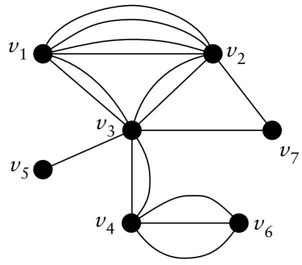
Komşuluk matrisi

Çizgenin ***derece matrisi*** ise, (i, i) girdisi v_i noktasının derecesi (yani v_i'yi içeren bağıntı sayısı) ve $i \neq j$ için (i, j) girdisi ise 0 olan $n \times n$ boyutlu matristir.

---

* Koç Üniversitesi Matematik bölümü öğretim üyesi.

1 MD-2003-III, sayfa 19-20'de n noktalı n^{n-2} tane noktaları adlandırılmış ağaç olduğunu (Cayley 1889) kanıtlamıştık. Bu sonucu K_n tamçizgesinin kapsayıcı ağaç sayısı olarak da yorumlayabiliriz.



$$\begin{matrix}6&0&0&0&0&0&0\\0&7&0&0&0&0&0\\0&0&8&0&0&0&0\\0&0&0&5&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&0&2\end{matrix}$$

Derece matrisi

Elbette komşuluk ve derece matrisleri çizgenin noktalarının kabul edilen sıralamasına göre değişebilir, örneğin v_1, v_2, v_3, ..., v_n için elde edilen matrisler, v_2, v_1, v_3, ..., v_n için elde edilen matrislerden değişiktir. (İlk iki sütunu ve ilk iki satırı değiştirirsek birinden diğerini elde ederiz.) Biz noktaların önceden belirlenmiş belli bir sıralamayla verildiğini varsayacağız; böylece çizgenin komşuluk ve derece matrisleri belirlenmiş olacak.

Eğer M, $n \times n$ boyutlu bir matrisse, M_{ij}, M matrisinden i-inci satır ve j-inci sütun atıldığında elde edilen kare matris olsun. $(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ sayısına M matrisinin ***eşçarpanı*** adı verilir.

Böylece teoremdeki terimler açıklanmış oldu.

Kanıtımızda şu olgulara ihtiyacımız olacak:

Olgu 1. *A ve B, $n \times m$ ve $m \times n$ boyutlu iki matris olsun. $n \leq m$ olduğunu varsayalım. A'dan $m - n$ sütun silerek $n \times n$ boyutlu bir A_i altmatrisi elde edelim. A_i altmatrisinde A'nın hangi sütunları gözüküyorsa B'den o numaralı satırları alarak $n \times n$ boyutlu B_i matrisini elde edelim. Bu durumda A'nın olası tüm $n \times n$ boyutlu A_i altmatrisleri için,*

$$\det(AB) = \textstyle\sum_i \det A_i \times \det B_i$$

olur.

$$\textbf{Örnek:}\ \begin{pmatrix}2&0&3\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\3&2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&11\\-4&5\end{pmatrix}.$$

Bu çarpım matrisinin determinantı 39'dur. Eş düşen altmatrislerin determinantlarının çarpımlarının toplamını hesaplayalım:

$$\begin{bmatrix}2&0\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\3&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&3\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\-1&3\end{bmatrix}=39.$$

Yine aynı sonucu bulduk.

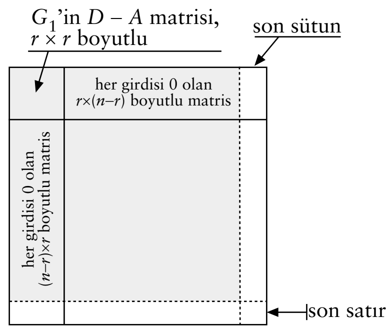
Olgu 2. *Her satırının ya da her sütununun toplamı 0 olan bir matrisin determinantı 0'dır. Her satır ve her sütunun toplamı 0 olan bir matrisin determinantı 0'dır ve eşçarpanları aynı değerdedirler.*

İkinci olgunun kanıtı oldukça kolay, sütun ve satırların yerlerini değiştirerek ya da birini diğerlerine ekleyerek elde edilir.

Kanıtımızda matrislerle ilgili başka sonuçlar da kullanacağız, ama onları yeri geldiğinde tanıtalım.

