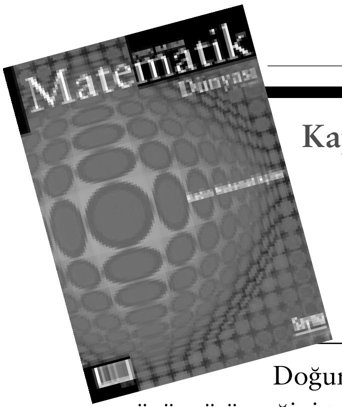

Kapak Konusu: Sayma

Üstel Doğuran Fonksiyonlar

Selin Enüst Çalışkan* / *selincaliskan@gmail.com*

Doğuran Fonksiyonlar yazımızın üçüncü örneğini tekrar ele alalım. O örnekte A, B ve C harfleriyle yazılan ama A'nın en fazla bir kere, B'nin en fazla iki kere, C'nin de en fazla üç kere kullanıldığı dört harfli kombinezonların sayısını bulmak istiyorduk. İşte o kombinezonlar:

$$ABBC, ABCC, ACCC, BBCC, BCCC.$$

Yanıt 5'tir görüldüğü gibi. Eğer s_1'in istenen kombinezondaki A harfi sayısına, s_2'nin B harfi sayısına ve s_3'ün de C harfi sayısına eşit olduğunu düşünürsek, aslında bu sayı,

$$s_1 + s_2 + s_3 = 4,$$
$$0 \le s_1 \le 1,$$
$$0 \le s_2 \le 2,$$
$$0 \le s_3 \le 3,$$

sisteminin tamsayı çözümü sayısıdır. Nitekim her kombinezon bir çözüme ve her çözüm de istenen şekilde bir dörtlü kombinezona denk düşer. Örneğin $(s_1, s_2, s_3) = (1, 2, 1)$ çözümü $ABBC$ kombinezonuna denk düşer.

Bu problemi "doğuran fonksiyonları" kullanarak çözmüştük. Anımsayalım: Yapılması gereken,

$$(1 + x)(1 + x + x^2)\,(1 + x + x^2 + x^3)$$

çarpımında x^4'ün katsayısını bulmaktır, bir başka deyişle bu çarpımdaki

$$x^{s_1}x^{s_2}x^{s_3} = x^{s_1+s_2+s_3}$$

şeklindeki ifadelerden $s_1 + s_2 + s_3 = 4$ koşulunu sağlayanların sayısını bulmaktır.

Şimdi yukardaki problemde küçük bir değişiklik yapalım; A, B ve C harfleriyle A'nın en fazla bir kere, B'nin en fazla iki kere, C'nin de en fazla üç kere kullanıldığı dört harfli kombinezonların sayısını bulmak yerine, bu koşulları sağlayan dört harfli sözcüklerin sayısını bulalım. Örneğin A, B, B, C harflerini kullanarak bu koşullara uyan *ABBC*, *ABCB*, *ACBB*, *BABC*, *BACB*, *BBAC*, *BBCA*, *BCAB*, *BCBA*, *CABB*, *CBAB*, *CBBA* sözcüklerini (toplam 12 tane) yazabiliriz: Bunun gibi A, B, C, C harflerini kullanarak da 12 sözcük yazabiliriz. Ama A, C, C, C harflerini kullanarak sadece 4 sözcük yazabiliriz: *ACCC*, *CACC*, *CCAC*, *CCCA*.

A, B, B, C harflerini kullanarak yazılan sözcük sayısı $4!/1!2!1! = 12$ formülüyle bulunulur. Buradaki $4!$, dört değişik harf (A, B_1, B_2 ve C harflerini) kullanarak yazılabilecek tüm sıralamaların (sözcüklerin) sayısıdır; ama biz B harfini iki kere kullandığımızdan bu sayıyı B'lerin kendi aralarındaki sıralanma sayısı olan $2!$'e bölmemiz gerekir. Aynı şekilde B, B, C, C kombinasyonundaki harfler kullanılarak oluşturulabilecek olası sözcüklerin sayısı $4!/0!2!2! = 6$'dır. A, B, C, C kombinasyonu için bu sayı gene 12'dir: $4!/1!1!2! = 12$. Öte yandan B, C, C, C ile A, C, C, C kombinasyonları için $4!/0!1!3! = 4$ bulunur. Bu durumda problemimizin cevabı $12 + 6 + 12 + 4 + 4 = 38$'dir.