Matris-Ağaç Teoreminin Kanıtı. A matrisinin her i-inci satırının (ve her i-inci sütununun) girdilerinin toplamı v_i noktasının derecesine eşit olduğundan, $D - A$ matrisinde her satır ve her sütunun girdilerinin toplamı 0 olur. Olgu 2'den dolayı $D - A$ matrisinin determinantı 0'dır ve eşçarpanları hep aynı değerdedirler.

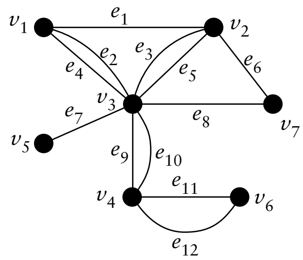
Önce G'nin yekpare olmadığını varsayalım, yani G, aralarında bağıntı bulunmayan en az iki altçizgeden oluşsun. O zaman çizgede hiç kapsayıcı ağaç olmadığından, $D - A$ matrisinin eşçarpanlarının 0 olduğunu kanıtlamalıyız. Kanıtlayalım: G'nin noktalarına v_1, v_2, ..., v_n diyelim. G_1, G'deki bir bileşen olsun (yani G_1'in noktalarıyla G'nin diğer noktaları arasında bağıntı olmasın.) G_1'in noktalarının v_1, v_2, ..., v_r olduğunu varsayalım. $D - A$ matrisinden son satır ve sütunu atıp $(n-1) \times (n-1)$ boyutlu bir E matrisi elde edelim. E matrisinin ilk r satırının toplamı, her girdisi 0 olan bir satır oluştura-



G'nin $D - A$ matrisi, $n \times n$ boyutlu.
Gri matris, $(n-1) \times (n-1)$ boyutlu E matrisidir.

cağından E matrisinin determinantı 0 olur. Bu akıl yürütme son satır ve son sütun yerine herhangi bir satır ve sütunla yapılabileceğinden, $D - A$ matrisinin her eşçarpanının değerinin 0 olduğu anlaşılır. Böylece bu durumda istediğimizi kanıtlamış olduk.

Şimdi çizgemizin yekpare olduğunu varsayalım. Ayrıca çizgemizin n noktası ve m bağıntısı olsun. Çizgemiz yekpare olduğundan $m \geq n - 1$'dir. (Neden?) Çizgenin ***oluşum matrisi*** B olsun. (Yani v_i noktası e_j kenarındaysa B matrisinin (i, j) girdisi 1, değilse 0 olsun. Elde ettiğimiz $n \times m$ boyutlu matris G çizgesinin ***oluşum matrisi***dir. Burada n çizgenin nokta sayısı, m de kenar sayısıdır.) Her



$$B = \begin{matrix} 1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0 \end{matrix}$$

Oluşum matrisi

sütun bir kenarı simgelediğinden, B matrisinin her sütununda sadece iki tane 1 vardır ve diğer girdileri 0'dır.

Şimdi B matrisindeki her sütundaki sıfırdan farklı olan iki girdiden herhangi birini -1 yaparak elde ettiğimiz matrise C adını verelim.

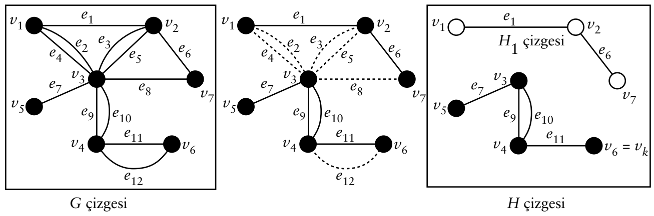
$$C = \begin{matrix} 1&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&-1&1&-1&0&-1&1&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&-1&0&-1&0&0&0&0 \end{matrix} \quad C^t = \begin{matrix} 1&-1&0&0&0&0&0\\ 1&0&-1&0&0&0&0\\ 0&1&-1&0&0&0&0\\ -1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&-1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&-1\\ 0&0&-1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&-1\\ 0&0&1&-1&0&0&0\\ 0&0&-1&1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&1&0\\ 0&0&0&-1&0&1&0 \end{matrix}$$

C'nin sütunlarının toplamı 0'dır, çünkü girdilerinin biri 1, diğeri -1 ve geri kalanları 0'dır. Bu, birazdan önemli olacak.

CC^t matris çarpımını dikkatlice inceleyelim. (C^t matrisi, yukardaki örnekte görüldüğü gibi, C matrisinin çapraza göre simetriğidir, C^t matrisinde C matrisinin sütunları satır, satırları sütun olmuştur.) Cebirsel bir işlem olan CC^t matris çarpımının geometrik anlamı irdelendiğinde, $i \neq j$ ise bu çarpımın (i, j) girdisinin v_i ile v_j noktaları arasındaki kenar sayısı çarpı -1 olduğu gözlemlenir; $i = j$ durumunda ise bu girdi v_i'nin derecesidir. Demek ki $CC^t = D - A$. Dolayısıyla G'nin kapsayıcı ağaç sayısının CC^t matrisinin herhangi bir eşçarpanının değeri olduğunu kanıtlamalıyız.

G'nin $n - 1$ bağıntılı herhangi bir H altçizgesine bakalım. C'den sadece H'nin kenarlarına karşılık gelen sütunları kabul edip (yani diğerlerini atıp), sıralardan da herhangi birini, diyelim k-inci sırayı atarak elde ettiğimiz $(n - 1) \times (n - 1)$ boyutlu C' matrisinin (bkz. bir sonraki sütundaki şekil) determinantının mutlak değerini bulalım.

Önce H altçizgesinin bağlı olmadığını varsayalım. O zaman H'nin v_k noktasını barındırmayan bir bileşeni vardır. Bu bileşen H_1 olsun. Attığımız k-inci satırın H_1'in noktalarına karşılık gelen girdileri 0'dır çünkü v_k noktası H_1'de değildir. Dolayısıyla C' matrisinin H_1 çizgesine karşılık gelen altmatrisin



G çizgesi *H* çizgesi

$$C = \begin{matrix} 1&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&-1&1&-1&0&-1&1&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&-1&0&-1&0&0&0&0 \end{matrix}$$

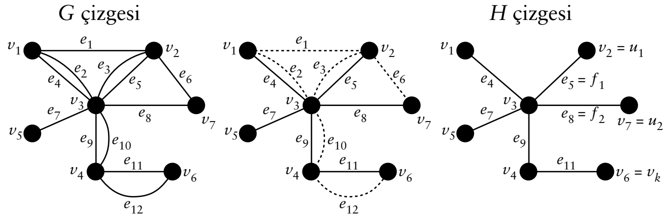
$$C' = \begin{matrix} 1&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&-1&1&-1&0&-1&1&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&-1&0&-1&0&0&0&0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1&0&0&0&0&0\\ -1&1&0&0&0&0\\ 0&0&-1&1&-1&0\\ 0&0&0&-1&1&-1\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0 \end{matrix}$$

$k = 6$

sütunlarının toplamı da aynen C matrisinin sütunlarında olduğu gibi 0'dır. Demek ki H_1 çizgesine tekabül eden matrisin (resimde griyle gösterilmiş) determinantı 0'dır. Bundan da det $C' = 0$ çıkar.

Şimdi H çizgesinin bağlı olduğunu, yani H altçizgesinin G'nin bir kapsayıcı ağacı olduğunu varsayalım. (Bkz. aşağıdaki şekil.) C' matrisinin satır ve sütunlarını değiştirerek C' matrisini, çaprazın altındaki girdileri 0 olan ama çaprazında hiç 0 olmayan bir matrise (üstüçgen matrisine) dönüştüreceğiz. C' matrisinin girdileri 1 ya da -1 olduklarından ve satır ve sütun değişmelerinden determinantın mutlak değeri değişmediğinden, böyle bir dönüşüm yapabilirsek, $|\det C'| = 1$ eşitliğini kanıtlamış olacağız.

G çizgesi *H* çizgesi



$$C = \begin{matrix} 1&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&-1&1&-1&0&-1&1&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&-1&0&-1&0&0&0&0 \end{matrix}$$