Görüldüğü üzere, A, B ve C harfleriyle, A'nın en fazla bir kere, B'nin en fazla iki kere, C'nin de en fazla üç kere kullanıldığı dört harfli sözcük sayısı

$$\sum_{s_1+s_2+s_3=4,\, 0\le s_i \le i} \frac{4!}{s_1!\,s_2!\,s_3!}$$

şeklinde bir formülle ifade edilebilir.

Şimdi bu sayıyı sözcükleri teker teker sıralamadan daha kolay bir biçimde nasıl elde edilebileceğini görelim. Bir $(a_n)_n$ dizisinin ***üstel doğuran fonksiyonu***

$$\sum_{n\ge 0} a_n x^n/n!$$

yani

$$a_0 + a_1x + a_2x^2/2! + a_3x^3/3! + \ldots + a_nx^n/n! + \ldots$$

biçimsel serisi olarak tanımlanır. Yukarıda bulduğumuz 38 yanıtı,

$$(1 + x)(1 + x + x^2/2!)(1 + x + x^2/2! + x^3/3!)$$

polinomunda x^4 teriminin katsayısının $4!$ katına eşittir. Bunu açıklayalım. Bu çarpımda x^4 teriminin katsayısı,

$$\frac{x^{s_1}}{s_1!}\frac{x^{s_2}}{s_2!}\frac{x^{s_3}}{s_3!} = \frac{x^{s_1+s_2+s_3}}{s_1!\,s_2!\,s_3!}$$

şeklindeki çarpımlar arasında $s_1 + s_2 + s_3 = 4$ koşulunu sağlayanların sayısıdır. Burada $x^{s_1}/s_1!$ terimi ilk çarpandan, $x^{s_2}/s_2!$ terimi ikinci çarpandan ve

* Georgia Institute of Technology'de doktora öğrencisi.

$x^{s_3}/s_3!$ terimi de üçüncü çarpandan geldiğinden, s_1, s_2 ve s_3 sayıları problemde verilen diğer $0 \le s_1 \le 1$, $0 \le s_2 \le 2$, $0 \le s_3 \le 3$ koşullarını sağlarlar. Yani bu çarpımda x^4 teriminin katsayısı

$$\sum_{s_1+s_2+s_3=4,\, 0\le s_i \le i} \frac{1}{s_1!\, s_2!\, s_3!}$$

sayısına eşittir. Yukarıda, problemimizin yanıtının

$$\sum_{s_1+s_2+s_3=4,\, 0\le s_i \le i} \frac{4!}{s_1!\, s_2!\, s_3!}$$

formülüyle bulunabileceğini göstermiştik, demek ki problemimizin yanıtı gerçekten de x^4 teriminin katsayısının 4! katıdır. Aynı biçimde, x^5 teriminin katsayısının 5! katı aynı koşulları sağlayan beş harften oluşan sözcüklerin sayısını, genel olarak da x^n teriminin katsayısının $n!$ katı koşullara uygun n harfli sözcüklerin sayısını verir.

Bir başka örnek verelim. A, B, C, D harflerini kullanarak, ama A ve B'yi en fazla ikişer kez, C ve D'yi en fazla üçer kez kullanarak yazılabilecek tüm beş harfli sözcüklerin sayısını bulalım. Bunun için,

$$(1 + x + x^2/2!)^2(1 + x + x^2/2! + x^3/3!)^2$$

polinomunda, x^5'in katsayısını hesaplayıp 5! ile çarpmamız gerekir. x^5'in katsayısını hesaplarken x^6 ve x'in daha büyük güçlerine hiç ihtiyacımız olmayacağından hesapları modülo x^6 yapabiliriz, bu hatırı sayılır bir kolaylık getirir. Önce modülo x^6 kareleri alalım:

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2/2!)^2 &= (1 + x + x^2/2)^2\\ &\equiv 1 + 2x + 2x^2 + x^3 + x^4/4\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2/2! + x^3/3!)^2 &= (1 + x + x^2/2 + x^3/6)^2\\ &\equiv 1 + 2x + 2x^2 + 4x^3/3 + 7x^4/12 + x^5/6\end{aligned}$$

buluruz. Sonra bu ikisinin çarpımında x^5'in katsayısını hesaplayalım:

$$\begin{aligned}1/6 + 7/6 + 8/3 + 2 + 1/2 &= (1 + 7 + 16 + 12 + 3)/6\\ &= 13/2.\end{aligned}$$

Bu hesabı bir de aşağıda yaptık:

x^5'in katsayısının hesaplanması

$$(1 + 2x + 2x^2 + x^3 + x^4/4)(1 + 2x + 2x^2 + 4x^3/3 + 7x^4/12 + x^5/6)$$

$$1/6 + 2\times 7/12 + 2\times 4/3 + 2 + 1/4\times 2 = 13/2$$

Son olarak, bulduğumuz 13/2 katsayısını 5! ile çarpalım:

$$5! \times 13/2 = 5 \times 4 \times 3 \times 13 = 20 \times 39 = 780.$$

Demek ki A, B, C, D harflerini kullanarak, ama A ve B'yi en fazla ikişer kez, C ve D'yi en fazla üçer kez kullanarak yazılabilecek 780 tane beş harfli sözcük varmış... Az buz değil... 780 yanıtını sözcükleri teker teker yazıp saymaktan çok daha kolay bir biçimde bulduk.

Bu tekniği bir başka problem üzerinde deneyelim. 24 kişiyi 3 farklı odaya her odada çift sayıda kişi olacak biçimde yerleştirmek istiyoruz. Bunu kaç değişik şekilde yapabiliriz? (Hem kişiler hem de odalar arasında fark gözetiyoruz; yani hem kişiler hem de odalar numaralı.)

Bir önceki problemde olduğu gibi, bu soruya karşılık gelen bir sistem yazabiliriz:

$$s_1 + s_2 + s_3 = 24,$$
$$0 \le s_1,\, s_2,\, s_3 \text{ çift sayı}$$

Buradaki s_i'nin i numaralı odadaki kişi sayısını temsil ettiğini düşünelim. Bu durumda bu sistemin $(s_1,\ s_2,\ s_3)$ şeklindeki her çözümüne karşılık $24!/s_1!s_2!s_3!$ değişik kişi dağılımı vardır. (Odalara A, B ve C dersek, bu harflerin her birini çift sayıda kullanmak koşuluyla yazılan 24 harfli her sözcük böyle bir dağılımı verir. Harflerin her pozisyonu o numaralı kişiyi temsil etsin.) Soruyu üstel doğuran güç serisini kullanarak çözmek istersek, tek yapmamız gereken,

$$(1 + x^2/2! + x^4/4! + \ldots)^3$$

ifadesinde x^{24} teriminin katsayısını bulmak ve bu katsayıyı 24! ile çarpmak olacaktır.

Peki bu katsayıyı kolay bir biçimde nasıl bulabiliriz? Bunun için,

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots\\ e^{-x} &= 1 - x + x^2/2! - x^3/3! + \ldots\end{aligned}$$

eşitliklerinden yararlanacağız[1]. Bu iki ifadeyi toplayıp ikiye bölerek şu eşitliği elde ederiz:

$$(e^x + e^{-x})/2 \equiv 1 + x^2/2! + x^4/4! + \ldots$$

Şimdi yapmamız gereken

$$[(e^x + e^{-x})/2]^3 = (e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x})/8$$

ifadesinde x^{24}'ün teriminin katsayısını bulup bunu 24! ile çarpmaktır. Yukarıda e^x ve e^{-x} için verilen açılımlardan yararlanarak bu sayının $(3^{24} + 3)/4$ olduğunu kolaylıkla bulabiliriz.

Alıştırma: Verilen herhangi bir n için 0, 1, 2 ve 3 rakamları kullanılarak oluşturulan n basamaklı sayılar arasından, içinde çift sayıda 0 ve tek sayıda 1 bulunanlarının sayısı için genel bir formül bulun. ♠

1 Bu eşitliğin anlamını ve nedenini MD'nin bir başka sayısında açıklarız.