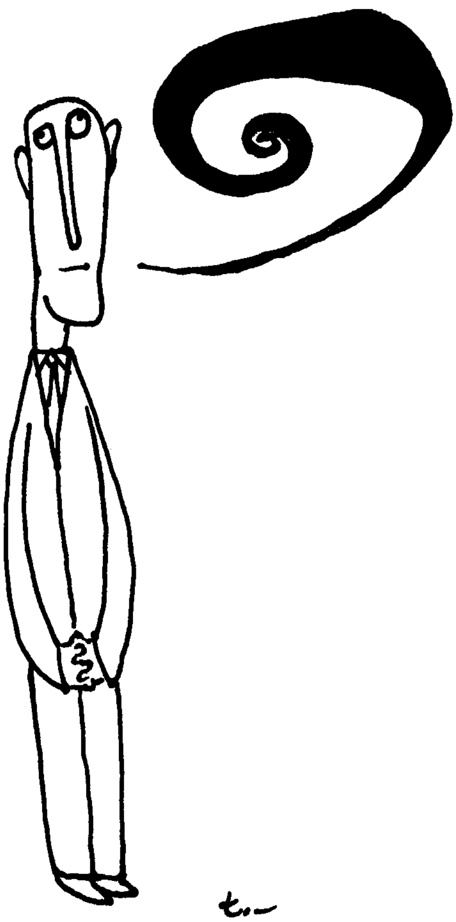
$$C' = \begin{matrix} 1&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&-1&1&-1&0&-1&1&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&-1&0&-1&0&0&0&0 \end{matrix} = \begin{matrix} -1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 1&-1&-1&1&1&0\\ 0&0&0&0&-1&-1\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0 \end{matrix}$$

$k = 6$

u_1 adını vereceğimiz v_k'den farklı ve derecesi 1 olan bir nokta seçelim. f_1 ise u_1 noktasına bağlı kenar olsun. u_2, v_k ve u_1'den farklı ve $H \setminus \{u_1\}$ çizgesinde derecesi 1 olan bir nokta, f_2 ise u_2'ye bağlı kenar olsun. Bu işlemi elimizde sadece v_k noktası kalana kadar uygulayalım. (Bir sonraki adımda $H \setminus \{u_1, u_2\}$ çizgesinden derecesi 1 olan bir u_3 noktası seçeceğiz.) Böylece seçilen her u_i noktası sadece $f_1, ..., f_i$ noktalarına bağlı olabilir ve e_i noktası f_i kenarına hep bağlı olur. Eğer C' matrisini bu tabanda yazacak olursak, çaprazında 1 ya da –1 olan üçgensel bir matris elde ederiz. Demek ki $|\det C'| = 1$'dir.

$D - A$ matrisinin (ya da CC^t matrisinin) her eşçarpanı aynı değerde olduğu için, $D - A$ matrisinin i-inci satır ve sütunu atarak bulduğumuz eşçarpanı hesaplayalım. C matrisinden i-inci satırı çıkardığımızda elde ettiğimiz matrise C_i dersek, $D - A$ matrisinden i-inci satır ve sütunu atarak elde ettiğimiz matris $C_iC_i^t$ matrisine eşittir. Demek ki det $(C_iC_i^t)$ değerini bulmalıyız.

Olgu 1'e göre det $(C_iC_i^t)$, C_i ve C_i^t matrislerinin sonucumuzda belirttiğimiz şekilde aldığımız altmatrislerinin determinantlarının çarpımlarının toplamlarına eşit. İlgili altmatrislerin deteminantlarının çarpımının, sütunlar bir kapsayıcı ağaçsa 1 diğer durumda 0 olduğunu da gördük. Böylece G'nin kapsayıcı ağaçlarının sayısının $D - A$ matrisinin eşçarpanı olduğunu bulduk. □



Yazımızın başında sözettiğimiz Cayley Teoremi de Matris-ağaç teoreminden kolaylıkla elde edilebilir. G'yi n noktalı tam çizge olarak alırsak

$$D - A = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{bmatrix}$$

olur. $D - A$ matrisinden ilk satır ve sütunu atalım. $(n - 1) \times (n - 1)$ boyutlu

$$\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -n & n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ -n & 0 & \ldots & n \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını bulacağız. Önce ilk satırı diğer tüm satırlardan çıkararak

$$\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{bmatrix}$$

matrisini bulalım. Ardından ilk sütuna diğer tüm sütunları eklersek

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & n \end{bmatrix}$$

matrisini elde ederiz. Bu işlemler matrisin determinantını değiştirmez ve köşegeninin altındaki tüm girdileri 0 olan bu matrisin detarminantı köşegendeki girdilerin çarpımıdır. Bu durumda matrisin determinantı ise beklediğimiz gibi n^{n-2} dir. □

Kaynakça

[CL] G. Chartrand, L. Lesniak, **Graphs and Digraphs**, Chapman & Hall, CRC Press 2000.

[H] Harary F., *Graphs and matrices*, SIAM Review 9 (1967) 83-90.

[K] Kirchhoff G., *Über die Auflösung der Gleinchungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanisher Ströme geführt wird*, Ann. Phys. Chem. 72 (1847) 497-508.